Module HAX201X
Année 2021/2022

Correction des exercices « ♠ » de la feuille 2

Exercice 17

On considère la suite (V_n) définie par récurrence : $V_0 = 0$ et $V_{n+1} = V_n + e^{V_n} - 3, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Montrer que (V_n) est décroissante. Quelle est sa limite ?

On montre facilement par récurrence que $V_{n+1} < V_n \le 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Si la limite $\ell = \lim_{n\to\infty} V_n$ est finie, elle doit satisfaire les relations $\ell = \ell + e^{\ell} - 3$ et $\ell \le V_0 = 0$, ce qui est impossible. Donc $\lim_{n\to\infty} V_n = -\infty$.

Montrer que $V_n \ge -3n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

La formule de récurrence donne que $V_{k+1} - V_k \ge -3$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Ainsi

$$V_n = V_n - V_0 = \sum_{k=0}^{n-1} V_{k+1} - V_k \ge -3n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que $V_n \le -2n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Comme $V_n \le 0, \forall n$, la formule de récurrence donne $V_{k+1} - V_k \le -2$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Ainsi

$$V_n = V_n - V_0 = \sum_{k=0}^{n-1} V_{k+1} - V_k \le -2n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En utilisant la question précédente, montrer que $V_n \le -3n + \sum_{k=0}^{n-1} e^{-2k}, \quad \forall n \ge 1$.

Comme $V_n \le -2n, \forall n$, la formule de récurrence donne $V_{k+1} - V_k \le e^{-2k} - 3$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Ainsi

$$-3n \le V_n = V_n - V_0 = \sum_{k=0}^{n-1} V_{k+1} - V_k \le -3n + \sum_{k=0}^{n-1} e^{-2k}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

En déduire que $V_n \sim -3n$.

La suite $n \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} e^{-2k}$ est convergente, donc bornée. Ainsi, les inégalités précédentes montrent que

$$V_n = -3n + O(1)$$

Cela entraine que $V_n \sim -3n$.

Exercice 19

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$, et la suite récurrente définie par les relations : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Déterminer les solutions $\alpha < \beta$ de l'équation $f(x) = x$. *Dans la suite on utilisera le fait que $\beta \ge 3$ et $|\alpha| \ge 1,23$.*

Un calcul immédiat donne $\alpha = 1 - \sqrt{5}$ et $\beta = 1 + \sqrt{5}$

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \; |x-\beta| \le 2 \implies |f(x) - \beta| \ge 2|x-\beta|$.

On a $|f(x)-\beta| = |f(x) - f(\beta)| = \frac{1}{2}|x^2-\beta^2| = \frac{1}{2}|x+\beta|\cdot|x-\beta|$. Si $|x-\beta| \le 2$ alors $x \ge \beta - 2 = \sqrt{5} - 1 \ge 1$. Cela implique alors que $\frac{1}{2}|x+\beta| \ge \frac{1}{2}(1+3) = 2$ et donc que $|f(x)-\beta| \ge 2|x-\beta|$.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ |x-\alpha| \leq 10^{-2} \implies |f(x)-\alpha| \geq \frac{6}{5}|x-\alpha|$.

Même raisonnement que précédemment. On a $|f(x)-\alpha| = |f(x)-f(\alpha)| = \frac{1}{2}|x^2-\alpha^2| = \frac{1}{2}|x+\alpha|\cdot|x-\alpha|$. Si $|x-\alpha| \leq 10^{-2}$ alors $x \leq \alpha + 10^{-2} \leq -1,2$ sachant que $\alpha = -1,23...$ Cela implique alors que $\frac{1}{2}|x+\alpha| \geq \frac{1}{2}(1,2+|\alpha|) \geq \frac{1}{2}(1,2+1,2) = \frac{6}{5}$ et donc que $|f(x)-\alpha| \geq \frac{6}{5}|x-\alpha|$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si elle est constante à partir d'un certain rang.

Supposons par l'absurde que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \{\alpha,\beta\}$ et que $u_n \neq \ell$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Par définition, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel $|u_n-\ell| \leq 10^{-3}$, $\forall n \geq N$. La question précédente montre alors que

$$|u_{n+1}-\ell| = |f(u_n)-\ell| \geq c\,|u_n-\ell|, \qquad \forall n \geq N.$$

avec $c \in \{2, \frac{6}{5}\}$. Ces inégalités entrainent que

$$|u_n-\ell| \geq c^{n-N}\,|u_N-\ell|, \qquad \forall n \geq N.$$

Comme $|u_N-\ell| > 0$ et que $c > 1$, on a $\lim_{n\to\infty} c^{n-N}\,|u_N-\ell| = +\infty$. C'est en contradiction avec le fait que $\lim_{n\to\infty}|u_n-\ell| = 0$.

Exercice 20

Soit $f\ :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ définie par $f(x) = \frac{x+1}{2x^2}$, et (u_n) la suite récurrente définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Tracer sur un même dessin le graphe de la fonction f et la droite d'équation $y = x$. Y représenter les premières valeurs de la suite (u_n).

Voir la figure (1). Dans la suite on utilisera que tout $x > 0$, on a

$$f(x) = x \iff 2x^3 - x - 1 = 0 \iff x = 1.$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} \in]1,+\infty[$ et $u_{2n} \in]0,1[$.

La fonction f est strictement décroissante donc $g = f\circ f$ est strictement croissante. D'autre part, comme $f(1) = 1$, on a $g(1) = 1$ et aussi

$$g(]0,1[) \subset]0,1[, \quad \text{et} \quad g(]1,+\infty[) \subset]1,+\infty[.$$

La suite $V_n := u_{2n}$ est une suite récurrente définie par : $V_0 = \frac{1}{2}$ et $V_{n+1} = g(V_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. L'inclusion $g(]0,1[) \subset]0,1[$ permet de montrer par une récurrence immédiate que $V_n \in]0,1[$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

La suite $W_n := u_{2n+1}$ est une suite récurrente définie par : $W_0 = 3$ et $W_{n+1} = W(I_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. L'inclusion $g(]1,+\infty[) \subset]1,+\infty[$ permet de montrer par une récurrence immédiate que $W_n \in]1,+\infty[$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Montrer que (V_n) est décroissante et (W_n) est croissante.

On a $V_0 = \frac{1}{2}$ et $V_1 = u_2 = \frac{2}{9} < V_0$. Comme g est croissante, la suite (V_n) est monotone. Sachant que $V_1 < V_0$, on peut conclure que (V_n) est décroissante.

On a $W_0 = u_1 = 3$ et $W_1 = u_3 = \frac{99}{8} > W_0$. Comme g est croissante, la suite (W_n) est monotone. Sachant que $W_1 > W_0$, on peut conclure que (W_n) est croissante.

Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} V_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} W_n = +\infty$. La suite (u_n) est-elle convergente ?

Un calcul direct donne l'expression $g(x) = \frac{x^2(2x^2+x+1)}{(x+1)^2}$, $\forall x > 0$. Alors tout $x > 0$, on a

$$g(x) = x \iff 2x^4 - x^2 - x = 0 \iff 2x^3 - x - 1 = 0 \iff x = 1.$$

La suite (V_n) est décroissante et minorée par 0. Elle converge donc vers $\ell \geq 0$. Si $\ell > 0$, alors on doit avoir $g(\ell) = \ell$: cela impliquerait que $\ell = 1$, mais cela est contradictoire avec le fait que $\ell \leq V_0 = \frac{1}{2}$. Conclusion : $\ell = 0$.

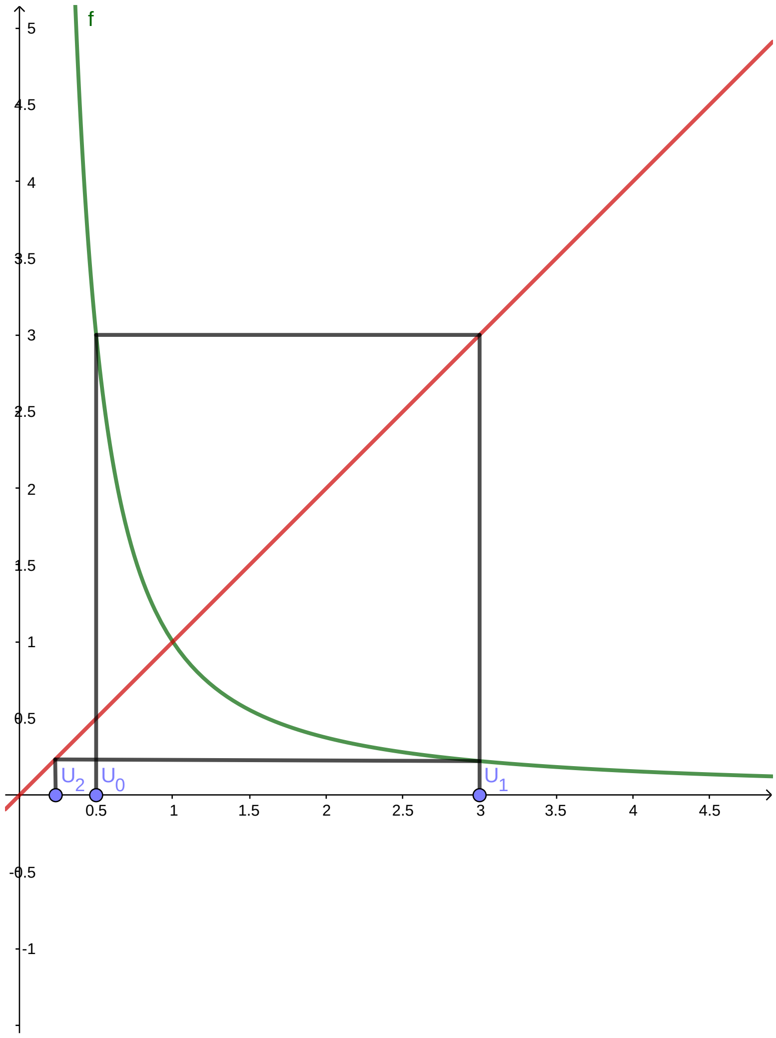

FIGURE 1. Graphe de la fonction $f(x) = \frac{x+1}{2x^2}$, $x > 0$

La suite (W_n) est croissante. Si (W_n) converge alors sa limite ℓ' devrait vérifier les deux conditions $g(\ell') = \ell'$ et $\ell' \geq W_0 = 3$. Comme ces deux conditions sont contradictoires, on peut conclure que $\lim\limits_{n\to\infty} W_n = +\infty$.

Conclusion : la suite (u_n) est divergente.

Que se passe-t-il si $u_0 \in]1, +\infty[$?

Dans ce cas $u_1 \in]0, 1[$. Dans cette situation on a :

$$\lim_{n\to\infty} u_{2n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = 0.$$

Ici encore la suite (u_n) est divergente.

Exercice 21

Pour $n \geq 1$, on considère la fonction polynomiale $f_n(x) = -1 + \sum_{k=1}^{n} x^k$.

(1) Montrer que $\forall n \geq 1$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $[0, 1]$, notée a_n.

(2) (a) Montrer que (a_n) est strictement décroissante.

  (b) Montrer que (a_n) est minorée.

  (c) Justifier que (a_n) converge. On note ℓ sa limite.

(3) (a) Montrer que la suite $(f_n(\ell))$ converge vers 0.

  (b) Exprimer $f_n(\ell)$ en fonction de n et ℓ.

(c) Déduire de ce qui précède que $\ell = \frac{1}{2}$.

Pour tout $n \geq 1$, la fonction $f_n(x) = -1 + \sum_{k=1}^{n} x^k$ est strictement croissante sur $[0, \infty[$. De plus $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = n - 1 \geq 0$. Comme f est continue, le théorème des valeurs intermédiaires nous assure l'existence d'une solution à l'équation $f_n(x) = 0$, $x \in [0, 1]$.

1. Comme f_n est strictement croissante sur $[0, 1]$, cette solution est unique (notée $a_n \in]0, 1]$).

2. (a) On voit que $f_{n+1}(x) > f_n(x)$ pour tout $x > 0$. En prenant $x = a_{n+1}$, cette relation donne $0 > f_n(a_{n+1})$, soit $0 = f_n(a_n) > f_n(a_{n+1})$. Sachant que f_n est strictement croissante, cela implique que $a_n > a_{n+1}$.

2. (b) La suite (a_n) est minorée par 0.

2. (c) La suite (a_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers $\ell \in [0, 1[$.

3. (a) La suite $f_n(\ell) = -1 + \sum_{k=1}^{n} \ell^k$ est croissante et de plus comme $\ell \leq a_n$, on a $f_n(\ell) \leq f_n(a_n) = 0$. Comme la suite $(f_n(\ell))$ est croissante et majorée par 0, elle est convergente et $\lim_{n\to\infty} f_n(\ell) \leq 0$.

Supposons (par l'absurde) que $\lim_{n\to\infty} f_n(\ell) < 0$. Alors il existe $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $f_n(\ell) \leq -\epsilon < 0 = f_n(a_n)$ pour tout $n \geq N$. Cela signifie que

(1) $$f_n(a_n) - f_n(\ell) \geq \epsilon, \qquad \forall n \geq N.$$

Posons $r = a_N < 1$. Vérifions que la suite croissante $n \mapsto f_n'(r) = \sum_{k=1}^{n} k r^{k-1}$ est majorée. On choisit un réel R tel que $r < R < 1$, et on écrit

$$k r^{k-1} = R^{k-1} \left(k (\tfrac{r}{R})^{k-1} \right).$$

Comme la suite $k(\frac{r}{R})^{k-1}$ tend vers 0, elle est majorée : Il existe $M > 0$ tel que $k(\frac{r}{R})^{k-1} \leq M$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Finalement on obtient la majoration $k r^{k-1} \leq M R^{k-1}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Cela implique que

$$\sum_{k=1}^{n} k r^{k-1} \leq M \sum_{k=1}^{n} R^{k-1} = M \frac{1 - R^n}{1 - R} \leq C$$

avec $C = \frac{M}{1-R}$. Utilisons le théorème des accroissements finis et l'inégalité (1) :

$$\epsilon \leq |f_n(a_n) - f_n(\ell)| \leq |a_n - \ell| \sup_{x\in[0,r]} |f_n'(x)|, \qquad \forall n \geq N.$$

Mais $\sup_{x\in[0,r]} |f_n'(x)| = f_n'(r) \leq C$. On obtient alors que $|a_n - \ell| \geq \frac{\epsilon}{C}$, $\forall n \geq N$: cela contredit le fait que $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$. Conclusion : $\lim_{n\to\infty} f_n(\ell) = 0$

3. (b) Un calcul direct donne

$$f_n(\ell) = -1 + \sum_{k=1}^{n} \ell^k = -1 + \frac{1 - \ell^n}{1 - \ell} \ell$$

3. (c) Comme $\ell \in [0, 1[$, $\lim_{n\to\infty} \ell^n = 0$. Cela montre que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\ell) = -1 + \frac{1}{1 - \ell} \ell = \frac{2\ell - 1}{1 - \ell}.$$

On a montré à la question **3. (a)** que $\lim_{n\to\infty} f_n(\ell) = 0$ et à la question **3. (c)** que $\lim_{n\to\infty} f_n(\ell) = \frac{2\ell-1}{1-\ell}$. Cela implique que $\ell = \frac{1}{2}$.