TD2

Ex 1. Etude du schéma de Heun.

(a) testons l'exactitude de la quadrature pour

$g(t) = 1, x, x^2$

$\int_0^1 1\,dx = 1 = 1/4 + 3/4$ ✓

$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} = 0 + \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}$ ✓

$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3} = 0 + \frac{3}{4}\frac{4}{9}$ ✓

Comme $g \longmapsto \int_0^1 g(x)\,dx$ et $g \longmapsto \frac{1}{4}g(0) + \frac{3}{4}g\left(\frac{2}{3}\right)$

sont des formes linéaires elles sont égales sur $\text{Vect}(1, x, x^2) = \mathbb{R}_2[x]$ tous les polynômes de degré ≤ 2.

Rq pour $g(x) = x^3$ $\int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4} \neq 0 + \frac{3}{4}\frac{8}{27}$ ✗

la quadrature n'est pas exacte

(b) Etudions l'erreur de consistance.

$y(t_0+h) - y_1$.

Effectuons un développement de Taylor à l'ordre 3

$y(t_0+h) = y(t_0) + h\,y'(t_0) + \frac{h^2}{2}y''(t_0) + \frac{h^3}{6}y'''(t_0) + O(h^4)$

Cela suppose que $t \longmapsto y(t)$ est au moins C^4 mais c'est une conséquence simple de l'hypothèse f C^∞ :

On a en effet $y' = f(y)$

donc y est dérivable donc continue et par composition $f(y)$ est continue donc $y' = f(y)$ est continue donc y est C^1

Mais alors $f(y)$ est C^1 donc $y' = f(y)$ est C^1 ce qui implique que y est C^2, et ainsi de suite par récurrence on obtient que y est C^k, $\forall k \geq 0$ (Un tel argument est appelé un "bootstrap")

Calculons les dérivées successives y', y'', y'''.

$y' = f(y)$ avec l'equation differentielle.

$y'' = f'(y) . y' = f'(y) f(y)$ par composition

$y''' = f''(y) y' f(y) + f'(y) f'(y) y'$ par produit

$y''' = f''(y)(f(y))^2 + (f'(y))^2 f(y)$

Ainsi on peut écrire le développement de Taylor :

$$y(t_0+h) = y_0 + h f(y_0) + \frac{h^2}{2} f'(y_0) f(y_0) + \frac{h^3}{6}\left\{ f''(y_0) f(y_0)^2 + f'(y_0)^2 f(y_0) \right\} + O(h^4). \quad (T)$$

Considérons d'autre part :

$$y_1 = y_0 + h\left(\frac{1}{4} f(y_0) + \frac{3}{4} f(u_3)\right) \quad (1)$$

Exprimons $f(u_3) = f\left(y_0 + \frac{2h}{3} f(u_2)\right)$

Développons $f(u_3)$ à l'ordre deux

En effet $f(u_3)$ est multiplié par h dans le schéma (1)

$$f(u_3) = f(y_0) + \frac{2h}{3} f(u_2) f'(y_0) + \frac{2}{9} h^2 f(u_2)^2 f''(y_0) + O(h^3) \qquad (2)$$

Il reste maintenant à expliciter $f(u_2)$

$$f(u_2) = f\left(y_0 + \frac{h}{3} f(y_0)\right)$$

développons à l'ordre un, cela suffit car $f(u_2)$ sera multiplié au total par h dans (2)

$$f(u_2) = f(y_0) + \frac{h}{3} f(y_0) f'(y_0) + O(h^2) \qquad (3)$$

portons ensuite (3) dans (2) :

$$f(u_3) = f(y_0) + \frac{2h}{3} f'(y_0)\left(f(y_0) + \frac{h}{3} f(y_0) f'(y_0)\right) + \frac{2h^2}{9} f''(y_0)\left(f(y_0) + \cdots\right)^2 + O(h^3)$$

il n'est pas nécessaire de développer le $(f(y_0)+\cdots)^2$

$$f(u_3) = f(y_0) + \frac{2h}{3} f'(y_0) f(y_0) + \frac{2h^2}{9}\left\{f(y_0) f'(y_0)^2 + f''(y_0) f(y_0)^2\right\} + O(h^3) \qquad (4)$$

Portons (4) dans (1). On obtient :

$$y_1 = y_0 + h\left\{\frac{1}{4} f(y_0) + \frac{3}{4} f(y_0) + \frac{h}{2} f'(y_0) f(y_0) + \frac{h^2}{6}\left[f(y_0) f'(y_0)^2 + f''(y_0) f(y_0)^2\right]\right\} + O(h^4)$$

$$y_1 = y_0 + h f(y_0) + \frac{h^2}{2} f'(y_0) f(y_0) + \frac{h^3}{6}\left[f()f'()^2 + f''()f()^2\right] + O(h^4) \qquad (+)$$

En comparant (H) avec (T) on trouve bien :

$$y(t_0+h) - y_1 = O(h^4)$$

L'erreur de consistance est bien en $O(h^4)$ $\square$

(c) soit $T>0$ et $t_n = nh$ avec h le pas supposé constant.

l'erreur globale est $\max\limits_{0 \leq n \leq N} (|y(t_n) - y_n|)$.

Le schéma de Heun est un schéma à un pas :

$y_1 = y_0 + h\,\Phi(t_0, y_0; h)$ où la fonction Φ

$$\Phi(t_0, y_0; h) = \frac{1}{4} f(y_0) + \frac{3}{4} f\left(y_0 + \frac{2h}{3} f\left(y_0 + \frac{h}{3} f(y_0)\right)\right).$$

De plus comme f est supposée Lipschitzienne

$$|f(y) - f(z)| \leq L|y - z|$$

il est facile (mais un peu fastidieux) de vérifier que Φ est Lipschitzienne % à la variable y_0.

On peut donc appliquer le théorème de convergence des schémas à un pas.

$$\max_n |y(t_n) - y_n| = O(h^3)$$

le schéma de Heun est convergent et il est d'ordre 3.

$\square$

Rq : les calculs sont nettement plus simple du fait que l'équation différentielle $y' = f(y)$ est autonome i.e. f ne dépend pas de t.

Cela étant il est toujours possible de se ramener à une équation autonome. Soit $y' = f(t,y)$

Posons $Z(t) = (t, y(t))$

$$Z'(t) = (1, y'(t)) = (1, f(t,y)) = (1, f(Z))$$

quitte à poser $F(Z) = (1, f(Z))$ on s'est ramené à une équation autonome, mais on a augmenté la dimension de la solution de 1.

EX2. Ecrivons le schéma ainsi, prenant $n = j+1$:

$$y_{n+1} + 4y_n - 5y_{n-1} = h\left(4f(t_n, y_n) + 2f(t_{n-1}, y_{n-1})\right)$$

c'est un schéma multipas.

L'erreur de consistance est définie par :

$$y(t_{n+1}) + 4y(t_n) - 5y(t_{n-1}) - h\left(4f(t_n, y(t_n)) + 2f(t_{n-1}, y(t_{n-1}))\right)$$

c'est à dire
$$\varepsilon(h) = y(t_n+h) + 4y(t_n) - 5y(t_n-h) - h\left(4f(t_n, y(t_n)) + 2f(t_n-h, y(t_n-h))\right).$$

En utilisant le fait que $f(t, y(t)) = y'(t)$ on obtient :

$$\varepsilon(h) = y(t_n+h) + 4y(t_n) - 5y(t_n-h) - h\left(4y'(t_n) + 2y'(t_n-h)\right)$$

il suffit alors d'effectuer 2 développements de Taylor :

$$y(t_n+h) = y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2}y''(t_n) + \frac{h^3}{6}y'''(t_n) + O(h^4)$$

$$y(t_n-h) = y(t_n) - hy' + \frac{h^2}{2}y'' - \frac{h^3}{6}y'''(t_n) + O(h^4)$$

On développe également à l'ordre 2

$$y'(t_n - h) = y'(t_n) - h\, y''(t_n) + \frac{h^2}{2} y'''(t_n) + O(h^3)$$

Et on porte ces 3 développements dans $\varepsilon(h)$:

$$\varepsilon(h) = y(t_n) + h y' + \frac{h^2}{2} y'' + \frac{h^3}{6} y'''$$
$$+ 4\, y(t_n)$$
$$- 5\left(y(t_n) - h y' + \frac{h^2}{2} y'' - \frac{h^3}{6} y'''\right)$$
$$- 4 h\, y'(t_n)$$
$$- 2h\left(y'(t_n) - h y'' + \frac{h^2}{2} y'''\right) \quad + \quad O(h^4)$$

$$\varepsilon(h) = (1+4-5)\, y(t_n) + (1+5-4-2)\, h\, y'(t_n)$$
$$+ \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{2} + 2\right) h^2 y''(t_n) + \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{6} - 1\right) h^3 y'''(t_n) + O(h^4)$$

$$\varepsilon(h) = O(h^4) \qquad \square$$

Pour $f = 0$, le schéma produit une suite vérifiant la relation de récurrence linéaire :

$$y_{n+2} + 4 y_{n+1} - 5 y_n = 0$$

L'équation caractéristique est

$$\lambda^2 + 4\lambda - 5 = (\lambda - 1)(\lambda + 5) = 0$$

donc les solutions sont $y_n = A \cdot 1^n + B\,(-5)^n$

où A et B sont déterminés par la donnée de y_0 et y_1.

$$\begin{cases} A + B = y_0 \\ A - 5B = y_1 \end{cases}$$

$$B = \frac{y_0 - y_1}{6} \qquad A = \frac{5}{6} y_0 + \frac{1}{6} y_1$$

$$y_n = \left(\frac{5}{6}y_0 + \frac{1}{6}y_1\right) + \left(\frac{y_0 - y_1}{6}\right) \cdot (-5)^n.$$

le terme $(-5)^n$ n'est pas borné quand $n \to +\infty$

Si au cours du calcul 2 termes consécutifs ne sont pas égaux à une précision infinie, si par exemple $y_0 - y_1 = eps$ (précision machine)

alors le facteur $(-5)^n$ va amplifier cette quantité, aussi minime soit elle, et au bout de quelques dizaines d'itérations

$y_n \sim \frac{eps}{6} \cdot (-5)^n$ sera non borné.

Comme la solution exacte de $y' = 0$ est évidemment $y =$ constante le schéma donne des erreurs de plus en plus grandes et ne converge pas.

Ex 3.

(a) On se donne 3 noeuds d'interpolation donc le polynôme $q(t)$ est de degré ≤ 2.

Exprimons ce polynôme par la méthode de Newton.

$$q(t) = y(t_0) + (t - t_0)\, y[t_0, t_1] + (t - t_0)(t - t_1)\, y[t_0, t_1, t_2]$$

où $y[t_0, t_1] = \dfrac{y(t_1) - y(t_0)}{t_1 - t_0} = \dfrac{y_1 - y_0}{h}$

$$y[t_0, t_1, t_2] = \frac{y[t_1, t_2] - y[t_0, t_1]}{t_2 - t_0} = \frac{\frac{y_2 - y_1}{h} - \frac{y_1 - y_0}{h}}{2h} = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2}$$

Rq Si vous n'êtes pas familier avec les "différences divisées" de Newton, vous pouvez aussi utiliser l'interpolation de Lagrange.

Ainsi $q(t) = y_0 + (t-t_0)\frac{(y_1-y_0)}{h} + (t-t_0)(t-t_1)\frac{(y_2-2y_1+y_0)}{2h^2}$

(b) dérivons % à t le polynôme $q(t)$

$$q'(t) = \frac{y_1-y_0}{h} + \left((t-t_1)+(t-t_0)\right)\left(\frac{y_2-2y_1+y_0}{2h^2}\right)$$

faisons $t := t_2$

$$q'(t_2) = \frac{y_1-y_0}{h} + (3h)\left(\frac{y_2-2y_1+y_0}{2h^2}\right)$$

$$q'(t_2) = \frac{3/2\, y_2 - 2y_1 + 1/2\, y_0}{h} \qquad \square$$

(c) par définition du schéma de différentiation rétrograde on approxime

$y'(t_{n+1})$ par $q'(t_{n+1})$ où $q(t)$ polynôme d'interpolation de $y(t)$ aux 3 noeuds t_{n+1}, t_n, t_{n-1}.

D'après la formule obtenue en (b)

$$q'(t_{n+1}) = \frac{3/2\, y_{n+1} - 2y_n + 1/2\, y_{n-1}}{h}$$

donc en remplaçant dans $y'(t_{n+1}) = f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$

on obtient bien $\boxed{\frac{3}{2} y_{n+1} - 2y_n + \frac{1}{2} y_{n-1} = h\, f(t_{n+1}, y_{n+1})}$

(d) soit $\varphi : y \longmapsto \frac{2}{3}\left(2y_n - \frac{1}{2}y_{n-1} + h f(t_{n+1}, y)\right)$

$\varphi(y) - \varphi(z) = \frac{2h}{3}\left(f(t_{n+1}, y) - f(t_{n+1}, z)\right)$

$|\varphi(y) - \varphi(z)| \leq \frac{2h}{3} L\, |y - z|$ car $f(t_{n+1}, \cdot)$ Lipschitz

pour h suffisamment petit $0 < \frac{2hL}{3} < 1$

donc φ est contractante sur $\mathbb{R}$ et admet un unique point fixe, obtenu comme limite de la suite des itérées.

Pour calculer y_{n+1} on calcule quelques itérations à partir de la valeur initiale y_n.

$y_{n+1}^{(1)} = \varphi(y_n) \qquad y_{n+1}^{(2)} = \varphi(y_{n+1}^{(1)}) \ldots$

comme de toutes façons on a un schéma approché quelques itérations suffisent.

(e) Soit la suite récurrente :

$$\frac{3}{2} y_{n+1} - 2y_n + \frac{1}{2} y_{n-1} = 0$$

D'après le cours elle est bornée $\forall n$ ssi les racines de l'équation caractéristique

$\frac{3}{2}\lambda^2 - 2\lambda + \frac{1}{2}$ sont de module ≤ 1

et que les racines de module 1 sont de multiplicité 1.

ici $\frac{3}{2}\lambda^2 - 2\lambda + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}(\lambda - 1)(\lambda - \frac{1}{3})$

les racines sont 1 (racine simple) et $1/3$ donc la condition de stabilité est vérifiée.

(f) exprimons l'erreur de consistance

$$\varepsilon(h) := \frac{3}{2} y(t_n+h) - 2y(t_n) + \frac{1}{2} y(t_n-h) - h f(t_n+h, y(t_n+h))$$

$$\varepsilon(h) := \frac{3}{2} y(t_n+h) - 2y(t_n) + \frac{1}{2} y(t_n-h) - h y'(t_n+h)$$

effectuons des développements de Taylor autour de t_n :

$$y(t_n+h) = y(t_n) + h y'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n) + O(h^3)$$

$$y(t_n-h) = y(t_n) - h y'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n) + O(h^3)$$

$$y'(t_n+h) = y'(t_n) + h y''(t_n) + O(h^2)$$

Portons les dans $\varepsilon(h)$

$$\varepsilon(h) := \frac{3}{2}\left(\cancel{y(t_n)} + \cancel{h y'} + \cancel{\frac{h^2}{2} y''}\right) - \cancel{2y(t_n)} +$$

$$\frac{1}{2}\left(\cancel{y(t_n)} - \cancel{h y'} + \cancel{\frac{h^2}{2} y''}\right) - h\left(\cancel{y'(t_n)} + \cancel{h y''(t_n)}\right) + O(h^3)$$

$\varepsilon(h) = O(h^3)$ qui est bien $o(h)$ donc le schéma est consistant

L'erreur de consistance est $O(h^3)$.

(g) Le schéma est stable d'après (e)

il est consistant d'après (f)

D'après le théorème de convergence des schémas multipas

il est donc convergent.

Comme l'erreur de consistance est $O(h^3)$

Le schéma est d'ordre 2.

(D'où son nom BDF2)

Ex 4

l'équation différentielle s'écrit
$$y' = -\frac{1}{\varepsilon} y + \frac{1}{\varepsilon} \cos t$$
c'est une équation linéaire.

l'équation homogène a les solutions $\lambda e^{-t/\varepsilon}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

cherchant une solution particulière sous forme $a \cos t + b \sin t$ on trouve par identification
$$a = \frac{1}{1+\varepsilon^2}, \quad b = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2}.$$

Ainsi la solution générale est :
$$y(t) = \lambda e^{-t/\varepsilon} + \frac{\cos t}{1+\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon \sin t}{1+\varepsilon^2}$$

Avec la condition initiale $y(0) = 0$
$$y(t) = -\frac{1}{1+\varepsilon^2} e^{-t/\varepsilon} + \frac{\cos t}{1+\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon \sin t}{1+\varepsilon^2}$$

Comme $\varepsilon \ll 1$, $\frac{1}{1+\varepsilon^2} = 1 + O(\varepsilon^2)$ donc
$$y(t) = -e^{-t/\varepsilon} + \cos t + \varepsilon \sin t + O(\varepsilon^2) \quad \boxed{}$$

(a) $y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n)$ (schéma d'Euler)

ici la fonction $f(t,y) = -\frac{1}{\varepsilon} y + \frac{1}{\varepsilon} \cos(t)$

donc
$$y_{n+1} = y_n + h\left(-\frac{1}{\varepsilon} y_n + \frac{1}{\varepsilon} \cos(t_n)\right)$$
$$= \left(1 - \frac{h}{\varepsilon}\right) y_n + \frac{h}{\varepsilon} \cos(t_n). \quad \boxed{}$$

(b) pour résoudre l'équation (a) on s'inspire de la démarche pour l'équation différentielle.

On résout l'équation "homogène"
$$z_{n+1} = \left(1 - h/\varepsilon\right) z_n \quad \text{qui est une suite géométrique}$$
$$z_n = \left(1 - h/\varepsilon\right)^n \cdot C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Ensuite on cherche une solution particulière sous forme $y_m = A\cos t_m + B\sin t_m$

$$y_{m+1} = A\cos(t_{m+1}) + B\sin(t_{m+1}) = A\cos(t_m+h) + B\sin(t_m+h)$$
$$= (A\cos h + B\sin h)\cos t_m + (B\cos h - A\sin h)\sin t_m$$

En identifiant avec $y_{m+1} = (1-h/\varepsilon)y_m + h/\varepsilon \cos t_m$

on obtient un système 2×2

$$\begin{cases} A\cos h + B\sin h = A(1-h/\varepsilon) + h/\varepsilon \\ -A\sin h + B\cos h = B(1-h/\varepsilon) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A(\cos h - (1-h/\varepsilon)) + B\sin h = h/_2 \\ -A\sin h + B(\cos h - (1-h/\varepsilon)) = 0 \end{cases}$$

le déterminant est $D = \left[\cos h - (1-h/\varepsilon)\right]^2 + \sin^2 h > 0$

donc on peut déterminer A, B.

En utilisant que $\cos h = 1 - \frac{h}{2}^2 + O(h^4)$, $\sin h = h + O(h^3)$

on calcule $D = \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^2 + O\left(\frac{h}{\varepsilon}^3\right) = \frac{h^2}{\varepsilon^2}(1 + O(h\varepsilon))$

$$A = \frac{\begin{vmatrix} h/\varepsilon & \sin h \\ 0 & \cos h - (1-h/\varepsilon) \end{vmatrix}}{D} = \dots = 1 + O(h\varepsilon)$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} \cos h - (1-h/\varepsilon) & h/\varepsilon \\ -\sin h & 0 \end{vmatrix}}{D} = \frac{h/\varepsilon \sin h}{D} = \dots = \varepsilon + O(h\varepsilon^2)$$

Ainsi la solution générale de (a) est donnée par :

$$y_n = C(1-h/\varepsilon)^m + A\cos t_n + B\sin t_n$$

$$y_m = C\left(1-\frac{h}{\varepsilon}\right)^m + \cos t_m + \varepsilon \sin t_m + O(h\varepsilon)$$

on veut $y_0 = 0$ donc $C = -1$

$$y_m = -\left(1-\frac{h}{\varepsilon}\right)^m + \cos t_m + \varepsilon \sin t_m + O(h\varepsilon)$$

(c) la solution numérique est bornée ssi $\left(1-\frac{h}{\varepsilon}\right)^m$ est bornée

cela est le cas ssi

$$-1 < 1-\frac{h}{\varepsilon} < 1$$

$$\iff \quad 0 < h < 2\varepsilon$$

(d) le schéma d'Euler implicite s'écrit :

$y_{m+1} = y_m + h f(t_{m+1}, y_{m+1})$ donne

$$y_{m+1} = y_m + h\left(-\frac{1}{\varepsilon} y_{m+1} + \frac{1}{\varepsilon}\cos t_{m+1}\right)$$

$$\left(1+\frac{h}{\varepsilon}\right) y_{m+1} = y_m + \frac{h}{\varepsilon}\cos(t_{m+1}) \qquad \square$$

On commence par résoudre l'équation "homogène"

$\left(1+\frac{h}{\varepsilon}\right) z_{n+1} = z_n$ qui est une suite géométrique

$$z_n = C\left(1+\frac{h}{\varepsilon}\right)^{-m}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

En cherchant une sol. part. sous forme $A\cos t_n + B\sin t_n$ on trouve :

$$y_n = C\left(1+\frac{h}{\varepsilon}\right)^{-m} + \cos t_m + \varepsilon \sin t_n + O(h\varepsilon)$$

Maintenant y_n est bornée ssi $\left(1+\frac{h}{\varepsilon}\right)^{-n}$ est bornée

$\iff -1 < \dfrac{1}{1+h/\varepsilon} < 1$, comme $h>0$, cela est toujours vérifié, $\forall h > 0$

(e) Sur la figure en haut, pour $h = \frac{1.975}{50}$

on voit que la solution numérique oscille fortement avant de converger très lentement.

pour $h = 1.875/50$ les osillations sont moins fortes et la convergence semble plus rapide.

Sur la figure en dessous, pour $h = \frac{2.1}{50}$
la solution numérique calculée avec le schéma d'Euler explicite diverge.

cela confirme le résultat de la question (c)
$\varepsilon = 1/50$, si $h > 2\varepsilon$ le schéma donne une solution non bornée.
pour $h < 2\varepsilon$, les oscillations s'estompent, la solution est bornée.

Sur la figure avec Euler implicite, il n'y a pas d'oscillation parasite, la solution est bornée même pour $h > 2\varepsilon$.
On remarque tout de même un écart entre la solution numérique et la solution exacte pour t petit.
la solution exacte $= -e^{-t/\varepsilon} + \cos t + \varepsilon \sin t + O(\varepsilon^2)$
comprend une solution transitoire $e^{-t/\varepsilon} = e^{-50t}$
qui tend très vite vers 0.
le schéma d'Euler implicite est d'ordre 1
il n'est pas assez précis pour capturer cette variation brusque entre 0 et 1

Le dernier schéma des trapèzes implicites est d'ordre 2 et il semble capturer la phase transitoire pour t petit et bien approcher la solution exacte sans restrictions sur le pas h.

L'équation $y' = -\frac{1}{\varepsilon} y + \frac{1}{\varepsilon}\cos t$
possède une solution qui varie brusquement. Le schéma d'Euler explicite exige de choisir un pas h très petit, simon il est instable.

Les schémas implicites donnent des résultats corrects, sans restriction sur le pas de temps. Ils sont d'autant plus précis qu'ils sont d'ordre élevé.

Rq la fonction $f(t,y) = -\frac{1}{\varepsilon} y + \cos t$
est lipschitz % y mais la constante de Lipschitz $L = 1/\varepsilon \gg 1$, c'est ce qui rend difficile la convergence des schéma Explicites et contraint à prendre h très petit.
On dit que l'équation différentielle est RAIDE.