

## TD2

Ex 1. Etude du schéma de Heun.

(a) testons l'exactitude de la quadrature pour

$$g(t) = 1, x, x^2$$

$$\int_0^1 1 dx = 1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \quad \checkmark$$

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2} = 0 + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \quad \checkmark$$

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} = 0 + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{9} \quad \checkmark$$

Comme  $g \mapsto \int_0^1 g(x) dx$  et  $g \mapsto \frac{1}{4}g(0) + \frac{3}{4}g(\frac{2}{3})$

sont des formes linéaires elles sont égales sur  $\text{Vect}(1, x, x^2) = \mathbb{R}_2[x]$  tous les polynômes de degré  $\leq 2$ .

Rq pour  $g(x) = x^3$   $\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4} \neq 0 + \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{27}$   $\times$   
la quadrature n'est pas exacte

(b) Etudions l'ordre de consistance.

$$y(t_0+h) - y_1.$$

Effectuons un développement de Taylor à l'ordre 3  
 $y(t_0+h) = y(t_0) + h y'(t_0) + \frac{h^2}{2} y''(t_0) + \frac{h^3}{6} y'''(t_0) + O(h^4)$

Cela suppose que  $t \mapsto y(t)$  est au moins  $C^4$   
mais c'est une conséquence simple de

l'hypothèse  $f \in C^\infty$  :  
 On a en effet  $y' = f(y)$   
 donc  $y$  est dérivable donc continue et  
 par composition  $f(y)$  est continue donc  
 $y' = f(y)$  est continue donc  $y$  est  $C^1$   
 Mais alors  $f(y)$  est  $C^1$  donc  $y' = f(y)$  est  $C^1$   
 ce qui implique que  $y$  est  $C^2$ , et ainsi  
 de suite par récurrence on obtient que  
 $y$  est  $C^k$ ,  $\forall k \geq 0$  (un tel argument  
 est appelé un "bootstrap")

Calculons les dérivées successives  $y', y'', y'''$ .

$$y' = f(y) \quad \text{avec l'équation différentielle.}$$

$$y'' = f'(y) \cdot y' = f'(y) f(y) \quad \text{par composition}$$

$$y''' = f''(y) y' f(y) + f'(y) f'(y) y' \quad \text{par produit}$$

$$y''' = f''(y) (f(y))^2 + (f'(y))^2 f(y)$$

Ainsi on peut écrire le développement de Taylor :

$$y(t_0+h) = y_0 + h f(y_0) + \frac{h^2}{2} f'(y_0) f(y_0) + \frac{h^3}{6} \left\{ f''(y_0) f(y_0)^2 + f'(y_0)^2 f(y_0) \right\} + O(h^4). \quad (T)$$

Considérons d'autre part :

$$y_1 = y_0 + h \left( \frac{1}{4} f(y_0) + \frac{3}{4} f(u_3) \right) \quad (1)$$

$$\text{Exprimons } f(u_3) = f\left(y_0 + \frac{2h}{3} f(u_2)\right)$$

Développons  $f(u_3)$  à l'ordre **deux**

En effet  $f(u_3)$  est multiplié par  $h$  dans le schéma (1)

$$f(u_3) = f(y_0) + \frac{2h}{3} \underbrace{f(u_2)} f'(y_0) + \frac{2}{9} h^2 \underbrace{f(u_2)^2} f''(y_0) + O(h^3)$$

Il reste maintenant à expliciter  $f(u_2)$  (2)

$$f(u_2) = f\left(y_0 + \frac{h}{3} f(y_0)\right)$$

développons à l'ordre **un**, cela suffit car

$f(u_2)$  sera multiplié au total par  $h$  dans (2)

$$f(u_2) = f(y_0) + \frac{h}{3} f(y_0) f'(y_0) + O(h^2) \quad (3)$$

portons ensuite (3) dans (2) :

$$f(u_3) = f(y_0) + \frac{2h}{3} f'(y_0) \left( f(y_0) + \frac{h}{3} f(y_0) f'(y_0) \right)$$

$$+ \frac{2}{9} h^2 f''(y_0) \left( f(y_0) + \dots \right)^2 + O(h^3)$$

il n'est pas nécessaire de développer le  $\left( f(y_0) + \dots \right)^2$

$$f(u_3) = f(y_0) + \frac{2h}{3} f'(y_0) f(y_0) + \frac{2h^2}{9} \left\{ f(y_0) f'(y_0)^2 + f''(y_0) f(y_0)^2 \right\} + O(h^3) \quad (4)$$

Portons (4) dans (1). On obtient :

$$y_1 = y_0 + h \left\{ \frac{1}{4} f(y_0) + \frac{3}{4} f(y_0) + \frac{h}{2} f'(y_0) f(y_0) + \frac{h^2}{6} \left[ f(y_0) f'(y_0)^2 + f''(y_0) f(y_0)^2 \right] \right\} + O(h^4)$$

$$y_1 = y_0 + h f(y_0) + \frac{h^2}{2} f'(y_0) f(y_0) + \frac{h^3}{6} \left[ f(y_0) f'(y_0)^2 + f''(y_0) f(y_0)^2 \right] + O(h^4) \quad (11)$$

En comparant (H) avec (T) on trouve bien :

$$y(t_0+h) - y_1 = O(h^4)$$

L'erreur de consistance est bien en  $O(h^4)$   $\square$

(c) soit  $T > 0$  et  $t_n = nh$  avec  $h$  le pas supposé constant.

L'erreur globale est  $\max_{0 \leq n \leq N} |y(t_n) - y_n|$ .

Le schéma de Heun est un schéma à un pas :

$$y_1 = y_0 + h \bar{\Phi}(t_0, y_0; h) \text{ où la fonction } \bar{\Phi}$$

$$\bar{\Phi}(t_0, y_0; h) = \frac{1}{4} f(y_0) + \frac{3}{4} f\left(y_0 + \frac{2h}{3} f(y_0 + \frac{h}{3} f(y_0))\right)$$

De plus comme  $f$  est supposée Lipschitzienne

$$|f(y) - f(z)| \leq L|y - z|$$

il est facile (mais un peu fastidieux) de

vérifier que  $\bar{\Phi}$  est Lipschitzienne  $\circ$  à la variable  $y_0$ .

On peut donc appliquer le théorème de convergence des schémas  $\bar{\Phi}$  à un pas.

$$\max_n |y(t_n) - y_n| = O(h^3)$$

le schéma de Heun est convergent et il est d'ordre 3.

$\square$

Rq: les calculs sont nettement plus simple du fait que l'équation différentielle  $y' = f(y)$  est autonome i.e.  $f$  ne dépend pas de  $t$ .

Cela étant il est toujours possible de se ramener à une équation autonome. Soit  $y' = f(t, y)$

Posons  $z(t) = (t, y(t))$

$$z'(t) = (1, y'(t)) = (1, f(t, y)) = (1, f(z))$$

quitte à poser  $F(z) = (1, f(z))$  on s'est ramené à une équation autonome, mais on a augmenté la dimension de la solution de 1.

EX2. Ecrivons le schéma ainsi, prenant  $m = j+1$ :

$$y_{m+1} + 4y_m - 5y_{m-1} = h(4f(t_m, y_m) + 2f(t_{m-1}, y_{m-1}))$$

c'est un schéma multipas.

L'erreur de consistance est définie par:

$$y(t_{m+1}) + 4y(t_m) - 5y(t_{m-1}) - h(4f(t_m, y(t_m)) + 2f(t_{m-1}, y(t_{m-1})))$$

c'est à dire  $\varepsilon(h) = y(t_{m+h}) + 4y(t_m) - 5y(t_{m-h}) - h(4f(t_m, y(t_m)) + 2f(t_{m-h}, y(t_{m-h})))$ .

En utilisant le fait que  $f(t, y(t)) = y'(t)$  on obtient:

$$\varepsilon(h) = y(t_{m+h}) + 4y(t_m) - 5y(t_{m-h}) - h(4y'(t_m) + 2y'(t_{m-h}))$$

il suffit alors d'effectuer 2 développements de Taylor:

$$y(t_{m+h}) = y(t_m) + h y'(t_m) + \frac{h^2}{2} y''(t_m) + \frac{h^3}{6} y'''(t_m) + O(h^4)$$

$$y(t_{m-h}) = y(t_m) - h y' + \frac{h^2}{2} y'' - \frac{h^3}{6} y'''(t_m) + O(h^4)$$

On développe également à l'ordre 2

$$y'(t_n - h) = y'(t_n) - h y''(t_n) + \frac{h^2}{2} y'''(t_n) + O(h^3)$$

Et on porte ces 3 développements dans  $\varepsilon(h)$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon(h) = & y(t_n) + h y' + \frac{h^2}{2} y'' + \frac{h^3}{6} y''' \\ & + 4 y(t_n) \\ & - 5 \left( y(t_n) - h y' + \frac{h^2}{2} y'' - \frac{h^3}{6} y''' \right) \\ & - 4 h y'(t_n) \\ & - 2 h \left( y'(t_n) - h y'' + \frac{h^2}{2} y''' \right) + O(h^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(h) = & (1 + 4 - 5) y(t_n) + (1 + 5 - 4 - 2) h y'(t_n) \\ & + \left( \frac{1}{2} - \frac{5}{2} + 2 \right) h^2 y''(t_n) + \left( \frac{1}{6} + \frac{5}{6} - 1 \right) h^3 y'''(t_n) + O(h^4) \end{aligned}$$

$$\varepsilon(h) = O(h^4) \quad \square$$

Pour  $f=0$ , le schéma produit une suite vérifiant la relation de récurrence linéaire :

$$y_{m+2} + 4y_{m+1} - 5y_m = 0$$

L'équation caractéristique est

$$\lambda^2 + 4\lambda - 5 = (\lambda - 1)(\lambda + 5) = 0$$

donc les solutions sont  $y_n = A \cdot 1^n + B (-5)^n$   
où  $A$  et  $B$  sont déterminés par la donnée de  
 $y_0$  et  $y_1$ .

$$\begin{cases} A + B = y_0 \\ A - 5B = y_1 \end{cases} \quad \begin{aligned} B &= \frac{y_0 - y_1}{6} \\ A &= \frac{5}{6} y_0 + \frac{1}{6} y_1 \end{aligned}$$

$$y_m = \left(\frac{5}{6}y_0 + \frac{1}{6}y_1\right) + \left(\frac{y_0 - y_1}{6}\right) \cdot (-5)^m$$

le terme  $(-5)^m$  n'est pas borné quand  $m \rightarrow +\infty$

Si au cours du calcul 2 termes consécutifs ne sont pas égaux à une précision infinie, si par exemple  $y_0 - y_1 = \text{eps}$  (précision machine)

alors le facteur  $(-5)^m$  va amplifier cette quantité, aussi minime soit elle, et au bout de quelques dizaines d'itérations  $y_m \sim \frac{\text{eps}}{6} \cdot (-5)^m$  sera non borné.

Comme la solution exacte de  $y' = 0$  est évidemment  $y = \text{constante}$  le schéma donne des erreurs de plus en plus grandes et ne converge pas.

### EX 3

(a) on se donne 3 noeuds d'interpolation donc le polynôme  $q(t)$  est de degré  $\leq 2$ .

Exprimons ce polynôme par la méthode de Newton.

$$q(t) = y(t_0) + (t-t_0)y[t_0, t_1] + (t-t_0)(t-t_1)y[t_0, t_1, t_2]$$

$$\text{où } y[t_0, t_1] = \frac{y(t_1) - y(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{y_1 - y_0}{h}$$

$$y[t_0, t_1, t_2] = \frac{y[t_1, t_2] - y[t_0, t_1]}{t_2 - t_0} = \frac{\frac{y_2 - y_1}{h} - \frac{y_1 - y_0}{h}}{2h} = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2}$$

Ex Si vous n'êtes pas familiers avec les "différences divisées" de Newton, vous pouvez aussi utiliser l'interpolation de Lagrange.

$$\text{Ainsi } q(t) = y_0 + (t-t_0) \frac{(y_1 - y_0)}{h} + (t-t_0)(t-t_1) \frac{(y_2 - 2y_1 + y_0)}{2h^2}$$

(b) dérivons  $\frac{\partial}{\partial t}$  le polynôme  $q(t)$

$$q'(t) = \frac{y_1 - y_0}{h} + ((t-t_1) + (t-t_0)) \left( \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2} \right)$$

faisons  $t := t_2$

$$q'(t_2) = \frac{y_1 - y_0}{h} + (3h) \left( \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2} \right)$$

$$q'(t_2) = \frac{3/2 y_2 - 2y_1 + 1/2 y_0}{h} \quad \square$$

(c) par définition du schéma de différentiation rétrograde on approxime

$y'(t_{n+1})$  par  $q'(t_{n+1})$  où  $q(t)$  polynôme d'interpolation de  $y(t)$  aux 3 nœuds  $t_{n+1}, t_n, t_{n-1}$ .

D'après la formule obtenue en (b)

$$q'(t_{n+1}) = \frac{3/2 y_{n+1} - 2y_n + 1/2 y_{n-1}}{h}$$

donc en remplaçant dans  $y'(t_{n+1}) = f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$

on obtient bien  $\boxed{\frac{3}{2} y_{n+1} - 2y_n + \frac{1}{2} y_{n-1} = h f(t_{n+1}, y_{n+1})}$



(d) soit  $\varphi: y \mapsto \frac{2}{3} \left( 2y_m - \frac{1}{2}y_{m-1} + h f(t_{m+1}, y) \right)$

$$\varphi(y) - \varphi(z) = \frac{2h}{3} \left( f(t_{m+1}, y) - f(t_{m+1}, z) \right)$$

$$|\varphi(y) - \varphi(z)| \leq \frac{2hL}{3} |y - z| \text{ car } f(t_{m+1}, \cdot) \text{ Lipschitz}$$

pour  $h$  suffisamment petit  $0 < \frac{2hL}{3} < 1$

donc  $\varphi$  est contractante sur  $\mathbb{R}$  et admet un unique point fixe, obtenu comme limite de la suite des itérées.

Pour calculer  $y_{m+1}$  on calcule quelques itérations à partir de la valeur initiale  $y_m$ .

$$y_{m+1}^{(1)} = \varphi(y_m) \quad y_{m+1}^{(2)} = \varphi(y_{m+1}^{(1)}) \dots$$

comme de toute façon on a un schéma explicite quelques itérations suffisent.

(e) soit la suite récurrente :

$$\frac{3}{2} y_{m+1} - 2y_m + \frac{1}{2} y_{m-1} = 0$$

D'après le cours elle est bornée si les racines de l'équation caractéristique

$\frac{3}{2} \lambda^2 - 2\lambda + \frac{1}{2}$  sont de module  $\leq 1$  et que les racines de module 1 sont de multiplicité 1.

$$\text{ici } \frac{3}{2} \lambda^2 - 2\lambda + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} (\lambda - 1) \left( \lambda - \frac{1}{3} \right)$$

les racines sont 1 (racine simple) et  $\frac{1}{3}$  donc la condition de stabilité est vérifiée.

(f) exprimons l'erreur de consistance

$$\varepsilon(h) := \frac{3}{2} y(t_n+h) - 2y(t_n) + \frac{1}{2} y(t_n-h) - h f(t_n+h, y(t_n+h))$$

$$\varepsilon(h) := \frac{3}{2} y(t_n+h) - 2y(t_n) + \frac{1}{2} y(t_n-h) - h y'(t_n+h)$$

effectuons des développements de Taylor autour de  $t_n$ :

$$y(t_n+h) = y(t_n) + h y'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n) + O(h^3)$$

$$y(t_n-h) = y(t_n) - h y'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n) + O(h^3)$$

$$y'(t_n+h) = y'(t_n) + h y''(t_n) + O(h^2)$$

portons les dans  $\varepsilon(h)$

$$\varepsilon(h) := \frac{3}{2} (y(t_n) + h y' + \frac{h^2}{2} y'') - 2y(t_n) +$$

$$\frac{1}{2} (y(t_n) - h y' + \frac{h^2}{2} y'') - h (y'(t_n) + h y''(t_n)) + O(h^3)$$

$\varepsilon(h) = O(h^3)$  qui est bien  $o(h)$  donc le schéma est consistant  
L'erreur de consistance est  $O(h^3)$ .

(g) Le schéma est stable d'après (e)

il est consistant d'après (f)

D'après le théorème de convergence des schémas numériques  
il est donc convergent.

Comme l'erreur de consistance est  $O(h^3)$

Le schéma est d'ordre 2.

(D'où son nom BDF<sub>2</sub>)

Ex 4

l'équation différentielle s'écrit

$$y' = -\frac{1}{\varepsilon} y + \frac{1}{\varepsilon} \cos t$$

c'est une équation linéaire.

l'équation homogène a les solutions  $\lambda e^{-t/\varepsilon}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$   
cherchant une solution particulière sous forme

$a \cos t + b \sin t$  on trouve par identification

$$a = \frac{1}{1+\varepsilon^2}, \quad b = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2}$$

Ainsi la solution générale est :

$$y(t) = \lambda e^{-t/\varepsilon} + \frac{\cos t}{1+\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon \sin t}{1+\varepsilon^2}$$

Avec la condition initiale  $y(0) = 0$

$$y(t) = -\frac{1}{1+\varepsilon^2} e^{-t/\varepsilon} + \frac{\cos t}{1+\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon \sin t}{1+\varepsilon^2}$$

Comme  $\varepsilon \ll 1$   $\frac{1}{1+\varepsilon^2} = 1 + O(\varepsilon^2)$  donc

$$y(t) = -e^{-t/\varepsilon} + \cos t + \varepsilon \sin t + O(\varepsilon^2) \quad \square$$

(a)  $y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n)$  (schéma d'Euler)

ici la fonction  $f(t, y) = -\frac{1}{\varepsilon} y + \frac{1}{\varepsilon} \cos t$

$$\text{donc } y_{n+1} = y_n + h \left( -\frac{1}{\varepsilon} y_n + \frac{1}{\varepsilon} \cos(t_n) \right)$$

$$= \left( 1 - \frac{h}{\varepsilon} \right) y_n + \frac{h}{\varepsilon} \cos(t_n). \quad \square$$

(b) pour résoudre l'équation (a) on s'inspire de la démarche pour l'équation différentielle.

on résout l'équation "homogène"

$$z_{n+1} = \left( 1 - \frac{h}{\varepsilon} \right) z_n \quad \text{qui est une suite géométrique}$$

$$z_n = \left( 1 - \frac{h}{\varepsilon} \right)^n \cdot C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Ensuite on cherche une solution particulière sous forme  $y_m = A \cos tm + B \sin tm$

$$y_{m+h} = A \cos(t_{m+h}) + B \sin(t_{m+h}) = A \cos(t_m + h) + B \sin(t_m + h) \\ = (A \cosh h + B \sinh h) \cos tm + (B \cosh h - A \sinh h) \sin tm$$

En identifiant avec  $y_{m+h} = (1 - \frac{h}{\varepsilon}) y_m + \frac{h}{\varepsilon} \cos tm$

On obtient un système  $2 \times 2$

$$\begin{cases} A \cosh h + B \sinh h = A(1 - \frac{h}{\varepsilon}) + \frac{h}{\varepsilon} \\ -A \sinh h + B \cosh h = B(1 - \frac{h}{\varepsilon}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A(\cosh h - (1 - \frac{h}{\varepsilon})) + B \sinh h = \frac{h}{\varepsilon} \\ -A \sinh h + B(\cosh h - (1 - \frac{h}{\varepsilon})) = 0 \end{cases}$$

le déterminant est  $D = [\cosh h - (1 - \frac{h}{\varepsilon})]^2 + \sinh^2 h > 0$

donc on peut déterminer  $A, B$ .

En utilisant que  $\cosh h = 1 + \frac{h^2}{2} + O(h^4)$ ,  $\sinh h = h + O(h^3)$

on calcule

$$D = \left(\frac{h}{\varepsilon}\right)^2 + O\left(\frac{h^3}{\varepsilon}\right) = \frac{h^2}{\varepsilon^2} (1 + O(h\varepsilon))$$

$$A = \frac{\begin{vmatrix} \frac{h}{\varepsilon} \sinh h & \\ 0 & \cosh h - (1 - \frac{h}{\varepsilon}) \end{vmatrix}}{D} = \dots = 1 + O(h\varepsilon)$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} \cosh h - (1 - \frac{h}{\varepsilon}) & \frac{h}{\varepsilon} \\ -\sinh h & 0 \end{vmatrix}}{D} = \frac{\frac{h}{\varepsilon} \sinh h}{D} = \dots = \varepsilon + O(h\varepsilon^2)$$

Ainsi la solution générale de (a) est donnée par:

$$y_m = C \left(1 - \frac{h}{\varepsilon}\right)^m + A \cos tm + B \sin tm$$

$$y_m = C \left(1 - \frac{h}{\varepsilon}\right)^m + \cos t_m + \varepsilon \sin t_m + O(h\varepsilon)$$

on veut  $y_0 = 0$  donc  $C = -1$

$$y_m = - \left(1 - \frac{h}{\varepsilon}\right)^m + \cos t_m + \varepsilon \sin t_m + O(h\varepsilon)$$

(c) la solution numérique est bornée

ssi  $\left(1 - \frac{h}{\varepsilon}\right)^m$  est bornée  
cela est le cas ssi

$$-1 < 1 - \frac{h}{\varepsilon} < 1$$

$$\Leftrightarrow 0 < h < 2\varepsilon$$

(d) le schéma d'Euler implicite s'écrit:

$$y_{m+1} = y_m + h f(t_{m+1}, y_{m+1}) \text{ donne}$$

$$y_{m+1} = y_m + h \left( -\frac{1}{\varepsilon} y_{m+1} + \frac{1}{\varepsilon} \cos t_{m+1} \right)$$

$$\left(1 + \frac{h}{\varepsilon}\right) y_{m+1} = y_m + \frac{h}{\varepsilon} \cos(t_{m+1}) \quad \square$$

On commence par résoudre l'équation "homogène"

$$\left(1 + \frac{h}{\varepsilon}\right) z_{n+1} = z_n \text{ qui est une suite géométrique}$$

$$z_n = C \left(1 + \frac{h}{\varepsilon}\right)^{-n}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

En cherchant une sol. part. sous forme  $A \cos t_n + B \sin t_n$   
on trouve :

$$y_n = C \left(1 + \frac{h}{\varepsilon}\right)^{-n} + \cos t_n + \varepsilon \sin t_n + O(h\varepsilon)$$

Maintenant  $y_n$  est bornée ssi  $\left(1 + \frac{h}{\varepsilon}\right)^{-n}$  est bornée

$$\Leftrightarrow -1 < \frac{1}{1 + \frac{h}{\varepsilon}} < 1, \text{ comme } h > 0, \text{ cela}$$

est toujours vérifié,  $\forall h > 0$

(e) Sur la figure en haut, pour  $h = \frac{1.975}{50}$

on voit que la solution numérique oscille fortement avant de converger très lentement.

pour  $h = \frac{1.875}{50}$  les oscillations sont moins fortes et la convergence semble plus rapide.

Sur la figure en dessous, pour  $h = \frac{2.1}{50}$  la solution numérique calculée avec le schéma d'Euler explicite diverge.

cela confirme le résultat de la question (c)

$\varepsilon = \frac{1}{50}$ , si  $h > 2\varepsilon$  le schéma donne une solution non bornée.

pour  $h < 2\varepsilon$ , les oscillations s'estompent, la solution est bornée.

Sur la figure avec Euler implicite, il n'y a pas d'oscillation parasite, la solution est bornée même pour  $h > 2\varepsilon$ .

On remarque tout de même un écart entre la solution numérique et la solution exacte pour  $t$  petit.

la solution exacte =  $-e^{-t/\varepsilon} + \cos t + \varepsilon \sin t + O(\varepsilon^2)$

comprend une solution transitoire  $e^{-t/\varepsilon} = e^{-50t}$  qui tend très vite vers 0.

le schéma d'Euler implicite est d'ordre 1 il n'est pas assez précis pour capturer cette variation brusque entre 0 et 1

Le dernier schéma des trapèzes implicites est d'ordre 2 et il semble capturer la phase transitoire pour  $\epsilon$  petit et bien approcher la solution exacte sans restriction sur le pas  $h$ .

L'équation  $y' = -\frac{1}{\epsilon}y + \frac{1}{\epsilon}\cos t$  possède une solution qui varie brusquement le schéma d'Euler explicite exige de choisir un pas  $h$  très petit, sinon il est instable.

Les schémas implicites donnent des résultats corrects, sans restriction sur le pas de temps. Ils sont d'autant plus précis qu'ils sont d'ordre élevé.

Rq la fonction  $f(t,y) = -\frac{1}{\epsilon}y + \frac{1}{\epsilon}\cos t$  est lipschitz en  $y$  mais la constante de Lipschitz  $L = 1/\epsilon \gg 1$ , c'est ce qui rend difficile la convergence des schémas explicites et contraint à prendre  $h$  très petit. On dit que l'équation différentielle est RAIDE.



$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6} \left( f(t_0, y_0) + 2f\left(t_0 + \frac{h}{2}, u_2\right) + 2f\left(t_0 + \frac{h}{2}, u_3\right) + f(t_0 + h, u_4) \right)$$

où

$$u_2 = y_0 + \frac{h}{2} f(t_0, y_0)$$

$$u_3 = y_0 + \frac{h}{2} f\left(t_0 + \frac{h}{2}, u_2\right)$$

$$u_4 = y_0 + h f\left(t_0 + \frac{h}{2}, u_3\right)$$

Pour simplifier les calculs on suppose que l'équation est autonome.

$y' = g(y)$ . on a ainsi  $y_1 = y_0 + \frac{h}{6} (g(y_0) + 2g(u_2) + 2g(u_3) + g(u_4))$

Par définition l'erreur de consistance du schéma est :

$$\varepsilon(h) = y(t_0 + h) - y_1$$

On va développer  $y(t_0 + h) \approx$  l'ordre 4 : (on suppose  $y(t) \in C^5$ )

$$y(t_0 + h) = y_0 + h y'(t_0) + \frac{h^2}{2} y''(t_0) + \frac{h^3}{6} y'''(t_0) + \frac{h^4}{24} y^{(4)}(t_0) + O(h^5)$$

On calcule les dérivées successives à l'aide de l'équation différentielle :

$$y' = g(y)$$

$$y'' = g'(y) y' = g'(y) g(y)$$

$$y''' = g''(y) g(y)^2 + g'(y)^2 g(y)$$

$$y^{(4)} = g'''(y) g^3(y) + 2g''(y) g(y) g'(y) y'$$

$$+ 2g'(y) g''(y) y' g(y) + g'(y)^2 g'(y) y'$$

$$y^{(4)} = g'''(y) g^3(y) + 4g''(y) g'(y) g^2(y) + g'(y)^3 g(y)$$

Pour alléger les notations on note  $g_0 = g(y_0), g'_0 = g'(y_0)$

$$g''_0 = g''(y_0) \quad g'''_0 = g'''(y_0)$$

En portant dans la formule de Taylor :

$$y(t_0 + h) = y_0 + h g_0 + \frac{h^2}{2} g'_0 g_0 + \frac{h^3}{6} (g''_0 g_0^2 + g_0'^2 g_0) + \frac{h^4}{24} (g'''_0 g_0^3 + 4g''_0 g'_0 g_0^2 + g_0'^3 g_0) + O(h^5)$$



il faut maintenant développer à l'ordre 4  $y_1$ .

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6} (g(y_0) + 2g(u_2) + 2g(u_3) + g(u_4))$$

il suffit de développer à l'ordre 3  $g(u_2)$ ,  $g(u_3)$  et  $g(u_4)$ .

$$u_2 = y_0 + \frac{h}{2} g(y_0) = y_0 + \frac{h}{2} g_0.$$

$$g(u_2) = g(y_0) + \frac{h}{2} g_0 g'(y_0) + \frac{\left(\frac{h}{2} g_0\right)^2}{2} g''(y_0) + \frac{\left(\frac{h}{2} g_0\right)^3}{6} g'''(y_0) + O(h^4)$$

$$g(u_2) = g_0 + \frac{h}{2} g_0 g'_0 + \frac{h^2}{8} g_0^2 g''_0 + \frac{h^3}{48} g_0^3 g'''_0 + O(h^4)$$

$$u_3 = y_0 + \frac{h}{2} g(u_2) \text{ donc}$$

$$g(u_3) = g(y_0) + \frac{h}{2} g(u_2) g'(y_0) + \frac{h^2}{8} g(u_2)^2 g''(y_0) + \frac{h^3}{48} g(u_2)^3 g'''(y_0) + O(h^4)$$

il suffit de garder seulement les termes de degré  $\leq 3$

$$g(u_3) = g_0 + \frac{h}{2} g'_0 \left( g_0 + \frac{h}{2} g_0 g'_0 + \frac{h^2}{8} g_0^2 g''_0 \right) + \frac{h^2}{8} g''_0 \left( g_0 + \frac{h}{2} g_0 g'_0 \right)^2 + \frac{h^3}{48} g'''_0 (g_0)^3$$

$$g(u_3) = g_0 + \frac{h}{2} g'_0 g_0 + \frac{h^2}{4} (g_0 g_0'^2 + \frac{1}{2} g''_0 g_0^2) + \frac{h^3}{16} \left( 3g''_0 g'_0 g_0^2 + \frac{1}{3} g'''_0 g_0^3 \right) + O(h^4)$$

$$\text{Enfin } u_4 = y_0 + h g(u_3) \text{ donc}$$

$$g(u_4) = g(y_0) + h g(u_3) g'(y_0) + \frac{h^2}{2} g(u_3)^2 g''(y_0) + \frac{h^3}{6} g(u_3)^3 g'''(y_0) + O(h^4)$$

là encore il convient de ne conserver que les termes de degré  $\leq 3$ .

$$g(u_4) = g_0 + h g'_0 \left( g_0 + \frac{h}{2} g'_0 g_0 + \frac{h^2}{4} (g_0 g_0'^2 + \frac{1}{2} g''_0 g_0^2) \right) + \frac{h^2}{2} g''_0 \left( g_0 + \frac{h}{2} g'_0 g_0 \right)^2 + \frac{h^3}{6} g'''_0 (g_0)^3$$

$$g(u_4) = g_0 + h g'_0 g_0 + \frac{h^2}{2} (g_0 g_0'^2 + g''_0 g_0^2) + \frac{h^3}{4} \left( g_0'^3 g_0 + \frac{5}{2} g''_0 g'_0 g_0^2 + \frac{2}{3} g'''_0 g_0^3 \right) + O(h^4)$$

On peut alors exprimer  $y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(g_0 + 2g(\mu_2) + 2g(\mu_3) + g(\mu_4))$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6} \left[ g_0 + 2 \left( g_0 + \frac{h}{2} g_0 g'_0 + \frac{h^2}{8} g_0^2 g''_0 + \frac{h^3}{48} g_0^3 g'''_0 \right) \right. \\ \left. + 2 \left( g_0 + \frac{h}{2} g_0 g'_0 + \frac{h^2}{4} (g_0 g_0'^2 + \frac{1}{2} g_0'' g_0^2) + \frac{h^3}{16} (3g_0'' g_0' g_0^2 + \frac{1}{3} g_0^3 g_0''') \right) \right. \\ \left. + g_0 + h g_0' g_0 + \frac{h^2}{2} (g_0 g_0'^2 + g_0'' g_0^2) + \frac{h^3}{4} (g_0'^3 g_0 + \frac{5}{2} g_0'' g_0' g_0^2 + \frac{2}{3} g_0^3 g_0''') \right] \\ + O(h^5)$$

En ordonnant suivant les puissances de  $h$ :

$$y_1 = y_0 + h g_0 + \frac{h^2}{2} g_0 g'_0 + \frac{h^3}{6} \left[ \frac{1}{4} g_0^2 g_0'' + \frac{1}{4} g_0^2 g_0'' + \frac{1}{2} g_0 g_0'^2 + \frac{1}{2} g_0 g_0'^2 + \frac{1}{2} g_0'' g_0^2 \right] \\ + \frac{h^4}{24} \left[ \frac{1}{6} g_0^3 g_0''' + \frac{3}{2} g_0'' g_0' g_0^2 + \frac{1}{6} g_0^3 g_0''' + g_0'^3 g_0 + \frac{5}{2} g_0'' g_0' g_0^2 + \frac{2}{3} g_0^3 g_0''' \right] \\ + O(h^5)$$

$$y_1 = y_0 + h g_0 + \frac{h^2}{2} g_0 g'_0 + \frac{h^3}{6} (g_0^2 g_0'' + g_0 g_0'^2) + \frac{h^4}{24} (g_0^3 g_0''' + 4g_0^2 g_0' g_0'' + g_0'^3 g_0) \\ + O(h^5)$$

On trouve bien  $y_1 = y(t_0 + h) + O(h^5)$  ▣