Module HAX201X
Année 2021/2022

Correction des exercices « ♠ » de la feuille 1

Exercice 9

On considère les suites de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$. Comme $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, la suite (u_n) est croissante. D'autre part

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n.n!} \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+1)!}\left(n+2-(n+1)^2\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+1)!}(-n^2-n+1) \leq 0, \quad \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

La suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est décroissante. Comme $\lim_{n\to\infty} u_n - v_n = 0$, on peut conclure que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes : ainsi elles convergent vers une même limite e.

Comme les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont strictement monotones, on a

$$u_n < e < v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}, \quad \forall n \geq 1.$$

Cela montre que $n!(e-u_n) \in]0, \frac{1}{n}[$, $\forall n \geq 1$.

On remarque que $n!u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}$ est un nombre entier. Supposons que e soit rationnel : $e = \frac{p}{q}$ avec $p, q \geq 1$. Alors pour tout $n \geq q$, le nombre $n!e = p\frac{n!}{q}$ est entier car q divise $n!$. Alors, pour tout $n \geq q$, $n!(e-u_n)$ serait un nombre entier contenu dans l'intervalle $]0, 1[$. C'est contradictoire.

On a montré que e est un nombre irrationnel.

Exercice 10

Soient $0 \leq u_0 \leq v_0$ deux réels. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par les récurrences suivantes : $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Un calcul direct donne

$$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} &= \frac{u_n+v_n}{2} - \sqrt{u_n v_n} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{v_n}^2 + \sqrt{u_n}^2 - 2\sqrt{u_n}\sqrt{v_n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\right)^2 \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Comme $v_0 \geq u_0$ par hypothèse, on a montré $v_n \geq u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Cela entraine que

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \geq u_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \leq v_n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (u_n) est croissante tandis que la suite (v_n) est décroissante.

La relation $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{v_n-u_n}{2}$ est équivalente à

$$(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n})^2 \leq v_n - u_n = (\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n})(\sqrt{v_n} + \sqrt{u_n})$$

Comme $\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n} \geq 0$ cette dernière inégalité est équivalente à $\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n} \leq \sqrt{v_n} + \sqrt{u_n}$, une inégalité qui est évidemment vérifiée.

Les relations $0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{v_n - u_n}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ entrainent que

$$|v_n - u_n| \leq \frac{|v_0 - u_0|}{2^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi $\lim_{n\to\infty} v_n - u_n = 0$

Conclusion : les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Elles convergent donc vers une limite commune.

Exercice 11

Supposons que la suite (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$, tel que $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{3}$ si $n \geq N$. Si $p \geq N$ et $q \geq N$, alors $|u_p - u_q| \leq |u_p - \ell| + |u_q - \ell| \leq \frac{2}{3}$. Comme $u_n \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, la relation $|u_p - u_q| \leq \frac{2}{3}$ implique que $u_p = u_q$. On a donc montré que la suite est constante à partir du rang N : $u_n = \ell \in \mathbb{Z}$, $\forall n \geq N$.

Exercice 12

Soient $a \geq 1$ et $b \geq 1$ des périodes respectives des suites (u_n) et (v_n) : $u_{k+a} = u_k$ et $v_{k+b} = v_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. On remarque alors que pa est une période de (u_n) pour tout $p \geq 1$, et que qb est une période de (v_n) pour tout $q \geq 1$. Ainsi ab est à la fois une période pour (u_n) et pour (v_n). On voit donc que ab est une période de la suite $(u_n + v_n)$.