Université de Montpellier
Faculté des Sciences
Mathématiques et Mécanique

Année Universitaire 2024-2025

TD 2

1. Schéma de Heun.

   (a) Montrer que la quadrature de Gauss-Radau

   $$\int_0^1 g(x)\,dx \approx 1/4 \cdot g(0) + 3/4 \cdot g(2/3)$$

   est exacte pour tout g polynôme de degré inférieur ou égal à deux.

   (b) Soit l'équation différentielle *autonome* : $y' = f\,(y)$ avec la fonction f (qui ne dépend que de y) supposée de classe $\mathcal{C}^\infty$. On définit le schéma de Heun de la manière suivante :

   $$\begin{array}{rcccl} u_2 & = & y_0 & + & (\frac{h}{3}) \cdot f(y_0) \\ u_3 & = & y_0 & + & (\frac{2h}{3}) \cdot f(u_2) \\ y_1 & = & y_0 & + & h \cdot \left(\frac{1}{4} f(y_0) + \frac{3}{4} f(u_3)\right) \end{array}$$

   Montrer que l'erreur de consistance du schéma $y(t_0 + h) - y_1$ est en $\mathcal{O}(h^4)$.
   Indication : Montrer que $y'' = f'(y) \cdot f(y)$ et que $y''' = f''(y) \cdot (f(y))^2 + (f'(y))^2 \cdot f(y)$.

   (c) Soit $t_n = n\,h,\ 0 \le n \le N = T/h$ où $h > 0$ est le pas de temps constant. On note y_n la suite obtenue en appliquant le schéma de Heun à chaque pas de temps. Donner l'ordre de l'erreur globale $y(t_n) - y_n$ en fonction de h.

2. ($\star$) Calcul de l'erreur de consistance du schéma de Runge-Kutta 4. Pour simplifier les calculs on suppose que l'équation différentielle est autonome : $y' = g(y), \quad y(t_0) = y_0$. Avec les notations habituelles, le schéma RK4 s'écrit ainsi :

   $$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}\left(g(y_0) + 2g(u_2) + 2g(u_3) + g(u_4)\right)$$

   où

   $$\begin{array}{rcccl} u_2 & = & y_0 & + & (\frac{h}{2})\, g(y_0) \\ u_3 & = & y_0 & + & (\frac{h}{2})\, g(u_2) \\ u_4 & = & y_0 & + & h\, g(u_3) \end{array}$$

   On montrera que $\epsilon(h) = y(t_0 + h) - y_1$ est en $\mathcal{O}(h^5)$. *Attention les calculs demandent de l'organisation. Il faut veiller à ne conserver que les termes nécessaires dans les développements.*

3. Exemple de schéma *multipas* instable.

   (a) Montrer que la méthode multipas, où on note $t_j = t_0 + jh$, $j \in \mathbb{N}$:

   $$\mathbf{y}_{j+2} + 4\mathbf{y}_{j+1} - 5\mathbf{y}_j = h(4\mathbf{f}(t_{j+1}, \mathbf{y}_{j+1}) + 2\mathbf{f}(t_j, \mathbf{y}_j))$$

   admet une erreur de consistance en $O(h^4)$

   (b) Calculer la suite y_n en fonction de y_0 et y_1 dans le cas où $f \equiv 0$, qui correspond à l'équation différentielle $y' = 0$. Que constatez-vous si $y_1 - y_0$ est très petit mais non nul ? On dit que le schéma est *instable.*

4. Schéma BDF2 (d'après examen janvier 2016)

(a) Soit $h > 0$ et $t_0 \in \mathbb{R}$. On définit $t_1 = t_0 + h$ et $t_2 = t_0 + 2h$ et on se donne 3 valeurs réelles y_0, y_1, y_2. Soit le polynôme d'interpolation $q(t)$ qui vérifie $q(t_i) = y_i,\ i \in \{0, 1, 2\}$. Quel est le degré de $q(t)$?
Exprimez le polynôme q en fonction de t_0, y_0, y_1, y_2 et h, en utilisant la méthode de votre choix.

(b) A l'aide de l'expression calculée précédemment montrer que

$$q'(t_2) = \frac{\frac{3}{2}y_2 - 2y_1 + \frac{1}{2}y_0}{h}$$

Vous pouvez faire la suite de l'exercice même si vous n'avez pas calculé correctement q.

(c) Soit l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$. On note $t_n = n \cdot h$ où $n \in \mathbb{N}$.
Le schéma BDF2 (backward differentiation second order) est donné par

$$\frac{3}{2}y_{n+1} - 2y_n + \frac{1}{2}y_{n-1} = hf(t_{n+1}, y_{n+1})$$

C'est un schéma multipas *implicite* qui permet de calculer y_{n+1} étant donnés y_n et y_{n-1}. Utiliser la question précédente pour expliquer les coefficients du schéma.

(d) On fixe y_n et y_{n-1}. On suppose que $y \mapsto f(t, y)$ est lipschitzienne de rapport L. Montrer que, pour h suffisamment petit, l'application

$$\varphi : y \mapsto \frac{2}{3}\left(2y_n - \frac{1}{2}y_{n-1} + hf(t_{n+1}, y)\right)$$

est contractante. Quelle méthode proposez vous alors pour calculer y_{n+1} solution de

$$\frac{3}{2}y_{n+1} - 2y_n + \frac{1}{2}y_{n-1} = hf(t_{n+1}, y_{n+1}).$$

(e) On suppose que $f = 0$. Soit y_n la suite vérifiant

$$\frac{3}{2}y_{n+1} - 2y_n + \frac{1}{2}y_{n-1} = 0$$

Montrer que y_n reste bornée (pour cela étudier la suite récurrente à l'aide de l'équation caractéristique.) On dit que le schéma est stable.

(f) Montrer que le schéma est consistant et donner l'ordre de grandeur de l'erreur de consistance, en supposant que f est régulière.

(g) Est-ce que le schéma est convergent ? Quel est l'ordre de l'erreur globale $y_n - y(t_n)$?

5. Exemple d'équations différentielle *raide*.
On a appliqué à l'équation différentielle $\epsilon\, y'(t) = -(y(t) - \cos(t))$, $y(0) = 0$, la méthode d'Euler (explicite), la méthode d'Euler implicite $y_{n+1} = y_n + h_n f(t_{n+1}, y_{n+1})$ et la règle du trapèze implicite ou schéma de Crank-Nicolson

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h_n}{2}(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})).$$

En cherchant une solution particulière sous forme $a\cos(t) + b\sin(t)$, calculer la solution exacte.
Réponse : $y(t) = \exp(-t/\epsilon)C + \cos(t) + \epsilon\ \sin(t) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$.

(a) Montrer que le schéma d'Euler explicite avec un pas de temps constant $h > 0$ donne avec $t_n = n\,h$

$$y_{n+1} = (1 - h/\epsilon)\, y_n + (h/\epsilon) \cos(t_n).$$

(b) En déduire que $y_n = (1 - h/\epsilon)^n\, C + \cos(t_n) + \epsilon\, \sin(t_n) + \mathcal{O}(h\,\epsilon)$.

(c) En déduire que la solution numérique est bornée ssi $h < 2\epsilon$.

(d) Montrer que le schéma d'Euler *implicite* avec des pas constants donne avec $t_n = n\,h$

$$(1 + h/\epsilon)\, y_{n+1} = y_n + (h/\epsilon) \cos(t_{n+1})$$

dont la solution peut être écrite sous la forme

$$y_n = (1 + h/\epsilon)^{-n}\, C + \cos(t_n) + \epsilon\, \sin(t_n) + \mathcal{O}(h\,\epsilon)$$

Montrer que y_n reste bornée quel que soit le pas h.

(e) Commenter les résultats calculés numériquement pour $\epsilon = 1/50$ dans la figure jointe.