

TD 2

1. Schéma de Heun.

(a) Montrer que la quadrature de Gauss-Radau

$$\int_0^1 g(x) dx \approx 1/4 \cdot g(0) + 3/4 \cdot g(2/3)$$

est exacte pour tout  $g$  polynôme de degré inférieur ou égal à deux.

(b) Soit l'équation différentielle *autonome* :  $y' = f(y)$  avec la fonction  $f$  (qui ne dépend que de  $y$ ) supposée de classe  $C^\infty$ . On définit le schéma de Heun de la manière suivante :

$$\begin{aligned} u_2 &= y_0 + \left(\frac{h}{3}\right) \cdot f(y_0) \\ u_3 &= y_0 + \left(\frac{2h}{3}\right) \cdot f(u_2) \\ y_1 &= y_0 + h \cdot \left(\frac{1}{4}f(y_0) + \frac{3}{4}f(u_3)\right) \end{aligned}$$

Montrer que l'erreur de consistance du schéma  $y(t_0 + h) - y_1$  est en  $\mathcal{O}(h^4)$ .

Indication : Montrer que  $y'' = f'(y) \cdot f(y)$  et que  $y''' = f''(y) \cdot (f(y))^2 + (f'(y))^2 \cdot f(y)$ .

(c) Soit  $t_n = nh$ ,  $0 \leq n \leq N = T/h$  où  $h > 0$  est le pas de temps constant. On note  $y_n$  la suite obtenue en appliquant le schéma de Heun à chaque pas de temps. Donner l'ordre de l'erreur globale  $y(t_n) - y_n$  en fonction de  $h$ .

2. (★) Calcul de l'erreur de consistance du schéma de Runge-Kutta 4. Pour simplifier les calculs on suppose que l'équation différentielle est autonome :  $y' = g(y)$ ,  $y(t_0) = y_0$ . Avec les notations habituelles, le schéma RK4 s'écrit ainsi :

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6} (g(y_0) + 2g(u_2) + 2g(u_3) + g(u_4))$$

où

$$\begin{aligned} u_2 &= y_0 + \left(\frac{h}{2}\right) g(y_0) \\ u_3 &= y_0 + \left(\frac{h}{2}\right) g(u_2) \\ u_4 &= y_0 + h g(u_3) \end{aligned}$$

On montrera que  $\epsilon(h) = y(t_0 + h) - y_1$  est en  $\mathcal{O}(h^5)$ . *Attention les calculs demandent de l'organisation. Il faut veiller à ne conserver que les termes nécessaires dans les développements.*

3. Exemple de schéma *multipas* instable.

(a) Montrer que la méthode *multipas*, où on note  $t_j = t_0 + jh$ ,  $j \in \mathbb{N}$  :

$$\mathbf{y}_{j+2} + 4\mathbf{y}_{j+1} - 5\mathbf{y}_j = h(4\mathbf{f}(t_{j+1}, \mathbf{y}_{j+1}) + 2\mathbf{f}(t_j, \mathbf{y}_j))$$

admet une erreur de consistance en  $\mathcal{O}(h^4)$

(b) Calculer la suite  $y_n$  en fonction de  $y_0$  et  $y_1$  dans le cas où  $f \equiv 0$ , qui correspond à l'équation différentielle  $y' = 0$ . Que constatez-vous si  $y_1 - y_0$  est très petit mais non nul? On dit que le schéma est *instable*.

4. Schéma BDF2 (d'après examen janvier 2016)

(a) Soit  $h > 0$  et  $t_0 \in \mathbb{R}$ . On définit  $t_1 = t_0 + h$  et  $t_2 = t_0 + 2h$  et on se donne 3 valeurs réelles  $y_0, y_1, y_2$ . Soit le polynôme d'interpolation  $q(t)$  qui vérifie  $q(t_i) = y_i$ ,  $i \in \{0, 1, 2\}$ . Quel est le degré de  $q(t)$ ? Exprimez le polynôme  $q$  en fonction de  $t_0, y_0, y_1, y_2$  et  $h$ , en utilisant la méthode de votre choix.

(b) A l'aide de l'expression calculée précédemment montrer que

$$q'(t_2) = \frac{\frac{3}{2}y_2 - 2y_1 + \frac{1}{2}y_0}{h}$$

*Vous pouvez faire la suite de l'exercice même si vous n'avez pas calculé correctement  $q$ .*

(c) Soit l'équation différentielle  $y'(t) = f(t, y(t))$ . On note  $t_n = n \cdot h$  où  $n \in \mathbb{N}$ .

Le schéma BDF2 (backward differentiation second order) est donné par

$$\frac{3}{2}y_{n+1} - 2y_n + \frac{1}{2}y_{n-1} = hf(t_{n+1}, y_{n+1})$$

C'est un schéma multipas *implicite* qui permet de calculer  $y_{n+1}$  étant donnés  $y_n$  et  $y_{n-1}$ . Utiliser la question précédente pour expliquer les coefficients du schéma.

(d) On fixe  $y_n$  et  $y_{n-1}$ . On suppose que  $y \mapsto f(t, y)$  est lipschitzienne de rapport  $L$ . Montrer que, pour  $h$  suffisamment petit, l'application

$$\varphi : y \mapsto \frac{2}{3} \left( 2y_n - \frac{1}{2}y_{n-1} + hf(t_{n+1}, y) \right)$$

est contractante. Quelle méthode proposez vous alors pour calculer  $y_{n+1}$  solution de

$$\frac{3}{2}y_{n+1} - 2y_n + \frac{1}{2}y_{n-1} = hf(t_{n+1}, y_{n+1}).$$

(e) On suppose que  $f = 0$ . Soit  $y_n$  la suite vérifiant

$$\frac{3}{2}y_{n+1} - 2y_n + \frac{1}{2}y_{n-1} = 0$$

Montrer que  $y_n$  reste bornée ( pour cela étudier la suite récurrente à l'aide de l'équation caractéristique.) On dit que le schéma est stable.

(f) Montrer que le schéma est consistant et donner l'ordre de grandeur de l'erreur de consistance, en supposant que  $f$  est régulière.

(g) Est-ce que le schéma est convergent ? Quel est l'ordre de l'erreur globale  $y_n - y(t_n)$  ?

5. Exemple d'équations différentielle *raide* et problème de couche limite.

Soit  $0 < \epsilon \ll 1$  un petit paramètre. On a appliqué à l'équation différentielle

$$\epsilon y'(t) + y(t) = \cos(t), \quad \text{avec la condition initiale } y(0) = 0,$$

la méthode d'Euler (explicite), la méthode d'Euler implicite  $y_{n+1} = y_n + h_n f(t_{n+1}, y_{n+1})$  et la règle du trapèze implicite ou schéma de Crank-Nicolson

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h_n}{2} (f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})).$$

En cherchant une solution particulière sous forme  $a \cos(t) + b \sin(t)$ , calculer la solution exacte. *Réponse* :  $y(t) = C \exp(-t/\epsilon) + \cos(t) + \epsilon \sin(t) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ .

Remarquer que pour  $t \gg \epsilon$ , on a  $y(t) \approx \cos t$ , ce qui est naturel car  $\epsilon$  étant très petit l'équation différentielle devient  $\epsilon y'(t) + y(t) = \cos(t)$ , mais comme  $\cos(t)$  ne vérifie par la condition initiale, on observe une couche limite ou régime transitoire de taille  $0(\epsilon)$  permettant de la satisfaire.

(a) Montrer que le schéma d'Euler explicite avec un pas de temps constant  $h > 0$  donne avec  $t_n = n h$

$$y_{n+1} = (1 - h/\epsilon) y_n + (h/\epsilon) \cos(t_n).$$

(b) En déduire que  $y_n = (1 - h/\epsilon)^n C + \cos(t_n) + \epsilon \sin(t_n) + \mathcal{O}(h \epsilon)$ .

(c) En déduire que la solution numérique est bornée ssi  $h < 2\epsilon$ .

(d) Montrer que le schéma d'Euler *implicite* avec des pas constants donne avec  $t_n = n h$

$$(1 + h/\epsilon) y_{n+1} = y_n + (h/\epsilon) \cos(t_{n+1})$$

dont la solution peut être écrite sous la forme

$$y_n = (1 + h/\epsilon)^{-n} C + \cos(t_n) + \epsilon \sin(t_n) + \mathcal{O}(h\epsilon)$$

Montrer que  $y_n$  reste bornée quel que soit le pas  $h$ .

(e) Commenter les résultats calculés numériquement pour  $\epsilon = 1/50$  dans la figure jointe.

