

$$1. \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (1) \\ y(0) = 1 & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(t) = y(0) + \int_0^t y'(s) ds$$

donc $y(t) = 1 + \int_0^t y'(s) ds$ avec la cond. initiale (2)

ensuite avec l'équation (1)

$$y(t) = 1 + \int_0^t f(s, y(s)) ds \quad (3)$$

donc si on note :

$$F: \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ y(\cdot) \longmapsto 1 + \int_0^\cdot f(s, y(s)) ds$$

(3) traduit exactement le fait

$$y(\cdot) = F(y(\cdot))$$

donc y est un point fixe de la fonctionnelle F .

Pour simplifier, on suppose que f est définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

On sous-entend également f continue pour que

$\int_0^t f(s, y(s)) ds$ soit définie.

Cas particulier $f(t, y) = y$

$$F(y(\cdot)) = 1 + \int_0^\cdot y(s) ds$$

Calculer les premières itérées :

$$y_1(t) = 1 + \int_0^t y_0 ds = 1 + \int_0^t 1 ds = 1 + t$$

$$y_2(t) = 1 + \int_0^t y_1(s) ds = 1 + \int_0^t (1+s) ds = 1 + t + \frac{t^2}{2}$$

$$y_3(t) = 1 + \int_0^t y_2(s) ds = 1 + \int_0^t \left(1+s+\frac{s^2}{2}\right) ds = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!}$$

On constate que l'on obtient

$$y_k(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^k}{k!}$$

qui converge vers exp la solution de l'équation différentielle $y' = y$
 $y(0) = 1$

$$2 - \begin{cases} \ddot{\theta} = -\sin \theta \\ \theta(0) = \pi/6 \\ \dot{\theta}(0) = 0 \end{cases}$$



(on reconnaît l'équation de la dynamique du pendule pesant, avec une masse 1, une longueur 1 et la gravité prise égale à 1.)

Pour mettre sous forme d'un système de premières

ordre on pose $u(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\dot{u}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}(t) \\ -\sin \theta(t) \end{pmatrix}$$

donc $\frac{du}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{du_1}{dt} \\ \frac{du_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2(t) \\ -\sin u_1(t) \end{pmatrix} = f(u(t))$

où $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(u_1, u_2) \mapsto (u_2, -\sin u_1)$

f est C^1 car \sin est C^1 donc vérifie les hypothèses du th. de Cauchy-Lipschitz

↳ le système différentiel est autonome car $f(u)$ ne dépend pas de t

Pour le schéma d'Euler, posons y_m un vecteur de \mathbb{R}^2 censé approcher $u(t_m) = (\theta(t_m), \dot{\theta}(t_m))$

Appliquons ensuite la méthode d'Euler:

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(y_n)$$

où h_n est le pas de temps

et y_n sont des valeurs supposées approchées $y(t_n)$, t_n étant la suite des instants du calcul $t_0 = 0$ $t_1 = h_0$, $t_2 = t_1 + h_1$,
 \dots $t_{n+1} = t_n + h_n$.

Nous prenons le pas de temps constant $h = 0.1$
le schéma s'écrit donc:

$$y_0 = (y(0), \dot{\theta}(0)) = \left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$$

$$y_1 = y_0 + h f(y_0)$$

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi/6 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix} \dot{\theta}(0) \\ -\sin \theta(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi/6 \\ -0.1 \sin(\pi/6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi/6 \\ -1/20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ -\sin \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi/6 \\ -1/20 \end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix} -1/20 \\ -\sin \pi/6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi/6 - 1/200 \\ -1/20 - 0.1(1/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi/6 - 1/200 \\ -1/10 \end{pmatrix}$$

θ_2 est une approximation de $\theta(2h) = \theta(0.2)$

$$\text{donc } \theta(0.2) \approx \frac{\pi}{6} - \frac{1}{200}$$

D'autre part l'équation linéarisée est

$$\ddot{\theta} = -\theta$$

dont les solutions sont $\theta(t) = A \cos t + B \sin t$

déterminer A et B pour satisfaire les conditions initiales :

$$\theta(0) = \frac{\pi}{6} \quad \text{donc} \quad A = \frac{\pi}{6}$$

$$\dot{\theta}(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

donc $\theta(t) = \frac{\pi}{6} \cos t$ est une solution approchée du problème valable pour θ "proche de 0".

Evidemment $\theta(0) = \frac{\pi}{6}$ n'est pas suffisamment proche de 0 pour que l'approximation $\sin \theta \approx \theta$ soit précise.

Néanmoins on a un ordre d'idée de la solution :

$$\begin{aligned} \theta(0.2) &= \frac{\pi}{6} \cos(0.2) \approx (0.9800) \cdot \frac{\pi}{6} \\ &\approx 0.5132 \end{aligned}$$

D'autre part

$$\theta_2 = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{200} = 0.5185$$

on a une différence absolue de $5 \cdot 10^{-3}$ env.
et une différence relative de

$$\frac{5 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-1}} = 1\%$$

Si on effectue un développement limité

$$\begin{aligned} \cos(0.2) &= \cos(2h) = 1 - \frac{(2h)^2}{2} + o(h^2) \\ &= 1 - 2h^2 + o(h^2) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \theta(0.2) = \frac{\pi}{6} (1 - 2h^2) + o(h^2) \\ \theta_2 = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{200} = \frac{\pi}{6} - \frac{h^2}{2} \end{cases}$$

Par différence on voit $\theta(0.2) - \theta_2 \approx \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{3}\right) h^2 = O(h^2)$

Nous verrons en cours que l'erreur de connaissance est bien $O(h^2)$. Au bout de 2 pas de temps l'erreur reste en $O(h^2)$.

Ex 3 considérons l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y(t)} \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Le schéma d'Euler appliqué à une subdivision $0 = t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_N = T$ s'écrit

$$\begin{cases} y_{m+1} = y_m + h_m \sqrt{y_m} \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

Ainsi $\forall n \geq 0$ on a $y_n = 0$

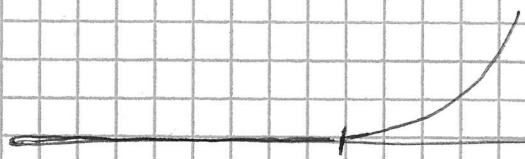
La solution nulle est bien solution du problème de Cauchy.

Mais il y en a une autre :

$$y(t) = \frac{t^2}{4} \quad y' = \frac{t}{2} = \sqrt{y} \quad \forall t \geq 0$$

$$\text{et } y(0) = 0$$

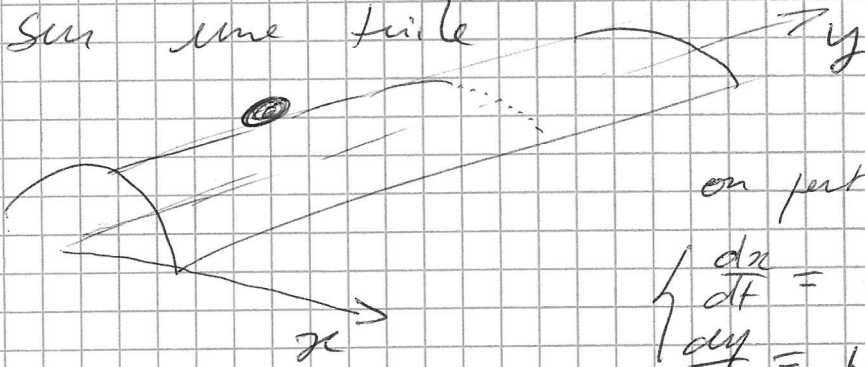
On a donc 2 solutions au problème de Cauchy



$$y(t) \equiv 0 \quad \text{et} \quad y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{t^2}{4} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Rq
— Ce phénomène est inhabituel d'un point de vue mécanique

Cette équation différentielle modélise la trajectoire d'une bille roulant sans frottement sur une table



on peut montrer que

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2\sqrt{x} \\ \frac{dy}{dt} = p \end{cases}$$

la bille peut partir à tout moment "sur le côté" ou elle peut rester sur la crête.

Il y a une infinité de solutions

de la forme $\begin{cases} x=0 \text{ si } t \leq t_0, & x = \frac{p^2}{4} (t-t_0)^2 \text{ sinon} \\ y(t) = pt \end{cases}$

cf wikipedia article sur théorème de Cauchy-Lipschitz

la causalité semble violée!

Expliquons ce paradoxe :

soit $f(t, y) = \sqrt{y}$ cette fonction n'est pas Lipschitzienne, même localement au voisinage de $y=0$ car $y \mapsto \sqrt{y}$ a une pente infinie en $y=0$.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz garantissant l'unicité de la solution au problème de Cauchy ne s'applique pas.

Reç on peut trouver toutes les solutions à l'équa diff.

$$y' = \sqrt{y}$$

(y doit être ≥ 0)
sinon pas définie

Séparons les variables :

$$\frac{y'}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{y} = \frac{t}{2} + c_k \quad ; \quad y = \left(\frac{t}{2} + c_k\right)^2$$

4- $t_n = n h$, le pas est constant ici.

a) écrivons le schéma d'Euler associé à

$$y' = y \quad ; \quad y(0) = 1$$

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n) \quad \text{et } y_0 = 1$$

$$= y_n + h y_n$$

$$y_{n+1} = (1+h) y_n$$

On reconnaît une suite géométrique

$$y_n = (1+h)^n y_0 = (1+h)^n$$

comme $t_n = n h$

$$y_n = (1+h)^{\frac{t_n}{h}}$$

$$\eta(t, h) = (1+h)^{\frac{t}{h}}$$

par définition de $\eta(\frac{t}{h}, h) = y_n$.

b) considérons t fixe.

$$(1+h)^{\frac{t}{h}} = \exp \frac{t}{h} \ln(1+h)$$

on sait que $\ln(1+h)$ est développable en série entière pour $|h| < 1$:

$$\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \dots = \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} h^k$$

$$\text{Donc } \frac{t}{h} \ln(1+h) = t \left\{ 1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} - \dots \right\} \text{ pour } |h| < 1$$

comme la fonction $z \mapsto \exp z$ est développable en série entière, de rayon de convergence infini

on peut composer les développements en série

(voir cours sur les fonctions analytiques)
ou sur les séries entières

$$\begin{aligned} \exp \frac{t}{h} \ln(1+h) &= \exp \left\{ t - \frac{ht}{2} + \frac{h^2 t}{3} + \dots \right\} \text{ pour } |h| < 1 \\ &= \exp t \cdot \exp \left\{ -\frac{ht}{2} + \frac{h^2 t}{3} + \dots \right\} \\ &= \exp t \left(\sum_{i \geq 0} d_i(t) h^i \right) \text{ avec } d_0(t) = 1 \\ &= \sum_i \tau_i(t) h^i \text{ avec } \tau_0(t) = \exp t \\ &\text{qui converge pour } |h| < 1 \end{aligned}$$

c) déterminons $\tau_1(t)$ pour cela
 développons $\exp \left(-\frac{ht}{2} + \frac{h^2 t}{3} + \dots \right)$
 en fonction de h .

$$\exp z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots$$

$$\text{donc } \exp \left(-\frac{ht}{2} + \frac{h^2 t}{3} + \dots \right) = 1 - \frac{ht}{2} + O(h^2)$$

(ici t est fixé).

$$\text{donc } \exp \frac{t}{h} \ln(1+h) = \exp t \cdot \left(1 - \frac{ht}{2} + O(h^2) \right)$$

$$\eta(t, h) = \exp t - \frac{t \exp t}{2} h + O(h^2)$$

La solution exacte au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases} \text{ est } y(t) = \exp t$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \eta(t, h) - y(t) &= -\frac{t \exp t}{2} h + O(h^2) \\ &= O(h) \end{aligned}$$

On redémontre sur ce cas particulier,
 que le schéma d'Euler est d'ordre 1.

5

Environ le premier pas du schéma
des trapèzes explicites.

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} \left\{ f(t_0, y_0) + f(t_0+h, y_0+h f(t_0, y_0)) \right\}$$

c'est un schéma à un pas puisque il s'écrit

$$y_1 = y_0 + h \phi(t_0, y_0, h)$$

$$\text{avec } \phi(t_0, y_0, h) = \frac{1}{2} \left\{ f(t_0, y_0) + f(t_0+h, y_0+h f(t_0, y_0)) \right\}$$

Remarquons d'abord que ϕ est lipschitz % y

$$\phi(t, y, h) - \phi(t, z, h) = \frac{1}{2} \left\{ f(t, y) - f(t, z) \right.$$

$$\left. + f(t+h, y+h f(t, y)) - f(t+h, z+h f(t, z)) \right\}$$

$$|\phi(t, y, h) - \phi(t, z, h)| \leq \frac{1}{2} \left\{ |f(t, y) - f(t, z)| \right.$$

$$\left. + |f(t+h, y+h f(t, y)) - f(t+h, z+h f(t, z))| \right\}$$

$$\leq \frac{1}{2} \left\{ L |y - z| + L |y + h f(t, y) - z - h f(t, z)| \right\}$$

on a utilisé que $|f(t, y) - f(t, z)| \leq L |y - z|$

hypothèse fondamentale du cours.

Donc avec l'inégalité \triangle

$$|\phi(t, y, h) - \phi(t, z, h)| \leq \frac{1}{2} \left\{ L |y - z| + L |y - z| \right.$$

$$\left. + L h |f(t, y) - f(t, z)| \right\}$$

$$\leq \frac{1}{2} (2L |y - z| + L^2 h |y - z|)$$

$$\leq \left(L + \frac{L^2 h}{2} \right) |y - z|$$

$$|\phi(t, y, h) - \phi(t, z, h)| \leq \left(L + \frac{L^2 h}{2} \right) |y - z| \quad \text{dès que } h < 1$$

D'après le cours pour montrer que le schéma est d'ordre 2, il suffit de montrer que l'erreur de consistance est en $O(h^3)$.

Pour cela estimons

$$y(t_0+h) - y_1.$$

D'une part: $y(t_0+h) = y(t_0) + h y'(t_0) + \frac{h^2}{2} y''(t_0) + O(h^3)$

or on sait que $y'(t) = f(t, y(t))$

donc $y''(t) = \frac{d}{dt} f(t, y(t))$

$$= \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) \cdot y'(t)$$

$$y''(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) \cdot f(t, y(t))$$

Donc $y(t_0+h) = y(t_0) + h f(t_0, y(t_0)) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot f(t_0, y(t_0)) \right) + O(h^3)$ (1)

D'autre part:

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} \left(f(t_0, y_0) + f(t_0+h, y_0 + h f(t_0, y_0)) \right)$$

effectuons un développement de Taylor à l'ordre 1

de $f(t_0+h, y_0 + h f(t_0, y_0)) = f(t_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0)$

$$+ h f(t_0, y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) + O(h^2)$$

Donc $y_1 = y_0 + \frac{h}{2} \left(2 f(t_0, y_0) + h \left(\frac{\partial f}{\partial t} + f \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \right)(t_0, y_0) + O(h^2) \right)$

$$y_0 = y_0 + h f(t_0, y_0) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) + f(t_0, y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) \right) + O(h^3)$$

On obtient bien $y(t_0+h) - y_1 = O(h^3)$ (2) □