TD 1 Corrigé

1- $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & (1) \\ y(0) = 1 & (2) \end{cases}$

$\Rightarrow \quad y(t) = y(0) + \int_0^t y'(s)\,ds$

donc $y(t) = 1 + \int_0^t y'(s)\,ds$ avec la cond. initiale (2)

ensuite avec l'equation (1)

$$y(t) = 1 + \int_0^t f(s, y(s))\,ds \qquad (3)$$

donc si on note :

$$F : \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$
$$y(\cdot) \longmapsto 1 + \int_0^{\cdot} f(s, y(s))\,ds$$

(3) traduit exactement le fait

$$y(\cdot) = F(y(\cdot))$$

donc y est un point fixe de la fonctionnelle F.

Pour simplifier on suppose que f est definie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

On sous-entend également f continue pour que

$\int_0^t f(s, y(s))\,ds$ soit définie.

Cas particulier $f(t, y) = y$

$$F(y(\cdot)) = 1 + \int_0^{\cdot} y(s)\,ds$$

Calculs les premières itérées :

$$y_1(t) = 1 + \int_0^t y_0\,ds = 1 + \int_0^t 1\,ds = 1 + t$$

$$y_2(t) = 1 + \int_0^t y_1(s)\,ds = 1 + \int_0^t (1+s)\,ds = 1 + t + \frac{t^2}{2}$$

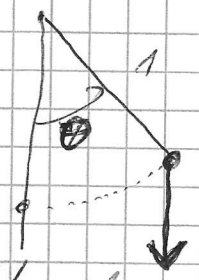
$$y_3(t) = 1 + \int_0^t y_2(s)\,ds = 1 + \int_0^t 1 + s + \frac{s^2}{2}\,ds = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!}$$

On constate que l'on obtient

$$y_k^{(t)} = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^k}{k!}$$

qui converge vers $\exp t$ la solution de l'équation différentielle $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

2 - $\begin{cases} \ddot{\theta} = -\sin\theta \\ \theta(0) = \pi/6 \\ \dot{\theta}(0) = 0 \end{cases}$



(on reconnaît l'équation de la dynamique du pendule pesant, avec une masse 1, une longueur 1 et la gravité prise égale à 1.)

Pour mettre sous forme d'un système du premier ordre on pose $u(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\dot{u}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}(t) \\ -\sin\theta(t) \end{pmatrix}$$

donc $\dfrac{du}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{du_1}{dt} \\ \frac{du_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2(t) \\ -\sin u_1(t) \end{pmatrix} = f(u(t))$

où $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(u_1, u_2) \longmapsto (u_2, -\sin u_1)$

f est C^1 car $\sin$ est C^1 donc vérifie les hypothèses du th. de Cauchy-Lipschitz

Rq le système différentiel est autonome car $f(u)$ ne dépend pas de t

Pour le schéma d'Euler, posons y_n un vecteur de $\mathbb{R}^2$ censé approcher $u(t_n) = (\theta(t_n), \dot{\theta}(t_n))$

Appliquons ensuite la méthode d'Euler :

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(y_n)$$

où h_n est le pas de temps

et y_n sont des valeurs supposés approcher $y(t_n)$, t_n étant la suite des instants du calcul $t_0 = 0$ $t_1 = h_0$, $t_2 = t_1 + h_1$, ... $t_{n+1} = t_n + h_n$.

Nous prenon le pas de temps constat $h = 0.1$

le schéma s'écrit donc :

$$y_0 = (\theta(0), \dot\theta(0)) = \left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$$

$$y_1 = y_0 + h f(y_0)$$

$$\begin{pmatrix}\theta_1\\ \dot\theta_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pi/6\\ 0\end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix}\dot\theta(0)\\ -\sin\theta(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pi/6\\ -0.1\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pi/6\\ -1/20\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\theta_2\\ \dot\theta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\theta_1\\ \dot\theta_1\end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix}\dot\theta_1\\ -\sin\theta_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pi/6\\ -\frac{1}{20}\end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix}-1/20\\ -\sin\pi/6\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\theta_2\\ \dot\theta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pi/6 - 1/200\\ -\frac{1}{20} - 0.1\left(\frac{1}{2}\right)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pi/6 - 1/200\\ -\frac{1}{10}\end{pmatrix}$$

θ_2 est une approximation de $\theta(2h) = \theta(0.2)$

donc $\theta(0.2) \approx \pi/6 - \frac{1}{200}$

D'autre par l'equation linéarisé est

$$\ddot\theta = -\theta$$

dont les seules sont $\theta(t) = A\cos t + B\sin t$

déterminer A et B pour satisfaire les conditions initiales :

$$\theta(0) = \pi/6 \quad \text{donc} \quad A = \pi/6$$

$$\dot\theta(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

donc $\theta(t) = \pi/6 \cos t$ est une solution approché du problème valable pour θ "proche de 0".
Evidemment $\theta(0) = \pi/6$ n'est pas suffisamment proche de 0 pour que l'approximation

$$\sin\theta \simeq \theta \quad \text{soit précise}$$

Néanmoins on a un ordre d'idée de la solution :

$$\theta(0.2) = \pi/6 \cos(0.2) \simeq (0.9800)\cdot \pi/6$$
$$\simeq 0.5132$$

D'autre part

$$\theta_2 = \pi/6 - 1/200 = 0.5185$$

On a une différence absolue de 5.10^{-3} env. et une différence relative de

$$\frac{5.10^{-3}}{5.10^{-1}} = 1\%$$

Si on effectue un développent limité

$$\cos(0.2) = \cos(2h) = 1 - \frac{(2h)^2}{2} + o(h^2)$$
$$= 1 - 2h^2 + o(h^2)$$

$$\begin{cases} \theta(0.2) = \pi/6\,(1 - 2h^2) + o(h^2) \\ \theta_2 = \pi/6 - \frac{1}{200} = \pi/6 - \frac{h^2}{2} \end{cases}$$

Par différence on voit $\theta(0.2) - \theta_2 \approx \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{3}\right)h^2 = O(h^2)$

Nous verrons en cours que l'erreur de consistance est bien $O(h^2)$. Au bout de 2 pas de temps l'erreur reste en $O(h^2)$.

Ex 3

Considérons l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y(t)} \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Le schéma d'Euler appliqué à une subdivision $0 = t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_N = T$ s'écrit

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h_n \sqrt{y_n} \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

Ainsi $\forall n \geq 0$ on a $\underline{y_n = 0}$

La solution nulle est bien solution du problème de Cauchy.

Mais il y en a une autre :

$$y(t) = \frac{t^2}{4} \qquad y' = \frac{t}{2} = \sqrt{y} \qquad \forall t \geq 0$$

et $y(0) = 0$

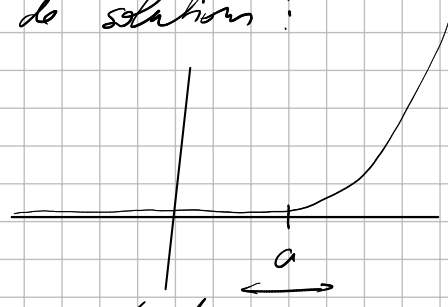
On a donc 2 solutions au problème de Cauchy

$y(t) \equiv 0$ et $y(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ \frac{t^2}{4} \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$

Rq : Ce phénomène est intriguant d'un point de vue mécanique

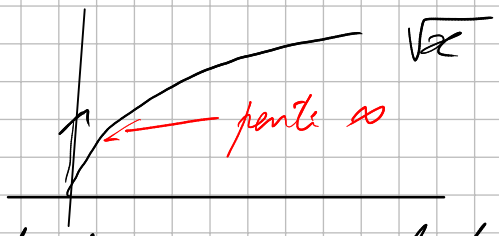
En fait il y a même une infinité de solutions !

$$y_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a \\ \dfrac{(t-a)^2}{4} & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

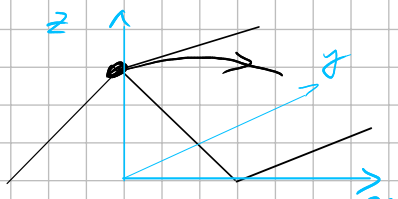


est solution du problème de Cauchy pour tout $a \geq 0$.

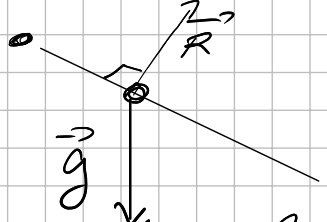
Le "paradoxe" vient du fait que $f(t,x) = \sqrt{x}$ n'est pas Lipschitz donc le théorème de Cauchy Lipschitz ne s'applique pas.



On peut trouver un modèle physique correspondant à cette équation.



La bille de masse 1 est soumise à la gravité $\vec{g}$ la force de réaction $\vec{R}$ du toit, qui est normale au toit puisqu'il n'y a pas de frottement.



La force de réaction n'est pas connue - utilisons le théorème de l'énergie cinétique : $\frac{1}{2}\left[\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t) - (0^2 + v^2 + 0^2)\right]$ $= g(1-z)$ (travail du poids seul, car $\vec{R}$ étant normale au déplacement ne travaille pas)

L'équation du toit est $z = 1 - |x| = 1 - x$ si on suppose que la bille part vers la droite.

donc $\frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (-\dot{x})^2\right) = \frac{v^2}{2} + gx$

D'autre part comme aucune force n'a de composante suivant (Oy) le principe d'inertie s'applique : $\dot{y} = cte = v$

Donc $\dot{x}^2 = gx$ et en supposant que la bille part à droite $\dot{x} = \sqrt{g}\sqrt{x}$ (bien homogène en $m \cdot s^{-1}$)

On retrouve le pb de Cauchy (hormis le facteur $\sqrt{g}$)
Et physiquement toutes les solutions sont possibles :

$x(t) \equiv 0$ (la bille court sur l'arête sans jamais tomber)

$$x(t) = \begin{cases} \frac{g}{4}(t-t^*)^2 & \text{si } t \geq t^* \quad \text{(homogène à m)} \\ 0 & \text{si } t \leq t^* \end{cases}$$

t^* est l'instant où la bille bifurque.
On a ici un intéressant cas où la causalité n'entraîne pas le déterminisme. La bille peut partir à tout moment, impossible de rester sur le fil du rasoir. ☺

Ex 5. $y''(t) = \frac{d}{dt} y'(t) = \frac{d}{dt} f(t, y(t)) = \partial_1 f(t,y) + \partial_2 f(t,y) \frac{dy}{dt}$

$$= \frac{\partial f}{\partial t}(t,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(t,y) f(t,y)$$

L'erreur de consistance est définie par :

$$\varepsilon(h) = y(t_0+h) - y(t_0) - h f(t_0, y(t_0)) - \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y(t_0)) + \frac{\partial f}{\partial y}(\,)\, f(t_0, y(t_0))\right)$$

$$= y(t_0+h) - y(t_0) - h\, y'(t_0) - \frac{h^2}{2} y''(t_0)$$

d'après la formule de Taylor-Lagrange

$$\varepsilon(h) = \frac{1}{3!} y'''(t_0 + \theta h) h^3 \quad \text{avec} \quad \theta \in]0,1[$$

Si on suppose que $y(t)$ est C^3 on a $\underline{\varepsilon(h) = O(h^3)}$

4- $t_n = nh$, le pas est constant ici.

a) écrivons le schéma d'Euler associé à

$$y' = y \quad ; \quad y(0) = 1$$

$$y_{n+1} = y_n + h\, f(t_n, y_n) \quad \text{et} \quad y_0 = 1$$

$$= y_n + h\, y_n$$

$$y_{n+1} = (1+h) y_n$$

On reconnaît une suite <u>géométrique</u>

$$y_n = (1+h)^n y_0 = (1+h)^n$$

comme $t_n = nh$

$$y_n = (1+h)^{t_n/h}$$

$$\eta(t, h) = (1+h)^{t/h}$$

par définition de $\eta(t_n, h) = y_n$.

b) Considérons t fixé.

$$(1+h)^{t/h} = \exp \frac{t}{h} \operatorname{Ln}(1+h)$$

on sait que $\operatorname{Ln}(1+h)$ est développable en série entière pour $|h| < 1$:

$$\operatorname{Ln}(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + \dots = \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} h^k$$

Donc $\frac{t}{h} \operatorname{Ln}(1+h) = t \left\{ 1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} - \dots \right\}$ pour $|h| < 1$

comme la fonction $z \longmapsto \exp z$ est développable en série entière, de rayon de convergence infini on peut <u>composer</u> les développement en série (voir cours sur les fonctions analytiques ou sur les séries entières)

$$\exp \frac{t}{h} \ln(1+h) = \exp\left\{ t - \frac{ht}{2} + \frac{h^2 t}{3} + \dots \right\} \quad \text{pour } |h|<1$$

$$= \exp t \cdot \exp\left\{ -\frac{ht}{2} + \frac{h^2 t}{3} + \dots \right\}$$

$$= \exp t \left(\sum_{i \geq 0}' d_i(t)\, h^i \right) \quad \text{avec } d_0(t) = \underline{1}$$

$$= \sum_i' \tau_i(t)\, h^i \quad \text{avec } \tau_0(t) = \exp t$$

qui converge pour $|h|<1$

c) déterminons $\tau_1(t)$ pour cela développons $\exp\left(-\frac{ht}{2} + \frac{h^2 t}{3} + \dots\right)$ en fonction de h.

$$\exp z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots$$

donc $\exp\left(-\frac{ht}{2} + \frac{h^2 t}{3} + \dots\right) = 1 - \frac{ht}{2} + O(h^2)$

(ici t est fixé).

donc $\exp \frac{t}{h} \ln(1+h) = \exp t \cdot \left(1 - \frac{ht}{2} + O(h^2)\right)$

$$\eta(t,h) = \exp t - \frac{t \exp t}{2} h + O(h^2)$$

La solution exacte au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad \text{est} \quad y(t) = \exp t$$

donc $\eta(t,h) - y(t) = -\frac{t \exp t}{2} h + O(h^2)$

$$= O(h)$$

On redémontre sur ce cas particulier que le schéma d'Euler est d'ordre 1.

5 -

Ecrivons le premier pas du schéma des trapèzes explicites.

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left\{ f(t_0, y_0) + f(t_0+h, y_0 + h f(t_0, y_0)) \right\}$$

c'est un schéma à un pas puisque il s'écrit

$$y_1 = y_0 + h\ \phi(t_0, y_0, h)$$

avec $\phi(t_0, y_0, h) = \frac{1}{2}\left\{ f(t_0, y_0) + f(t_0+h, y_0 + h f(t_0, y_0)) \right\}$

Remarquons d'abord que ϕ est Lipschitz $\%$ y

$$\phi(t, y, h) - \phi(t, z, h) = \frac{1}{2}\left\{ f(t, y) - f(t, z) + f(t+h, y + h f(t, y)) - f(t+h, z + h f(t, z)) \right\}$$

$$|\phi(t, y, h) - \phi(t, z, h)| \leq \frac{1}{2}\left\{ |f(t, y) - f(t, z)| + |f(t+h, y + h f(t, y)) - f(t+h, z + h f(t, z))| \right\}$$

$$\leq \frac{1}{2}\left\{ L|y - z| + L|y + h f(t, y) - z - h f(t, z)| \right\}$$

on a utilisé que $|f(t, y) - f(t, z)| \leq L|y - z|$ hypothèse fondamentale du cours.

Donc avec l'inégalité $\triangle$:

$$|\phi(t, y, h) - \phi(t, z, h)| \leq \frac{1}{2}\left\{ L|y - z| + L|y - z| + L h |f(t, y) - f(t, z)| \right\}$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(2L|y - z| + L^2 h |y - z| \right)$$

$$\leq \left(L + L^2 \frac{h}{2} \right) |y - z|$$

$$|\phi(t, y, h) - \phi(t, z, h)| \leq \left(L + \frac{L^2}{2} \right) |y - z| \quad \text{dès que } h < 1$$

D'après le cours pour montrer que le schéma est d'ordre 2, il suffit de montrer que l'erreur de consistance est en $O(h^3)$.

Pour cela estimons

$$y(t_0+h) - y_1 .$$

D'une part : $y(t_0+h) = y(t_0) + h\,y'(t_0) + \frac{h^2}{2} y''(t_0) + O(h^3)$

or on sait que $y'(t) = f(t, y(t))$

donc $y''(t) = \frac{d}{dt} f(t, y(t))$

$$= \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \cdot y'(t)$$

$$y''(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) \cdot f(t, y(t))$$

Donc $y(t_0+h) = y(t_0) + h f(t_0, y(t_0)) + \frac{h^2}{2}\left\{\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot f(t, y)\right\} + O(h^3)$ (1)

D'autre part :

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left(f(t_0, y_0) + f(t_0+h, y_0 + h f(t_0, y_0))\right)$$

effectuons un développement de Taylor à l'ordre 1 de $f(t_0+h, y_0 + h f(t_0, y_0))$

$$= f(t_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) + h f(t_0, y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0) + O(h^2)$$

Donc $y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left\{2 f(t_0, y_0) + h\left(\frac{\partial f}{\partial t} + f \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0)\right) + O(h^2)\right\}$

$$y_1 = y_0 + h f(t_0, y_0) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) + f(t_0, y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0)\right) + O(h^3)$$ (2)

On obtient bien $y(t_0+h) - y_1 = O(h^3)$ ∎