Université de Montpellier
Faculté des Sciences
Mathématiques et Mécanique

Année Universitaire 2023-2024

TD 1

1. Ecrire le problème de Cauchy $y' = f(t, y)$ avec $y(0) = 1$ sous la forme d'une problème de point fixe $y = F(y(\cdot))$. Dans le cas particulier $f(t, y) = y$, appliquer la méthode des approximations successives $y_{k+1} = F(y_k), \quad y_0 \equiv 1$ et calculez les trois premières itérations. Qu'obtenez vous ?
2. On considère l'équation différentielle du pendule $\ddot{\theta} = -\sin\theta$ avec les données initiales $\theta(0) = \pi/6$ et $\dot{\theta}(0) = 0$. Mettre l'équation sous forme d'un système du premier ordre. Appliquer ensuite la méthode d'Euler avec un pas de temps $h = 0.1$ pendant 2 pas de temps pour calculer une approximation numérique θ_2 de $\theta(0.2)$. Comparer avec la solution de l'équation différentielle obtenue en linéarisant autour de $\theta = 0$, $\sin\theta \approx \theta$. Estimer l'ordre de grandeur de l'erreur $\theta_2 - \theta(0.2)$ en fonction de h.
3. Le problème de Cauchy :

$$y'(t) = \sqrt{y(t)}, \quad y(0) = 0$$

   a la solution non triviale $y(t) = (\frac{t}{2})^2 \cdot \mathbf{1}_{(t>0)}$. Que donnerait l'application de la méthode d'Euler, avec un pas $h > 0$ constant. Expliquer le paradoxe.
4. Pour $t = nh$ où $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, soit $\eta(t; h) = y_n$ la solution approchée fournie par le schéma d'Euler de pas de temps h pour le problème de Cauchy :

$$y' = y, \; y(0) = 1.$$

   a) Montrer que $\eta(t; h) = (1 + h)^{t/h}$.
   b) Montrer que $h \mapsto \eta(t; h)$ admet le développement en série entière :

$$\eta(t; h) = \sum_{i=0}^{\infty} \tau_i(t) h^i \text{ avec } \tau_0(t) = e^t,$$

   qui converge pour $|h| < 1$.
   c) Déterminer $\tau_1(t)$. Retrouver ainsi l'ordre du schéma d'Euler.

5. Établir que le schéma de Runge appliqué à $\mathbf{y}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \; \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$, aussi appelé méthode des trapèzes explicites, défini par :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \\ \mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}(t + h, \mathbf{y} + h\mathbf{k}_1) \\ \mathbf{y}_1 &= \mathbf{y} + \tfrac{h}{2}(\mathbf{k_1} + \mathbf{k_2}) \end{aligned}$$

   est un schéma à un pas d'ordre 2 .

   Indication : il faut montrer que pour la solution exacte $t \mapsto \mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ on a $\mathbf{y}(t+h) - \mathbf{y}_1 = O(h^3)$, en supposant $t \to \mathbf{y}(t)$ régulière.