Université de Montpellier **Année Universitaire 2025-2026**
Faculté des Sciences
Analyse numérique des équations différentielles.

TD 1

1. Ecrire le problème de Cauchy $y' = f(t, y)$ avec $y(0) = 1$ sous la forme d'une problème de point fixe $y = F(y(\cdot))$. Dans le cas particulier $f(t, y) = y$, appliquer la méthode des approximations successives $y_{k+1} = F(y_k), \quad y_0 \equiv 1$ et calculez les trois premières itérations. Qu'obtenez vous ?
2. On considère l'équation différentielle du pendule $\ddot{\theta} = -\sin\theta$ avec les données initiales $\theta(0) = \pi/6$ et $\dot{\theta}(0) = 0$. Mettre l'équation sous forme d'un système du premier ordre. Appliquer ensuite la méthode d'Euler avec un pas de temps $h = 0.1$ pendant 2 pas de temps pour calculer une approximation numérique θ_2 de $\theta(0.2)$. Comparer avec la solution de l'équation différentielle obtenue en linéarisant autour de $\theta = 0$, $\sin\theta \approx \theta$. Estimer grossièrement l'ordre de grandeur de l'erreur $\theta_2 - \theta(0.2)$ en fonction de h.
3. Trouvez toutes les solutions du problème de Cauchy :

$$x'(t) = \sqrt{x(t)}, \quad x(0) = 0 \tag{1}$$

Que donnerait l'application de la méthode d'Euler, avec un pas $h > 0$ constant. Expliquer le paradoxe.

Un modèle mécanique. Cette équation différentielle peut modéliser un phénomène physique intéressant : une petite bille de masse unité roule sans frottement sur un toit cylindrique parallèle à l'axe $(0y)$ de section triangulaire d'équation : $\{|x| + z = 1, \ z \geq 0\}$. On note x la coordonnée transverse et z la coordonnée verticale dirigée vers le haut. On suppose qu'à l'instant initial la bille est située au somment de l'arête du toit en $x = 0, y = 0, z = 1$ et que sa vitesse initiale est $(0, v, 0)$. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique montrer que $\dot{x}^2 = gx$ où g est l'accélération de la pesanteur, ce qui donne l'équation (1) si on suppose que la bille part vers la droite (voir fig. 3). Commentez le phénomène de non-unicité au regard du principe de causalité.

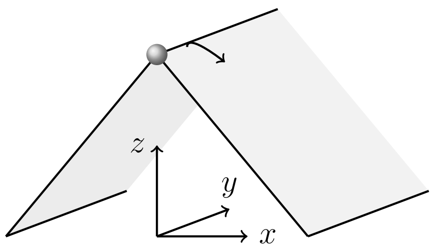

FIGURE 1 – Bille roulant sur un toit.

4. Pour $t = nh$ où $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, soit $\eta(t; h) = y_n$ la solution approchée fournie par le schéma d'Euler de pas de temps h pour le problème de Cauchy :

$$y' = y, \ y(0) = 1.$$

a) Montrer que $\eta(t; h) = (1 + h)^{t/h}$.

b) Montrer que $h \mapsto \eta(t; h)$ admet le développement en série entière :

$$\eta(t; h) = \sum_{i=0}^{\infty} \tau_i(t) h^i \text{ avec } \tau_0(t) = e^t,$$

qui converge pour $|h| < 1$.

c) Déterminer $\tau_1(t)$. Retrouver ainsi l'ordre du schéma d'Euler.

5. On considère le problème de Cauchy $y'(t) = f(t, y(t)),\ y(0) = y_0$. Montrer que si f est $\mathbf{C}^1$ alors
$$y''(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y)\, f(t, y).$$
Le schéma de Taylor est donné par
$$y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) + \frac{h^2}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial t}(t_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0)\, f(t_0, y_0)\Big).$$
Quelle est l'ordre de grandeur de l'erreur de consistance de ce schéma ?

6. Établir que le schéma de Runge (1856-1927) appliqué à $\mathbf{y}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)),\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$, aussi appelé méthode des trapèzes explicites ou schéma de Heun défini par :
$$\begin{aligned}\mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y})\\ \mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}(t + h, \mathbf{y} + h\mathbf{k}_1)\\ \mathbf{y}_1 &= \mathbf{y} + \tfrac{h}{2}(\mathbf{k_1} + \mathbf{k_2})\end{aligned}$$
est un schéma à un pas d'ordre 2 .

Indication : il faut montrer que pour la solution exacte $t \mapsto \mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ on a une erreur de consistance $\epsilon(h) := \mathbf{y}(t + h) - \mathbf{y}_1 = O(h^3)$, en supposant $t \to \mathbf{y}(t)$ régulière.