Université Montpellier II - L2 - HA8301
Feuille TD 4bis : Autour de l'espace L^2

Dans toute cette feuille, on notera L^2 l'espace des fonctions 2π-périodiques (Riemann-)intégrables sur $[0, 2\pi]$ muni de la forme $H(f, g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\overline{g(\theta)}d\theta$ et de la (semi-)norme $||f|| = \sqrt{H(f, f)}$. On identifiera une fonction périodique avec sa restriction à $[0, 2\pi[$.

Remarque : Bien que cet espace ne soit pas le "vrai" espace L^2, qui se place dans le cadre des fonctions Lebesgue mesurable et qui est un quotient, les exercices suivants sont une bonne approche de celui ci.

Exercice 1 : Fonctions de norme nulle On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des fonctions f de L^2 telles que $||f|| = 0$.

1. Montrer que $\mathcal{N}$ n'est pas réduit à $\{0\}$ (ce qui donne que $||.||$ n'est pas une vraie norme sur L^2).
2. Montrer que $f \in \mathcal{N}$ si et seulement si pour toute $g \in L^2$, $H(f, g) = 0$. (ind : utiliser Cauchy-Schwarz)
3. Montrer que $\mathcal{N}$ est un sous-espace vectoriel de L^2.
4. Montrer que la famille $(\mathbb{1}_{\{x\}})_{x\in[0,2\pi[}$ est une famille libre qui n'est pas génératrice (penser à l'exercice 8 de la feuille 1). En déduire que $\mathcal{N}$ est de dimension infinie.
5. Déterminer $\mathcal{C}^0 \cap \mathcal{N}$.

Exercice 2 : Quelques relations Montrer que pour $f, g \in L^2$, on a :

1. $||f + g||^2 + ||f - g||^2 = 2(||f||^2 + ||g||^2)$ (identité du paralellogramme).
2. $||f + g||^2 - ||f - g||^2 = 4Re(f, g)$ (2nd identité de la médiane).

Interpréter géométriquement ces relations.

Exercice 3 : isométries Une application linéaire $\Phi : L^2 \to L^2$ est une isométrie si $||\Phi(f)|| = ||f||$ pour tout $f \in L^2$.

1. Montrer que Φ est une isométrie si et seulement si $H(\Phi(f), \Phi(g)) = H(f, g)$ pour tout $f, g \in L^2$.
2. Montrer que $Ker(\Phi) = \mathcal{N}$ (cf exercice 1).

Exercice 4 : Autour de la projection Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille orthonormale de L^2 (on peut, par exemple, prendre $e_n(t) = e^{int}$). Pour $f \in L^2$, on pose $P_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} H(f, e_k)e_k$.

1. Montrer que $P_n \circ P_n = P_n$.
2. Montrer que pour tout $f, g \in L^2$, $H(P_n(f), g) = H(f, P_n(g))$.
3. Montrer que pour tout $f \in L^2$, $||P_n(f)|| \leq ||f||$ avec égalité si est seulement si $f - P_n(f) \in \mathcal{N}$ (cf exercice 1).

4. Montrer que la restriction de P_n à $Vect(e_k, -n \leq k \leq n)$ est l'identité. Déterminer $Im(P_n)$.

5. On pose $\sigma_n(x) = 2P_n(x) - x$. Montrer que σ_n est une isométrie et que $\sigma_n \circ \sigma_n = Id$.

6. Interpréter géométriquement P_n et σ_n.

Exercice 5 (***): Continuité des translations Dans cet exercice, on note, pour $t \in \mathbb{R}$, τ_t l'application définie de L^2 dans L^2 par $\tau_t(f)(x) = f(x-t)$.

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, τ_t est linéaire et que c'est une isométrie.

2. Pour $s, t \in \mathbb{R}$, calculer τ_{s+t} en fonction de τ_s et τ_t. En déduire que $\tau_s \circ \tau_t = \tau_t \circ \tau_s$, puis que τ_t est inversible pour tout t.

3. Pour $f \in L^2$, on définie la fonction $g = g_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g(t) = ||f - \tau_t(f)||^2$. Le but de cette question est de démontrer que g est continue en 0. On se donne $\varepsilon > 0$.

   (a) Montrer que pour toute $f \in L^2$, il existe une constante C_f telle que $||f||^2 \leq C_f N(f)$ où $N(f) = \int_0^{2\pi} |f(\theta)| dt$. En déduire qu'il suffit de montrer que $t \mapsto N(f - \tau_t(f))$ est continue en 0.

   (b) On suppose que $f = \sum_{k=0}^{K} \alpha_k \mathbb{1}_{]a_k, a_{k+1}[}$ est en escalier. Calculer $g(t)$. En déduire que g est continue en 0.

   (c) On suppose maintenant que f est positive, rappeler pourquoi il existe ϕ en escalier telle que $\phi \leq f$ et $N(f - \phi) < \varepsilon$. En décomposant $f - \tau_t(f)$ pour faire apparaitre ϕ et $\tau_t(\phi)$, conclure que g est continue.

   (d) Conclure en décomposant f sous la forme $f^+ + f^-$ si f est réelle puis en utilisant les parties réelles et imaginaires dans le cas général.