Université Montpellier II - L2 - HA8301
Feuille TD 4 : Séries de Fourier

Exercice 1 Soit f la fonction définie par $f(x) = sup(sin(x), 0)$.

1. Montrer que f est 2π-périodique et représenter f.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. Determiner la somme de la série de Fourier de f.
4. Calculer la somme de la série

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{4p^2 - 1}$$

.

Exercice 2 Soit $C(x)$ la fonction périodique de période 2π définie par

$$C(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = \pi \\ 1 & \text{si } x \in]0, \pi[\\ -1 & \text{si } x \in]\pi, 2\pi[\end{cases}$$

et $T(x)$ la fonction périodique de période 2π définie par

$$T(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, \pi[\\ 2\pi - x & \text{si } x \in [\pi, 2\pi[\end{cases}$$

1. Représenter C et T.
2. Déterminer les coefficients de Fourier de C et T.
3. Determiner les sommes des séries de Fourier de C et T.
4. Calculer $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.

Exercice 3 Soit f la fonction 2π périodique définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) = x^2$.

1. Determiner la somme de la série de Fourirer de f

2. En déduire les valeurs de $\sum_{p=1}^{\infty} u_p$ lorsque $u_n = 1/n^2$, $u_n = (-1)^n/n^2$, $u_n = 1/n^4$.

Exercice 4 : Formule de Wallis Soit α un réel non entier et f la fonction périodique de période 2π définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) = cos(\alpha x)$.

1. Vérifier que f est continue et montrer qu'elle est développable en série de Fourier.
2. Vérifier que
$$\frac{\pi}{sin(\alpha x)} = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\alpha^2 - p^2}$$
3. Soit a_n et b_n les coefficients de Fourier réels de f, calculer
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} sin(nx) - \frac{b_n}{n} cos(nx)$$
4. Montrer que
$$\pi cotg(\alpha\pi) - \frac{1}{\alpha} = 2\alpha \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - p^2}$$
5. En déduire
$$\frac{sin(x)}{x} = \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{p^2\pi^2}\right)$$
6. Montrer la formule de Wallis :
$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^2.4^2.6^2 \dots (2n)^2}{3^2.5^2 \dots (2n-1)^2.(2n+1)}$$

Exercice 5 : Filtrage Soit f une fonction périodique de période 2π de classe $\mathcal{C}^2$, $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite telle que $0 \leq b_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Soit c_n les coefficients de Fourier de f,

1. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n c_n e^{int}$ converge sur $\mathbb{R}$.
2. Que se passe-t-il lorsque
   (a) $b_n = 0$ si $n \neq N, -N$, $b_N = 1$ et $b_{-N} = 1$

(b) $b_n = 1$ si $n \neq N, -N$, $b_N = 0$ et $b_{-N} = 0$

3. Avez vous des applications physiques pour ce phénomême ? En fait, pour appliquer ce résultat en physique, on travaille souvent sur des domaines de fréquences continus et non discrets : on utilise en réalité la *transformée de Fourier*.