Université Montpellier II - L2 - HLMA312
Tous documents, calculatrices, portables interdits

Questions de cours

1. Enoncer le théorème de diagonalisation.
2. Démontrer que si une suite de fonction f_n converge uniformément vers f sur $[a, b]$, alors $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$

Exercice Nature de la **série** de terme géneral u_n lorsque :

1. $u_n = \frac{1+n}{1+n^3}$.
2. $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.
3. $u_n = (-1)^n(1 - cos(1/n))$.
4. $u_n = \frac{1+in}{1+n^3}$ où i est un nombre complexe tel que $i^2 = -1$.
5. $u_n = \frac{4^n}{n^n}$.

Exercice On considère la suite de fonctions f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n^2}$.

1. Etudier la convergence simple de f_n sur $\mathbb{R}$, on notera f 1a limite simple.
2. Dresser le tableau de variation de $|f_n - f|$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la convergence est uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}$.
4. La convergence de la suite dérivée f'_n est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

Exercice On considère la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par $u_n(x) = ne^{-nx}$ et la série de fonctions $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$.

1. Déterminer l'ensemble I des x pour lesquels la série $S(x)$ converge.
2. Montrer que S converge uniformément sur tout compact de $I\backslash\{0\}$. En déduire que S est continue sur $I\backslash\{0\}$.
3. Pour $x \in I\backslash\{0\}$, calculer explicitement $\int_1^x S(t)dt$.
4. En déduire explicitement S sur $I\backslash\{0\}$.

Exercice On considère la fonction $f(x) = ln(1 + x^2)$.

1. Dériver f.
2. En déduire le développement de f en série entière et donner le rayon de convergence.