Université Montpellier II - L2 - HLMA312
Tous documents, calculatrices, portables interdits

Questions de cours

1. Enoncer le corollaire du théorème de diagonalisation.
2. Enoncer et démontrer le théorme d'intégration pour les suites de fonctions.

Exercice Nature de la **série** de terme géneral u_n lorsque :

1. $u_n = \frac{1+n}{1+n\sqrt{n}}$.
2. $u_n = \frac{(n!)}{(n)^{2n}}$.
3. $u_n = (-1)^n ln(1 + \frac{1}{n})$.
4. $u_n = \frac{\sqrt{n}+inln(n)}{n^4}$ où i est un nombre complexe tel que $i^2 = -1$.
5. $u_n = \frac{4^n}{n^{2n}}$.

Exercice On considère la suite de fonctions f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = nArctan(x/n)$.

1. Etudier la convergence simple de f_n sur $\mathbb{R}$, on notera f 1a limite simple.
2. Dresser le tableau de variation de $f - f_n$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la convergence est uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}$.
4. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

Exercice On considère la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par $u_n(x) = \frac{(-1)^n cos^{2n+1}(x)}{2n+1}$ et la série de fonctions $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$.

1. Montrer, par exemple par un changement de variable, que l'étude de la convergnce de S revient à l'étude de la convergence de la série entière $T(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1}$.
2. Donner le rayon de convergence de T.
3. En déduire l'ensemble des réels x tels que S converge. Montrer que la convergence est uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}\backslash\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
4. Calculer T (on précisera le domaine de validité de la formule exprimée).
5. En déduire explicitement S.
6. Montrer que $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \pi/4$.

Exercice On considère la fonction $f(\theta)$ définie sur $\mathbb{R}$, 2π périodique et qui vaut $|\theta|$ sur $]-\pi, \pi]$.

1. Tracer le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Déterminer les coefficients de Fourier de f. Donner l'expression de sa série de Fourier $S(f)$.
3. Montrer que $S(f) = f$.
4. Calculer $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$, $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^4}$.