Université Montpellier II - L2 - HLMA312
Tous documents, calculatrices, portables interdits

Questions de cours

1. Donner la définition d'une série de fonctions normalement convergente.
2. En utilisant le critère de Cauchy uniforme, démontrer qu'une série de fonctions normalement convergente est uniformément convergente.

Exercice Nature de la **série** de terme géneral u_n lorsque :

1. $u_n = \frac{1+\sqrt{n}}{1+n\sqrt{n}}$.
2. $u_n = \frac{(e^n)}{n^{2n}}$.
3. $u_n = (-1)^n ln(1+n)$.
4. $u_n = \frac{n^{3/2}+in}{n^3}$ où i est un nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

Exercice On considère la suite de fonctions f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = n^2(1 - cos(x/n))$$

.

1. Etudier la convergence simple de f_n sur $\mathbb{R}$, on notera f 1a limite simple.
2. Dresser le tableau de variation de $f - f_n$ sur $\mathbb{R}$. On pourra utilser sans démonstration le fait pour $x \geq 0$, $sin(x) \leq x$.
3. Montrer que la convergence est uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}$.
4. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

Exercice On considère la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par $u_n(x) = n^2 e^{-nx}$ et la série de fonctions $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$.

1. Montrer, par exemple par un changement de variable, que l'étude de la convergnce de S revient à l'étude de la convergence de la série entière $T(z) = \sum_{n\geq 0} n^2 z^n$.
2. Donner le rayon de convergence de T.
3. En déduire l'ensemble I des réels x tels que S converge. Montrer que la convergence est uniforme sur tout compact de I.
4. Montrer que pour tout $x > 0$, $\int_1^x S(u)du$ existe et exprimer cette intégrale sous forme d'une série. On note $F(x) = \int_1^x S(u)du$.
5. De la même manière, montrer que $G(x) = \int_1^x F(u)du$ existe et exprimer cette intégrale sous forme d'une série.
6. Calculer explicitement $G(x)$, en déduire explicitement $F(x)$, puis $S(x)$.

Exercice On considère la fonction $f(\theta)$ définie sur $\mathbb{R}$, 2π périodique et qui vaut θ sur $[0, 2\pi[$.

1. Tracer le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.
2. Déterminer les coefficients de Fourier de f. Donner l'expression de sa série de Fourier $S(f)$.
3. A-on $S(f) = f$?
4. Calculer $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)}$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2}$.