**Université Montpellier II - L2 - HLMA312**
Tous documents, calculatrices, portables interdits

**Questions de cours**

1. Enoncer le théorème de diagonalisation.
2. Démontrer le corollaire du théorème de diagonalisation.

**Exercice** Nature de la **série** de terme géneral $u_n$ lorsque :

1. $u_n = \frac{n+n^2}{1+n^4}$.
2. $u_n = \frac{(n!)^3}{(3n)!}$.
3. $u_n = \frac{(-1)^n}{sin(1/n)}$.
4. $u_n = \frac{\sqrt{n}+in}{n^4}$ où $i$ est un nombre complexe tel que $i^2 = -1$.
5. $u_n = \frac{n^n}{4^n}$.

**Exercice** On considère la suite de fonctions $f_n$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = n^2 sin(x/n^2)$.

1. Etudier la convergence simple de $f_n$ sur $\mathbb{R}$, on notera $f$ 1a limite simple.
2. Dresser le tableau de variation de $f - f_n$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la convergence est uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}$.
4. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$ ?

**Exercice** On considère la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par $u_n(x) = (n+1)sin(x)cos^n(x)$ et la série de fonctions $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

1. Monter que la série $S(x)$ converge sur $\mathbb{R}$. (On pourra distinguer les cas $x = k\pi, x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).
2. Montrer que $S$ converge uniformément sur tout compact de $]0, \pi[$. En déduire que $S$ est continue sur $]0, \pi[$ puis que $S$ est contine sur $\mathbb{R}\backslash\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
3. Pour $x \in ]0, \pi[$, calculer $\int_{\pi/2}^{x} S(t)dt$.
4. En déduire explicitement $S$ sur $\mathbb{R}$.

**Exercice** On considère la fonction $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$.

1. Déterminer une primitive de $f$.
2. En déduire le développement de $f$ en série entière et donner le rayon de convergence.

**Exercice** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -11 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de $A$. En déduire ses valeurs propres.
2. La matrice $A$ est-elle diagonalisable ?