Université Montpellier II - L2 - HLMA312
Tous documents, calculatrices, portables interdits

Question de cours Enoncer et démontrer le critère de comparaison pour les séries.

Exercice Nature de la **série** de terme géneral u_n lorsque :

1. $u_n = \frac{\sqrt{1+n}}{1+n^2}$.
2. $u_n = (1+n^4)e^{-n}$.
3. $u_n = (-1)^n ln(n)$
4. $u_n = \frac{e^{2in\pi/3}}{n^4}$ où i est un nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

Exercice On considère la suite de fonctions f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = n^2(1 - cos(x/n))$.

1. Etudier la convergence simple de f_n sur $\mathbb{R}$, on notera f 1a limite simple.
2. Dresser le tableau de variation de $f - f_n$ sur $\mathbb{R}$ (On pourra remarquer que $f - f_n$ est paire et que $x \geq x/n$).
3. Montrer que la convergence est uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}$.
4. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

Exercice On considère la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par $u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n}$ et la série de fonctions $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

1. Déterminer l'ensemble I des x tels que la série $S(x)$ converge.
2. Montrer que S converge uniformément sur tout compact de I. En déduire que S est continue sur I.
3. Montrer que S est dérivable sur I et calculer explicitement S'.
4. En déduire explicitement S sur I.

Exercice On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A. En déduire ses valeurs propres.
2. La matrice A est-elle diagonalisable ?