Université Montpellier II - L2 - HLMA312
Tous documents, calculatrices, portables interdits

Question de cours Enoncer et démontrer le théorème d'intervertion limite-intégrale pour les suites de fonctions.

Exercice Nature de la **série** de terme géneral u_n lorsque :

1. $u_n = \frac{1+n}{1+n^3}$.
2. $u_n = \frac{n^4}{(2n)!}$.
3. $u_n = \frac{(-1)^n}{ln(n)}$
4. $u_n = \frac{1+in}{n^4}$ où i est un nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

Exercice On considère la suite de fonctions f_n définie sur $I = [0, +\infty[$ par $f_n(x) = n\ln(1 + x/n)$.

1. Etudier la convergence simple de f_n sur I, on notera f 1a limite simple.
2. Dresser le tableau de variation de $f_n - f$ sur I.
3. Montrer que la convergence est uniforme sur tout compact de I.
4. La convergence est-elle uniforme sur I ?

Exercice On considère la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par $u_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ et la série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$.

1. Déterminer l'ensemble I des x tels que la série $S(x)$ converge.
2. Montrer que S converge uniformément sur tout compact de $]-1, 1[$. En déduire que S est continue sur $]-1, 1[$.
3. Montrer que S est dérivable sur $]-1, 1[$ et exprimer S' sous forme d'une série.
4. Calculer explicitement S'.
5. En déduire explicitement S sur $]-1, 1[$.

Exercice On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A. En déduire ses valeurs propres.
2. La matrice A est-elle diagonalisable. Si oui, donner une matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$.