Université Montpellier II - L2 - HLMA312
Tous documents, calculatrices, portables interdits

Question de cours Soit u_n une suite positive. Démontrer que si $u_{n+1}/u_n \to l < 1$, la série $\sum u_n$ converge.

Exercice Nature de la **série** de terme général u_n lorsque :

1. $u_n = \frac{n}{1+n^2}$.
2. $u_n = \left(\frac{2}{n}\right)^n$.
3. $u_n = (-1)^n n$
4. $u_n = \frac{e^{in^2\theta}}{n^{(3/2)}}$ où i est un nombre complexe tel que $i^2 = -1$ et θ est réel.

Exercice On considère la suite de fonctions f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}$.

1. Etudier la convergence simple de f_n sur $\mathbb{R}$, on notera f 1a limite simple.
2. Dresser le tableau de variation de $f_n - f$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$.
4. La convergence des dérivées f'_n est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

Exercice On considère la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par $u_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n}}{n}$ et la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. (On remarquera que cette série commence à $n = 1$)

1. Déterminer l'ensemble I des x tels que la série $S(x)$ converge.
2. Montrer que S converge uniformément sur tout compact de $]-1, 1[$. En déduire que S est continue sur $]-1, 1[$.
3. Montrer que S est dérivable sur $]-1, 1[$ et exprimer S' sous forme d'une série.
4. Calculer explicitement S'.
5. En déduire explicitement S sur $]-1, 1[$.

Exercice On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta \end{pmatrix}$ où θ est réel.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.
2. La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Discuter en fonction des valeurs de θ.
3. Est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?