Université Montpellier II - L2 - GLMA313
Tous documents, calculatrices, portables interdits

Question de cours Montrer que si une suite de fonction f_n converge uniformément vers f sur $[a,b]$, alors

$$lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Exercice Nature de la **série** de terme géneral u_n lorsque :

1. $u_n = \frac{n}{1+n^2}$.
2. $u_n = \frac{n!}{n^n}$.
3. $u_n = (-1)^n e^{-n^2}$

Exercice On considère la suite de fonctions f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = xe^{-nx^2}$.

1. Etudier la convergence simple et uniforme de f_n sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f_n'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$, puis la limite simple de f_n'.
3. La suite $f_n'(x)$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?
4. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge pour tout x et la calculer.

Exercice On considère la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par $u_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ et la série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$.

1. Déterminer l'ensemble I des x tels que la série $S(x)$ converge.
2. Soit $0 < a < 1$, montrer que S converge uniformément sur $[-a, a]$. En déduire que S est continue sur $]-1, 1[$.
3. Montrer que S est dérivable sur $]-1, 1[$ et exprimer S' sous forme d'une série.
4. Calculer explicitement S'.
5. En déduire explicitement S sur $]-1, 1[$.