HAX705X

Remarque sur les espaces de Banach réflexifs

On rappelle un résultat important.

Théorème : *Soit E un espace de Banach réflexif. Alors toute suite bornée de E admet une sous-suite faiblement convergente.*

La preuve de ce résultat utilise deux résultats auxilliaires :

Proposition 1 : *Soit E un espace de Banach réflexif et F un sous-espace vectoriel fermé. Alors F est réflexif.*

Proposition 2 : *Soit E un espace de Banach réflexif. Alors E est séparable si et seulement si E^* est séparable.*

La preuve de la proposition 1 se trouve dans les notes du cours (voir section 4.3).

On se propose de donner une preuve de la proposition 2. Pour cela il suffit de montrer l'implication

$$E^* \text{ séparable} \quad \Longrightarrow \quad E \text{ séparable},$$

car elle induit l'implication $E = (E^*)^*$ séparable $\quad\Longrightarrow\quad$ E^* séparable.

Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans E^*. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $x_k \in E$ tel que $\|x_k\| = 1$ et $f_k(x_k) = \|f_k\|$ (c'est une conséquence de la réflexivité). Montrons que $F := \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(x_k, k \in \mathbb{N})$ est dense dans E : cela terminera notre preuve car F est dénombrable.

Supposons le contraire : l'adhérence $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel distinct de E. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe $f \in E^*$ non nul tel que $f(x) = 0, \forall x \in \overline{F}$. Comme $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans E^*, il existe une sous-suite $(f_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers f.

Sachant que $f(x_n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\|f_{\varphi(k)}\| = |f_k(x_{\varphi(k)}) - f(x_{\varphi(k)}) \leq \|f_k - f\|, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Cela implique que $\|f\| = \lim_{k\to\infty} \|f_{\varphi(k)}\| = 0$. C'est contradictoire avec l'hypothèse $f \neq 0$.