Analyse Fonctionnelle

Franck Boyer

Master Mathématiques et Applications
Première année

Aix-Marseille Université

13 décembre 2015

Ces notes sont en construction permanente. Ne pas hésiter à signaler des erreurs ou imprécisions à l'adresse
franck.boyer@univ-amu.fr

Table des matières

Avant-Propos

On liste ci-dessous les points les plus importants du cours et qui seront donc au programme de l'examen.

- Chapitre I : Tout ce chapitre doit être connu et maîtrisé (sauf le paragraphe sur les espaces semi-normés et les espaces de Fréchet)
- Chapitre II :
  - Enoncé et preuve du théorème de point fixe de Banach. Bien comprendre les principales applications vues en cours et en TD.
  - Enoncé du théorème de Baire. Savoir l'appliquer si on vous donne les indications nécessaires..
  - Enoncé du théorème de Banach-Steinhaus. Connaître les applications classiques.
  - Enoncés des théorèmes de l'application ouverte et du théorème d'isomorphisme de Banach.
  - Enoncé du théorème du graphe fermé et savoir l'appliquer.
- Chapitre III :
  - Enoncé du théorème de Weierstrass et applications élémentaires.
  - Enoncé du théorème d'Ascoli.
- Chapitre IV :
  - Connaître les définitions, énoncés et preuves des sections I, II et III.
  - Les sections IV, V et VI **ne sont pas** au programme de l'examen.

Chapitre I

Objectifs. Rappels. Bestiaire

I Introduction

L'analyse fonctionnelle est, étymologiquement, la partie des mathématiques qui s'occupe à l'origine d'étudier les *espaces fonctionnels*, c'est-à-dire les espaces constitués de fonctions. Bien entendu, un certain nombre de propriétés que nous verrons dans ce cours ont une portée plus générale mais la majorité des exemples que nous traiterons seront effectivement des espaces de fonctions.

Pourquoi est-il nécessaire d'étudier de tels espaces : la raison principale est la résolution (théorique et pratique/algorithmique) de problèmes dont l'inconnue est une fonction. Citons plusieurs exemples que nous retrouverons dans le cours :

— **Equations différentielles ordinaires :** étant données une fonction $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ et un élément $y_0 \in \mathbb{R}^d$, trouver une fonction $t \in I \mapsto y(t) \in \mathbb{R}^d$, I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0 vérifiant $y(0) = y_0$ et qui soit solution de l'équation différentielle
$$y'(t) = F(t, y(t)), \;\; \forall t \in I.$$

— **Equations intégrales :** étant données une fonction continue $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, appelée *noyau*, et une fonction $g \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, trouver une fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ vérifiant l'équation
$$\int_0^1 k(x,y) f(y)\, dy = g(x), \;\; \forall x \in [0,1].$$
Une autre question utile dans l'étude de ce genre d'équations est le problème "aux valeurs propres" suivants : existe-t'il (et que peut-on en dire le cas échéant ?) des nombres $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou éventuellement complexes) et des fonctions $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ non identiquement nulles telles
$$\int_0^1 k(x,y) f(y)\, dy = \lambda f(x), \;\; \forall x \in [0,1].$$
On peut également s'intéresser aux modèles intégro-différentiels de la forme suivante :
$$\frac{\partial}{\partial t} f(t,x) = \int_0^1 k(x,y) f(t,y)\, dy,$$
qui interviennent en dynamique des populations et dont la résolution s'appuie sur la compréhension de l'opérateur linéaire sous-jacent.

— **Equations aux dérivées partielles :** La résolution de l'équation de la chaleur
$$\frac{\partial}{\partial t} f(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t,x),$$
peut se comprendre comme une équation différentielle linéaire de la forme
$$f'(t) = A f(t),$$
où à chaque instant t on note $f(t)$ la fonction $x \mapsto f(t,x)$ élément d'un certain espace de fonctions (à définir) et l'opérateur A est celui qui àune fonction de x associe sa dérivée partielle seconde.
L'analyse fonctionnelle (il s'agit de la théorie des *semi-groupes*) permet dans ce contexte, de justifier une résolution de l'équation sous la forme
$$f(t) = e^{tA} f(0), \;\; \forall t \geq 0,$$

formellement similaire à la résolution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants en dimension finie.

Si on s'intéresse par exemple aux solutions 2π-périodiques en x, on peut utilise la théorie des séries de Fourier permettant (sous de bonnes hypothèses que nous ne détaillons pas à ce stade) d'écrire la solution recherchée sous la forme

$$f(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_n(t)e^{inx}.$$

Au moins formellement, on trouve que f est solution de l'équation de la chaleur, si et seulement si

$$\hat{f}_n'(t) = -n^2\hat{f}_n(t),\ \ \forall n\in\mathbb{Z}, \forall t\geq 0.$$

On a donc bien "diagonalisé" le problème car on est maintenant ramenés à une simple EDO sur chacun des coefficients de Fourier $\hat{f}_n(t)$. Si on regarde $(\hat{f}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ comme élément d'un espace de suites, on voit qu'on a transformé le problème en une équation différentielle dans l'espace des suites, qui ressemble beaucoup à la situation traditionnelle de la dimension finie.

— **Approximation :** étant donnée une fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et un ensemble E de fonctions continues "simples" (par exemple des polynômes, des sommes trigonométriques), existe-t'il et peut-on caractériser la meilleure approximation de f par un élément de E ? Ce problème nécessite bien sûr de décider d'une façon de mesurer la notion de "meilleure approximation". Supposons donc donnée une norme $\|.\|$ sur $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, le problème s'écrit

$$\text{Trouver } g\in E, \text{ tel que } \ \|f-g\| = \inf_{h\in E}\|f-h\|.$$

Ces problèmes trouvent des applications dans divers domaines de l'analyse numérique (calcul approché d'intégrale, résolution approchée d'EDO et d'EDP).

Remarquons que la théorie des séries de Fourier, la théorie des ondelettes, celle des splines, etc... rentrent dans cette famille de problèmes.

— **Optimisation :** Les lois fondamentales de la mécanique se ramènent bien souvent à la caractérisation de la position d'équilibre (resp. les trajectoires) d'un système comme les positions (resp. trajectoires) qui minimisent une quantité appelée énergie du système (ou Lagrangien pour être plus précis). Il s'agit alors de montrer qu'un tel problème admet une solution, de montrer qu'elle est unique, d'en décrire les propriétés (régularité, monotonie, etc ...)

Prenons quelques exemples :

  — <u>Le problème de la membrane.</u> Si $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ désigne la surface au repos d'une membrane attachée par son bord <u>que l'on soumet à une densité</u> de forces verticales $f:\Omega\to\mathbb{R}$, on peut établir (sous des hypothèses physiques raisonnables) que le déplacement vertical de la membrane à l'équilibre $u:\Omega\to\mathbb{R}$ est l'unique fonction qui vérifie

$$E(u) = \inf_{v\in X} E(v),$$

  où X est l'ensemble des configurations possibles (disons l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ nulles sur le bord de Ω) et E est la fonctionnelle d'énergie définie par

$$E(v) = \frac{k}{2}\int_\Omega |\nabla v(x)|^2\,dx - \int_\Omega f(x)v(x)\,dx.$$

  Résoudre complètement se problème va faire intervenir des outils d'analyse fonctionnelle que nous verrons dans ce cours. Sans dévoiler le suspense, on peut déjà dire que l'essentiel de la difficulté sera de travailler sur un bon choix de l'espace X car on verra que l'espace des fonctions $\mathcal{C}^1$ n'est pas bien adapté au problème.

  — <u>Le problème de l'obstacle.</u> Une variante du problème précédent est celui de trouver la position d'équilibre <u>d'une membrane élastique</u> (ou d'une corde en dimension 1) attachée par son bord, sans force extérieure mais dont la position est contrainte par la présence d'un ou plusieurs obstacles. L'énergie de la membrane dont la position est donnée par v s'écrit maintenant

$$E_0(v) = \frac{k}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx,$$

  mais l'ensemble des configurations possibles est maintenant de la forme

$$X_{\alpha,\beta} = \{u\in\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}),\ \text{nulle au bord}\ \ \alpha\leq u\leq\beta,\},$$

  où α et β sont deux fonctions données qui représentent la position des obstacles inférieurs et supérieurs.

  En comparaison du problème précédent, la fonctionnelle à minimiser est plus simple (il n'y a pas le terme en f) mais l'espace des configurations admissibles est plus compliqué : ce n'est plus un espace vectoriel mais simplement un sous-ensemble convexe. On verra que la convexité est une notion très importante en analyse fonctionnelle.

— Le problème des rayons lumineux. On cherche la trajectoire d'un rayon lumineux qui va d'un point $A \in \mathbb{R}^3$ à un point $B \in \mathbb{R}^3$, sachant que l'indice du milieu en tout point de l'espace est donné par une fonction $x \mapsto n(x) \in \mathbb{R}_*^+$ (cette indice caractérise la facilité avec laquelle la lumière se propage dans le milieu). Le principe de moindre action de Fermat nous dit que la trajectoire empruntée par le rayon sera celle qui minimise (ou plus exactement qui rend stationnaire ...) la quantité

$$L(u) = \int_0^1 n(u(t))|u'(t)|\,dt,$$

parmi toutes les fonctions $u \in \mathcal{C}^1([0,T], \mathbb{R}^3)$ qui vérifient $u(0) = A$ et $u(1) = B$. Ici $|.|$ désigne la norme euclidienne usuelle dans $\mathbb{R}^3$.

— **Utilisation des propriétés de densité :** Pour montrer certains résultats concernant une fonction f donnée, il est parfois utile de regarder le problème avec du recul en se plaçant dans un espace fonctionnel adapté et en utilisant des propriétés de densité de certains sous-classes de fonction. Ainsi, on est ramenés à démontrer la propriété souhaitée pour des fonctions plus simples.

Quelques exemples que l'on peut attaquer par cette approche :

— Lemme de Riemann-Lebesgue : si $f \in L^1(]0,1[)$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(t)e^{int}\,dt = 0,$$

ce qui montre que les coefficients de Fourier de f tendent vers 0.

— Un théorème de type ergodique : Soit $\alpha \notin \mathbb{Q}$, et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et 1-périodique. Alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_0 + n\alpha) = \int_0^1 f(t)\,dt.$$

— Continuité des translations sur L^p : Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, alors on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x+h) - f(x)|^p\,dx \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

II Espaces métriques. Espaces vectoriels normés.

II.1 Espaces métriques

II.1.a Définitions de base

Définition I.1 (Distance, espace métrique)

Soit X un ensemble non vide. Une application $d : X \times X \to \mathbb{R}$ est appelée distance sur X *si elle vérifie*

1. *Positivité :*
$$d(x,y) \geq 0,\ \forall x,y \in X.$$
2. *Séparation :*
$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$
3. *Symétrie :*
$$d(x,y) = d(y,x),\ \forall x,y \in X.$$
4. *Inégalité triangulaire :*
$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y),\ \forall x,y,z \in X.$$

On dit que le couple (X,d) est un espace métrique.

Attention : Bien qu'on utilise le mot *espace*, l'ensemble X n'est pas absolument tenu de posséder une structure d'espace vectoriel.

L'exemple standard est l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ que l'on munit de sa distance *canonique* fabriquée à partir de la valeur absolue : $d(x,y) = |x-y|$. Mais aussi $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, munis de la distance euclidienne qui n'est autre que celle que l'on mesure avec des règles en plastique depuis notre tendre enfance ...

Définition I.2 (Boules et Sphères)

Soit (X, d) un espace métrique.

- *Pour $a \in X$ et $r \geq 0$, on définit les ensembles suivants*

$$B(a, r) = \{x \in X, d(x, a) < r\}, \text{ boule ouverte de centre } a \text{ et de rayon } r,$$

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in X, d(x, a) \leq r\}, \text{ boule fermée de centre } a \text{ et de rayon } r,$$

$$S(a, r) = \overline{B}(a, r) \setminus B(a, r) = \{x \in X, d(x, a) = r\}, \text{ sphère de centre } a \text{ et de rayon } r.$$

- *Une partie $U \subset X$ est dite ouverte si*

$$\forall a \in U, \exists r > 0, \text{ t.q. } B(a, r) \subset U.$$

- *Une partie $F \subset X$ est dite fermée si son complémentaire $F^c = X \setminus F$ est ouvert.*
- *Une partie $A \subset X$ est dite bornée si*

$$\exists M > 0, \ \forall x, y \in A, \ d(x, y) \leq M.$$

Les définitions ci-dessus donnent à (X, d) une structure topologique :

Proposition I.3 (Espace métrique $\Rightarrow$ Espace topologique)

Soit (X, d) un espace métrique.

- *X et $\emptyset$ sont à la fois ouverts et fermés.*
- *Toute réunion quelconque d'ouverts est ouverte.*
- *Toute intersection* **finie** *d'ouverts est ouverte.*
- *Toute réunion* **finie** *de fermés est fermée.*
- *Toute intersection quelconque de fermés est fermée.*

L'ensemble τ de tous les ouverts de (X, d) est appelée **topologie** *sur X associée à la distance d.*
On peut vérifier qu'en général, les hypothèses de finitude dans les assertions précédentes sont nécessaires.

Définition I.4 (Distance d'un point à un ensemble)

Pour toute partie non vide A de X, et tout point $x \in X$, on définit la distance de x à l'ensemble A par

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y).$$

Définition I.5 (Suites convergentes)

On dit qu'une suite $(x_n)_n$ converge vers une limite x dans l'espace métrique (X, d) si et seulement si on a

$$\lim_{n \to +\infty} d(x_n, x) = 0.$$

Si la limite d'une suite existe, elle est nécessairement unique.

Définition et Proposition I.6 (Equivalence entre distances)

Soit X un ensemble. Deux distances d_1 et d_2 sur X sont dites :
- *Topologiquement équivalentes : si elles définissent la même topologie sur X.*
- *Uniformément équivalentes : si pour tout $R > 0$, il existe $r > 0$ tel que*
$$\forall x \in X, B_{d_1}(x,r) \subset B_{d_2}(x,R), \text{ et } B_{d_2}(x,r) \subset B_{d_1}(x,R).$$
- *Lipschitz équivalentes : s'il existe deux constantes $\alpha, \beta > 0$ telles que*
$$\alpha d_1 \leq d_2 \leq \beta d_1.$$

On a les implications immédiates suivantes
$$\textit{Lipschitz équivalentes} \Rightarrow \textit{Uniformément équivalentes} \Rightarrow \textit{Topologiquement équivalentes}.$$

La quasi-totalité des topologies rencontrées dans ce cours seront de nature métrique. Même si ce n'est pas toujours visible au premier coup d'oeil, on pourra souvent s'y ramener. C'est l'objet de la définition suivante.

Définition I.7 (Espace métrisable)

Un espace topologique (X, τ) est dit métrisable, s'il existe une distance d sur X qui définit la même topologie que la topologie initiale τ (c'est-à-dire les mêmes ouverts, et donc les mêmes fermés).

Définition et Proposition I.8 (Intérieur, fermeture, densité)

Soit A une partie d'un espace métrique (X, d).
- *La réunion de tous les ouverts contenus dans A est aussi le plus grand (au sens de l'inclusion) ouvert contenu dans A. On l'appelle l'intérieur de A et on le note $\overset{\circ}{A}$.*
- *L'intersection de tous les fermés contenant A est aussi le plus petit (au sens de l'inclusion) fermé qui contient A. On l'appelle la fermeture (ou adhérence) de A et on la note $\overline{A}$.*
- *On dit que A est dense dans X si $\overline{A} = X$.*

Définition I.9 (Séparabilité)

Un espace métrique (X, d) est séparable s'il existe une partie A de X qui soit à la fois **dénombrable** *et* **dense** *dans X.*

Proposition I.10 (Sous-espace métrique)

Soit (X, d) un espace métrique et $Y \subset X$ une partie de X. La restriction de la distance d à $Y \times Y$ est une distance sur Y qui confère à celui-ci une structure canonique d'espace métrique.
Les ouverts de (Y, d) sont les intersections des ouverts de (X, d) avec Y. Les fermés de (Y, d) sont les intersections des fermés de (X, d) avec Y.

Regardons quelques exemples :
- On prend $X = (\mathbb{R}, |.|)$ et $Y = [0, 1[$. On a alors par exemple :

	dans X	dans Y
$]0, 1[$	ouvert	ouvert
$[0, 1/2]$	fermé	fermé
$[1/2, 1[$	ni ouvert ni fermé	fermé

- Prenons maintenant toujours $X = (\mathbb{R}, |.|)$ et $Y = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. On a alors :

	dans X	dans Y
$]-\infty, 0[$	ouvert	ouvert **et** fermé
$]-1, 0[$	ouvert	ouvert

II.1.b Espaces compacts

Définition I.11 (Compacité)

Soit (X, d) un espace métrique.

- *(X, d) est dit* **compact** *si pour toute famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ vérifiant $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ (on dit que cette famille est un recouvrement ouvert de X), il existe une partie finie $J \subset I$ telle que $X = \bigcup_{i\in J} U_i$ (c'est un sous-recouvrement fini de X).*
- *Une partie $Y \subset X$ est dite compacte, si l'espace métrique (Y, d) est compact. Ce qui revient à dire que pour toute famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts de X telle que $Y \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, il existe une sous-famille finie $J \subset I$ telle que $Y \subset \bigcup_{i\in J} U_i$.*

Proposition I.12

Soit (X, d) un espace métrique et A est une partie de X.

- *On a l'implication*
$$A \text{ est compacte} \Longrightarrow A \text{ est fermée}.$$
- *Si on suppose que X est compact alors on a l'équivalence*
$$A \text{ est compacte} \Longleftrightarrow A \text{ est fermée}.$$

Preuve :

- On veut montrer que $B = A^c$ est ouvert. Soit donc b un point de B.
Comme b n'est pas dans A, on a bien $\forall a \in A, d(a, b) > 0$. On a donc un recouvrement ouvert de A défini par
$$A \subset \bigcup_{a\in A} B(a, d(a, b)/2).$$
Comme A est compacte, on peut trouver un sous-recouvrement fini de se recouvrement ouvert, ce qui signifie qu'il existe $a_1, ..., a_N$ dans A tels que
$$A \subset \bigcup_{n=1}^{N} B(a_n, d(a_n, b)/2). \tag{I.1}$$
On pose maintenant $r = \min_{1\leq n\leq N} d(a_n, b)/2$ qui est bien un nombre strictement positif (c'est ici qu'on ce sert de façon cruciale de la finitude des a_n !).
Par définition de r et par inégalité triangulaire, on montre aisément que
$$B(a_n, d(a_n, b)/2) \cap B(b, r) = \emptyset, \quad \forall n = 1, ..., N.$$
Donc, grâce à (I.1), on a bien montré que $B(b, r)$ n'intersecte pas A, ce qui est équivalent à dire que cette boule est contenue dans le complémentaire de A c'est-à-dire B.
Ceci étant vrai, pour tout élément b de B, on a bien montré que B est ouvert et donc que A est fermé.
- Supposons X compact et A fermé. Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de X qui recouvre A. Comme A est fermé, son complémentaire est ouvert et on a donc
$$X = A^c \cup \left(\bigcup_{i\in I} U_i\right).$$
Par compacité de X, on peut extraire un sous-recouvrement fini de ce recouvrement ouvert (et on peut toujours supposer qu'il contient l'ouvert A^c), ce qui prouve que pour $J \subset I$ fini on a
$$X = A^c \cup \left(\bigcup_{i\in J} U_i\right),$$
ce qui prouve *in fine* que
$$A \subset \bigcup_{i\in J} U_i,$$
et conclut la preuve.

■

Proposition I.13

> *Tout espace métrique compact est borné et séparable.*

Preuve :

Soit (X, d) un métrique compact.

— On fixe un point $a \in X$ et on vérifie sans peine l'égalité

$$X = \bigcup_{r>0} B(a, r).$$

Il s'agit manifestement d'un recouvrement ouvert de X (par des ouverts emboîtés d'ailleurs) dont on peut donc extraire un sous-recouvrement fini par compacité. Comme les boules en question sont emboîtées, cela revient à dire qu'il existe un $R > 0$ tel que

$$X = B(a, R).$$

Ceci montre que pour tout $x \in X, d(x, a) < R$ et donc par inégalité triangulaire

$$d(x, y) < 2R, \quad \forall x \neq y.$$

— Pour tout $n \geq 1$, on recouvre X par l'ensemble des boules ouvertes de rayon $1/n$

$$X = \bigcup_{x \in X} B(x, 1/n).$$

La compacité nous montre qu'il existe une partie **finie** X_n de X telle que

$$X = \bigcup_{x \in X_n} B(x, 1/n).$$

On pose alors

$$A = \bigcup_{n \geq 1} X_n,$$

qui est une union dénombrable de parties finies, c'est donc un ensemble dénombrable.

Vérifions que A est dense dans X. Supposons que ça n'est pas vrai ; il existe donc un élément $y \in X$ qui n'appartient pas à $\overline{A}$. Il existe donc $r > 0$ tel que $B(y, r) \subset A^c$. On fixe alors $n_0 \geq 1$ tel que $1/n_0 < r$. Par construction, nous avons

$$y \in X = \bigcup_{x \in X_{n_0}} B(x, 1/n_0),$$

et donc il existe $x \in X_{n_0} \subset A$ tel que $y \in B(x, 1/n_0)$ ce qui montre que $x \in B(y, 1/n_0)$. Ceci est absurde car

$$B(y, 1/n_0) \subset B(y, r) \subset A^c.$$

■

On a donc vu dans les deux résultats précédents que les compacts étaient des fermés bornés. Une des difficultés majeures de l'analyse fonctionnelle provient du fait qu'en général, les fermés bornés (qui sont assez aisés à caractériser) ne sont pas tous compacts.

Proposition I.14 (Compacts de $\mathbb{R}$. Exercice 2 du TD1)

> *Les compacts de $\mathbb{R}$ sont exactement les fermés bornés.*
> *On verra plus loin qu'il en est de même dans $\mathbb{R}^d$ muni de n'importe quelle norme (Théorème I.55).*

En particulier, on utilise souvent que, pour tout compact A de $\mathbb{R}$, on a

$$\sup(A) \in A, \quad \text{et} \quad \inf(A) \in A,$$

c'est-à-dire qu'il existe un unique plus grand (resp. plus petit) élément dans A. Sauriez-vous le démontrer ?

II.1.c Fonctions continues, uniformément continues, Lipschitziennes

Définition I.15 (Fonctions continues)

Soient (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques et $f : X \to Y$ une fonction. On dit que f est continue en un point $a \in X$, si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists \delta > 0,\ \ \forall x \in X, d(x, a) \leq \delta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) \leq \varepsilon.$$

Ceci est équivalent à dire que, pour toute boule ouverte $B' \subset Y$ contenant $f(a)$, il existe une boule ouverte $B \subset X$ contenant a telle que $f(B) \subset B'$.
Si f est continue en tout point de X, on dit simplement que f est continue et on note $f \in \mathcal{C}^0(X, Y)$.

On vérifie aisément que f est continue sur X si et seulement si l'image réciproque par f de tout ouvert (resp. fermé) de (Y, d') est un ouvert (resp. fermé) de (X, d).

La compacité est un outil fondamental pour obtenir l'existence d'éléments particulier de l'espace étudié, par exemple en optimisation ; dans cette direction le résultat de base est le suivant.

Théorème I.16

Soient (X, d), (Y, d') deux espaces métriques et $f : X \to Y$ une fonction continue. Alors l'image de tout compact A de X par f est un compact de Y, ce que l'on résume en

$$A \text{ compact } \Rightarrow f(A) \text{ est compact}.$$

Cas particulier fondamental : si $(Y, d') = (\mathbb{R}, |.|)$, on dit alors que f est une fonction numérique (puisqu'elle associe un nombre à tout point de X), le résultat devient

Sur tout compact A de X, f est bornée et atteint ses bornes sur A,

ou encore

$$\exists \bar{a} \in A,\ \ f(\bar{a}) = \sup_A f < +\infty,$$
$$\exists \underline{a} \in A,\ \ f(\underline{a}) = \inf_A f > -\infty.$$

Preuve :

— Soit $(V_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $f(A)$ dans Y. On déduit des propriétés immédiates des préimages que la famille $(f^{-1}(V_i))_{i\in I}$ est un recouvrement de A. Par ailleurs, comme f est continue et que chaque V_i est un ouvert de Y, on a que chaque $f^{-1}(V_i)$ est un ouvert de X. On dispose donc maintenant d'un recouvrement ouvert du compact A, on peut donc en trouver un sous-recouvrement fini $(f^{-1}(V_i))_{i\in J}$, $J \subset I$ fini. En reprenant l'image par f, il vient
$$f(A) \subset \bigcup_{i\in J} f(f^{-1}(V_i)) \subset \bigcup_{i\in J} V_i,$$
ce qui constitue un sous-recouvrement fini extrait du recouvrement initial de $f(A)$.

— Si $(Y, d') = (\mathbb{R}, |.|)$, on a vu que les compacts de $\mathbb{R}$ sont des fermés bornés et vérifient que leurs bornes inférieure et supérieure appartiennent à l'ensemble considéré. Ceci donne exactement le résultat annoncé.

■

Bien entendu, ce résultat ne dit rien sur l'éventuelle unicité des points $\bar{a}$ et $\underline{a}$; c'est une question qu'il faudra traiter éventuellement par d'autres outils.

Certaines propriétés plus fines que la continuité sont parfois nécessaires, ou plus simples à vérifier.

Définition I.17 (Fonctions uniformément continues)

Soient (X, d), (Y, d') deux espaces métriques et $f : X \to Y$ une fonction. On dit que f est uniformément continue (sur X) si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in X, \text{ tels que } d(x, y) \leq \delta, \text{ on a } d'(f(x), f(y)) \leq \varepsilon,$$

autrement dit si l'image de toute boule de X de rayon δ par f est contenue dans une boule de rayon ε de Y.
On notera $f \in \mathcal{UC}^0(X, Y)$.

Définition I.18 (Fonctions Lipschiztiennes, contractantes)

Soient (X, d), (Y, d') deux espaces métriques et $f : X \to Y$ une fonction. On dit que f est Lipschitzienne sur X, s'il existe une constante $M \geq 0$ telle que

$$d'(f(x), f(y)) \leq M d(x, y), \;\; \forall x, y \in X.$$

On dit aussi que f est M-Lipschitzienne.
La plus petite constante M vérifiant cette inégalité est appelée la constante de Lipschitz de f, notée $\mathrm{Lip}(f)$ et vérifie

$$\mathrm{Lip}(f) = \sup_{x \neq y} \frac{d'(f(x), f(y))}{d(x, y)}.$$

On dit que f est contractante si elle vérifie $\mathrm{Lip}(f) < 1$.

Proposition I.19

- *Toute fonction uniformément continue est continue.*
- *Toute fonction Lipschitzienne est uniformément continue et donc continue.*
- *Pour tout point $a \in X$, la fonction $x \in X \mapsto d(x, a)$ est 1-Lipschitzienne, donc en particulier continue.*
- *Pour toute partie A non vide de X, l'application $x \mapsto d(x, A)$ est 1-Lipschitzienne (voir la définition I.4).*

Preuve :

- Cette première propriété est claire, il suffit d'échanger deux quantificateurs dans les définitions.
- Si f est Lipschitzienne, on a l'inégalité
$$d'(f(x), f(y)) \leq \mathrm{Lip}(f) d(x, y), \;\; \forall x, y \in X,$$
de sorte que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut poser $\delta = \varepsilon / \mathrm{Lip}(f)$ et vérifier que la définition des fonctions uniformément continues est satisfaite.
- Il s'agit juste d'une double application de l'inégalité triangulaire
$$d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a),$$
$$d(y, a) \leq d(x, y) + d(x, a),$$
qui fournit le résultat attendu
$$|d(x, a) - d(y, a)| \leq d(x, y).$$
- On part à nouveau de l'inégalité triangulaire en écrivant, pour tous $x, y \in X$ et $a \in A$
$$d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a),$$
puis en prenant l'infimum par rapport à $a \in A$ et ainsi obtenir
$$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A).$$
En échangeant les rôles de x et y, on obtient le résultat souhaité.

■

Attention, les notions de fonctions uniformément continues/Lipschitziennes/contractantes sont de nature métrique (elles dépendent très fortement de la distance considérée) alors que la notion de fonction continue est une notion topologique. La situation est résumée dans le diagramme de la figure I.1.

Examinons maintenant quelques conditions permettant de dire que les fonctions continues sont uniformément continues. Le premier résultat est très général, puis on en donne deux exemples.

Théorème I.20 (de Heine)

Soient (X, d), (Y, d') deux espaces métriques. Si X est compact et que $f : X \to Y$ est une fonction continue, alors elle est uniformément continue.

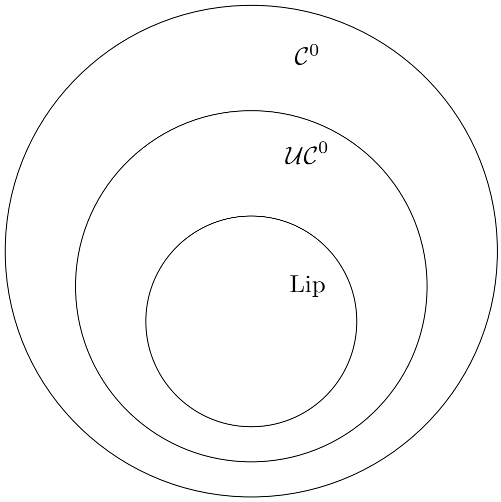


FIGURE I.1 – Quelques classes de fonctions continues

Preuve :

Plusieurs démonstrations sont possibles. Nous allons ici utiliser la caractérisation séquentielle de la compacité. On met en place un raisonnement par l'absurde en supposant que f n'est pas uniformément continue. Il existe donc un $\varepsilon > 0$ (qui sera fixé dans tout le reste de la preuve) tel que

$$\forall \delta > 0,\ \ \exists x, y \in X,\ \text{tels que } d(x, y) \leq \delta,\ \text{et } d'(f(x), f(y)) > \varepsilon.$$

Dans cette assertion les points x et y dépendent bien sûr de la valeur de δ choisie. Appliquons ceci à $\delta = 1/n$ pour tout n. On en déduit l'existence de deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ vérifiant pour tout n,

$$d(x_n, y_n) \leq 1/n,\ \text{et } d'(f(x_n), f(y_n)) > \varepsilon.$$

Comme $(x_n)_n$ est une suite du compact X, on peut en extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers une limite notée x (voir la Proposition I.21). Par inégalité triangulaire, nous avons

$$d(y_n, x) \leq d(y_n, x_n) + d(x_n, x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

et donc $(y_n)_n$ converge aussi vers x.

Comme f est une fonction continue, $(f(x_n))_n$ et $(f(y_n))_n$ convergent toutes les deux vers la même limite : $f(x)$. Ceci prouve, en particulier que

$$\lim_{n\to+\infty} d'(f(x_n), f(y_n)) = 0,$$

ce qui contredit que $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$ pour tout n. ■

II.1.d Caractérisations séquentielles des propriétés topologiques dans un espace métrique

Dans un espace métrique, la plupart des propriétés peuvent se *lire* sur le comportement des suites de cet espace (ceci est faux dans un espace topologique plus général mais ce n'est pas l'objet de ce cours).

Proposition I.21

Soit (X, d) un espace métrique.

1. *Une partie F de X est fermée si et seulement si toutes les suites d'éléments de F qui convergent dans X ont leur limite qui appartient à F.*
2. *Une partie A de X est dense dans X si et seulement si, pour tout élément $x \in X$, il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x.*
3. **Théorème de Bolzano-Weierstrass :** *Une partie A de X est compacte si et seulement si, de toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de A, on peut extraire une sous-suite qui converge dans A (on dit que A est séquentiellement compact).*
4. *Si $f : X \to Y$, avec (Y, d') un espace métrique, alors f est continue si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de X qui converge vers une limite notée x, on a*

$$f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x).$$

Preuve :

1. — Supposons que F est fermée et soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de F qui converge vers un point $x \in X$. On veut montrer que $x \in F$. Supposons que ce n'est pas le cas, x serait alors un élément de l'ouvert F^c, il existerait donc $r > 0$ tel que
$$B(x, r) \subset F^c.$$
Or nous avons $d(x_n, x) \to 0$ et donc il existe un n_0 tel que $d(x_{n_0}, x) < r$, i.e. $x_{n_0} \in B(x, r) \subset F^c$. Ceci contredit le fait que $x_{n_0} \in F$.
   — Supposons maintenant la propriété sur les suites convergentes de F vérifiée. On veut montrer que F^c est ouvert. Il faut donc trouver un $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset F^c$. Raisonnons par l'absurde en niant cette propriété. Cela signifie que pour toute valeur de r aussi petite soit elle, il existe un élément de la boule $B(x, r)$ qui n'est pas dans F^c, ce qui signifie qu'il est dans F. En particularisant ceci à des r de la forme $1/n$, on construit ainsi une suite qui vérifie
$$\forall n \geq 0, \;\; x_n \in F \cap B(x, 1/n).$$
La suite $(x_n)_n$ est donc une suite d'élements de F qui vérifie $d(x_n, x) < 1/n$, ce qui montre qu'elle converge vers x. Par hypothèse, cela implique que $x \in F$ ce qui contredit l'hypothèse initiale.
2. Il suffit de montrer par un raisonnement du même type que précédemment que l'adhérence de n'importe quel ensemble A est égal à l'ensemble des limites possibles des suites convergentes d'éléments de A.
3. — Supposons que A est séquentiellement compact. Montrons que pour tout $r > 0$, A peut être recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de rayon $r > 0$ (on dit que A est précompact, voir la Définition I.30). Si cela n'était pas vrai, il existerait $r > 0$ tel que A ne peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon r. Il est donc aisé de construire par récurrence une suite $(x_n)_n$ d'éléments de A en partant d'un $x_1 \in A$ quelconque puis en imposant.
$$x_{n+1} \notin \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r), \;\; \forall n \geq 1.$$
Cette suite vérifie par construction
$$d(x_n, x_m) \geq r, \;\; \forall n \neq m.$$
Mais l'hypothèse donne l'existence d'une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers un certain x. On a alors
$$r \leq d(x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(n+1)}) \leq d(x_{\varphi(n)}, x) + d(x, x_{\varphi(n+1)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$
ce qui est absurde.
Soit maintenant $(U_i)_i$ une famille quelconque d'ouverts de X qui recouvre A. Montrons qu'il existe un $r > 0$ tel que
$$\forall x \in A, \;\; \exists i_x \in I, \;\; B(x, r) \subset U_{i_x}.$$
Encore une fois on raisonne par l'absurde. Si cette propriété était fausse, on pourrait trouver, pour tout $n \geq 1$, un élément $x_n \in A$ tel que
$$B(x_n, 1/n) \;\text{ n'est entièrement incluse dans aucun des } U_i. \tag{I.2}$$
Par hypothèse, on peut trouver une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers un certain $x \in A$. Comme les $(U_i)_{i\in I}$ recouvrent A, il existe un $i_0 \in I$ tel que $x \in U_{i_0}$ et comme U_{i_0} est un ouvert, il existe un $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U_{i_0}$. Prenons maintenant un n assez grand pour que $d(x_n, x) < r/2$ et $1/n < r/2$ et observons que pout tout $y \in B(x_n, 1/n)$ on a
$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) < r/2 + 1/n < r,$$
ce qui montre que
$$B(x_n, 1/n) \subset B(x, y) \subset U_{i_0}.$$
ceci contredit (I.2).
   — Réciproquement, supposons que A est compact et montrons qu'il est séquentiellement compact. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de A. Pour tout $N \geq 1$, on pose $F_N = \overline{\{x_n, n \geq N\}}$ qui est un fermé non vide de A (qui est lui-même fermé). On va montrer que l'intersection de tous les F_N est non vide. Supposons que ce ne soit pas le cas, on a donc
$$\bigcap_{N\geq 1} F_N = \emptyset.$$
Par passage au complémentaire on a donc
$$X = \bigcup_{N\geq 1} F_N^c,$$

et en particulier les ouverts F_N^c recouvrent le compact A. On peut donc trouver un sous-recouvrement fini de ce recouvrement. Mais comme les F_N sont emboités, cela signifie qu'il existe une valeur de N telle que

$$A \subset F_N^c,$$

ou encore

$$F_N \subset A^c,$$

ce qui n'est pas possible vu que, par exemple, x_N est un élément de A qui est clairement aussi un élément de F_N.

On conclut de tout cela que l'intersection de tous les fermés F_N est non vide. Autrement dit, il existe au moins un élément $x \in X$ vérifiant

$$x \in \bigcap_{N\geq 1} F_N. \tag{I.3}$$

On va montrer, pour conclure, qu'il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ telle que $d(x_{\varphi(n)}, x) \leq 1/n$.

On pose arbitrairement $\varphi(0) = 0$ et on suppose avoir construit $\varphi(1) < ... < \varphi(n)$ vérifiant les inégalités souhaitées. D'après (I.3), on a

$$x \in F_{\varphi(n)+1} = \overline{\{x_k, k \geq \varphi(n) + 1\}},$$

ce qui montre en particulier qu'il existe $\varphi(n+1) \geq \varphi(n) + 1$ tel que $d(x, x_{\varphi(n+1)}) \leq 1/n$ et le résultat est démontré.

4. Il est clair que si f est continue sur X, alors la propriété de continuité séquentielle est vraie. Montrons la propriété réciproque.

   Soit a un point de X. Supposons que f ne soit pas continue en a. Par définition, cela signifie qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\delta > 0$, il existe au moins un $x \in X$ tel que

$$d(x, a) \leq \delta, \ \text{ et } \ d'(f(x), f(a)) \geq \varepsilon.$$

   Appliquons ceci à $\delta = 1/n$ pour tout $n \geq 1$. Ceci nous construit une suite $(x_n)_n$ telle que

$$d(x_n, a) \leq 1/n, \ \text{ et } \ d'(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon.$$

   Ceci prouve que $(x_n)_n$ converge vers a et par hypothèse, on en déduit que $f(x_n)$ converge vers $f(a)$ et donc $d'(f(x_n), f(a)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ce qui est une contradiction.

■

On conclut cette section par un résultat souvent utile et une de ses applications.

Proposition I.22

Soit (X, d) un espace métrique compact et $(x_n)_n$ une suite d'éléments de X. Si cette suite possède une unique valeur d'adhérence (notée x) dans X, alors elle converge vers x.

Preuve :

Supposons que $(x_n)_n$ ne converge par vers x. Il existe donc $\varepsilon > 0$ et une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ qui vérifie

$$d(x_{\varphi(n)}, x) \geq \varepsilon, \ \forall n \geq 0. \tag{I.4}$$

La suite $(x_{\varphi(n)})_n$ est une suite du compact X. Elle admet donc une sous-suite convergente $(x_{\varphi\circ\psi(n)})_n$. Par hypothèse la limite de cette suite ne peut être que x. On a donc

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_{\varphi\circ\psi(n)}, x) = 0,$$

ce qui contredit (I.4) et prouve donc le résultat. ■

II.1.e Suites de Cauchy. Complétude.

Définition I.23

Soit $(x_n)_n$ une suite dans un espace métrique (X, d). On dit que $(x_n)_n$ est de Cauchy si elle satisfait

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \geq 0, \ \textit{t.q.} \ \forall n \geq n_0, \forall p \geq 0, \ \ d(x_n, x_{n+p}) \leq \varepsilon.$$

Autrement dit, une suite de Cauchy est une suite dont les éléments sont arbitrairement proches à partir d'un certain rang. En effet, on peut aisément montrer qu'une suite est de Cauchy si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une boule B_ε (ouverte ou fermée, cela ne change rien) de rayon ε (dont le centre n'est pas précisé mais dépend possiblement de ε) qui contient tous les élements de la suite à partir d'un certain rang

$$\exists n_0 \geq 0, \text{ t.q. } \forall n \geq n_0,\ x_n \in B_\varepsilon.$$

La remarque essentielle concernant les suites de Cauchy est la suivante.

Proposition I.24

Dans un espace métrique (X, d) toute suite convergente est de Cauchy.

Preuve :

Soit $(x_n)_n$ une suite qui converge vers une limite x. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on peut trouver n_0 tel que $d(x_n, x) \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. Ainsi, si $n \geq n_0$ et $p \geq 0$, on a par inégalité triangulaire

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq d(x_n, x) + d(x, x_{n+p}) \leq 2\varepsilon.$$

Ceci montre bien que la suite est de Cauchy. ■

L'intuition semble faire penser que l'a réciproque devrait aussi être vraie : une suite de Cauchy, dont les éléments sont donc arbitrairement proches les uns des autres à partir d'un certain rang, doit nécessairement être convergente. L'intérêt de la chose étant que, pour une suite donnée le critère de Cauchy peut se vérifier uniquement à partir de la connaissance des éléments de la suite, alors que la définition de la convergence de la même suite nécessite une connaissance *a priori* de sa limite.

Malheureusement, cette intuition n'est pas toujours vraie, ce qui nous amène à introduire la notion fondamentale suivante.

Définition I.25 (Espaces métriques complets)

Un espace métrique (X, d) est dit complet *si toute suite de Cauchy dans (X, d) est convergente.*

Remarque I.26

Il est bien souvent utile de remarquer que dans n'importe quel espace métrique (X, d) les suites de Cauchy sont toujours bornées. En effet, d'après la définition (appliquée avec $\varepsilon = 1$), nous avons pour un certain $n_0 \geq 0$,

$$\forall n \geq n_0, \forall p \geq 0, d(x_{n+p}, x_n) \leq 1.$$

Ainsi, si l'on pose $M = \max(1, d(x_0, x_{n_0}), ..., d(x_{n_0-1}, x_{n_0}))$ nous avons

$$\forall n \geq 0,\ \ d(x_n, x_{n_0}) \leq M,$$

et donc par inégalité triangulaire

$$\forall n \geq 0, \forall m \geq 0,\ \ d(x_n, x_m) \leq 2M.$$

Remarque I.27

La complétude (et la notion de suite de Cauchy) est une notion purement métrique ! Deux distances différentes d_1 et d_2 peuvent définir la même topologie sur X avec (X, d_1) complet et (X, d_2) non complet.

Malgré cette remarque, une propriété topologique peut impliquer une propoiété métrique.

Proposition I.28

Tout espace métrique compact est complet.

Preuve :

Soit (X, d) un espace métrique compact et $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans X. Par compacité, on sait qu'il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ qui converge dans X vers une limite notée x. Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Par définition de la notion de suite de Cauchy et de la convergence de la sous-suite, on peut trouver un n_0 tel que

$$d(x_n, x_m) \leq \varepsilon, \;\; \forall n \geq n_0,$$

$$d(x_{\varphi(n)}, x) \leq \varepsilon, \;\; \forall n \geq n_0.$$

Comme $\varphi(n) \geq n$ pour tout n, on en déduit que, pour tout $m \geq n_0$, on a

$$d(x_m, x) \leq d(x_m, x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}, x) \leq 2\varepsilon,$$

et le résultat est démontré. ■

Proposition I.29

Soit (X, d) un espace métrique et $Y \subset X$ une partie de X. On a les propriétés suivantes :

1. *Si (Y, d) est complet alors Y est fermé dans (X, d).*
2. *Si (X, d) est complet et Y est fermé dans (X, d), alors (Y, d) est complet.*

Preuve :

1. On suppose que (Y, d) est complet. Si $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de Y qui converge dans X (vers une limite notée x), alors elle est de Cauchy dans X et donc dans Y (puisque la distance sur Y est la restriction de celle sur X). Comme (Y, d) est complet, on sait que la suite $(x_n)_n$ converge dans Y. Par unicité de la limite, cela montre que $x \in Y$ et donc que Y est fermé.
2. Supposons que (X, d) est complet et que Y est fermé dans X. Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans Y. Celle-ci est également de Cauchy dans X, et comme X est complet, elle est convergente dans X. On utilise maintenant le caractère fermé de Y pour déduire que la limite de cette suite est nécessairement dans Y, ce qui termine la preuve.

■

Dans un espace complet, on possède une caractérisation utile des compacts.

Définition I.30 (Espaces précompacts)

On dit qu'un espace métrique (X, d) est **précompact** *si, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut le recouvrir par un nombre* **fini** *de boules de rayon ε, i.e. s'il existe un nombre* **fini** *de points $x_1, ..., x_n \in X$ tels que*

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon).$$

Proposition I.31

Soit (X, d) un espace métrique. On a les propriétés suivantes :

1. *Si (X, d) est compact, alors il est précompact.*
2. *Si (X, d) est précompact, alors toute suite de points de X admet une sous-suite de Cauchy.*
3. *Si (X, d) est complet et précompact, alors (X, d) est compact.*

Preuve :

1. Il est clair que l'on peut toujours recouvrir X par l'union de toutes les boules ouvertes de rayon ε dans X

   $$X = \bigcup_{x \in X} B(x, \varepsilon),$$

   et comme X est compact (et que les boules ouvertes sont ouvertes), on peut en trouver un sous-recouvrement fini, ce qui prouve le résultat.
2. Soit $(x_n)_n$ une suite de points de X.

   On commence par recouvrir X par un nombre fini de boules de rayon 1. Par le principe des tiroirs (ou principe de Dirichlet), au moins une de ces boules (dont on note y_1 le centre) contient une infinité de termes de la suite. Il existe donc une extractrice $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que

   $$x_{\varphi_1(n)} \in B(y_1, 1), \;\; \forall n.$$

On recouvre maintenant X par un nombre fini de boules de rayon $1/2$. Au moins une de ces boules (dont on note y_2 le centre) contient une infinité de termes de la suite $(x_{\varphi_1(x)})_n$. Il existe donc une nouvelle extractrice φ_2 vérifiant

$$x_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)} \in B(y_2, 1/2),\ \forall n.$$

Par récurrence, on construit donc des extractrices φ_k et des points y_k tels que

$$x_{\varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_k(n)} \in B(y_k, 1/k),\ \ \forall n. \tag{I.5}$$

On utilise maintenant le processus d'extraction diagonal qui consiste à considérer la nouvelle extractrice ψ définie par

$$\psi(n) = \varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_n(n).$$

Un simple calcul (qu'il faut faire une fois dans sa vie ...) montre que ψ est bien strictement croissante. Par la propriété (I.5), on observe que pour tout $n \geq k$, on a

$$x_{\psi(n)} = x_{\varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_k\big((\varphi_{k+1} \circ \ldots \varphi_n)(n)\big)} \in B(y_k, 1/k),$$

et donc, en particulier

$$d(x_{\psi(n)}, x_{\psi(k)}) \leq 1/k,\ \forall n \geq k.$$

Ceci prouve bien que la suite extraite $(x_{\psi(n)})_n$ est de Cauchy dans X.

3. D'après le point précédent, en ajoutant l'hypothèse de complétude, on a bien montré que toute suite d'éléments de X admet une sous-suite convergente et donc la compacité de X d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass (voir la Proposition I.21).

■

Corollaire I.32

Soit (X, d) un espace métrique et A une partie de X.

1. *Le sous-espace (A, d) est précompact si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir A par un nombre fini de boules ouvertes de X de rayon ε.*
2. *Si (A, d) est précompact et (X, d) est complet, alors $\overline{A}$ est compact.*

Preuve :

1. Par définition de la distance induite sur A, on observe que pour tout $x \in A$, $\varepsilon > 0$, on a

$$B_A(x, \varepsilon) = B_X(x, \varepsilon) \cap A.$$

Le résultat en découle immédiatement.

2. Observons que si A est précompact, $\overline{A}$ l'est aussi. En effet, pour $\varepsilon > 0$ donné, on recouvre A par un nombre fini de boules ouvertes de rayon $\varepsilon/2$

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon/2),$$

ceci implique

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} \overline{B}(x_i, \varepsilon/2),$$

et le membre de droite étant une union finie de fermés, on déduit

$$\overline{A} \subset \bigcup_{i=1}^{n} \overline{B}(x_i, \varepsilon/2).$$

En observant que $\overline{B}(x_i, \varepsilon/2) \subset B(x_i, \varepsilon)$, on conclut bien que $\overline{A}$ se recouvre par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε.

Ainsi, $\overline{A}$ est précompact et complet (car c'est un fermé dans (X, d) complet, voir la proposition). D'après la Proposition I.31, on a bien la compacité de $\overline{A}$.

■

L'utilisation typique de ces notions de complétude et de compacité dans les applications peut se faire à travers du programme de travail suivant :

1. On cherche un élément de X solution d'un certain problème $\mathcal{P}$ (une équation intégrale, différentielle, une EDP, un minimiseur d'une fonctionnelle, etc ...).
2. Pour cela on construit un problème approché *simple* $\mathcal{P}_n$ que l'on sait résoudre sans difficulté. On note x_n une solution de ce problème approché.
3. — **Version 1 :** On montre que $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans (X, d). Si on a la chance que (X, d) soit complet, la suite ainsi construite converge vers une limite $x \in X$.
   — **Version 2 :** Si on montre que $(x_n)_n$ est contenue dans un compact, alors on peut extraire une sous-suite convergente vers un certain $x \in X$.
4. Si enfin on s'est bien débrouillés dans le choix de l'espace, de la topologie et des problèmes approchés $\mathcal{P}_n$, alors on va arriver à montrer que x est solution du problème initial.

Dans cette optique, la complétude de l'espace (ou sa compacité) est une propriété essentielle des espaces métriques utilisés. D'un certain point de vue, on peut dire qu'un espace métrique non complet n'est pas suffisamment gros pour contenir toutes les limites possibles des suites raisonnables de l'espace considéré. Si cette situation se présente en pratique, c'est que l'espace a été mal choisi, ou alors que la distance sur cet espace a été mal choisie.

Au moins d'un point de vue théorique abstrait, on peut toujours espérer se ramener à un espace complet *via* le résultat suivant : il existe un unique espace métrique complet qui contient (X, d) comme sous-ensemble dense. Remarquons que cette propriété de densité nous dit que cet espace est *le plus petit espace complet* qui contient (topologiquement) X.

La formulation précise, et donc assez lourde, de ce résultat est la suivante :

Théorème I.33

Soit (X, d) un espace métrique quelconque. Il existe un espace métrique **complet** $(\tilde{X}, \tilde{d})$ *qui contient X comme sous-ensemble dense au sens suivant :*

— *Il existe une application* **isométrique** $T : X \to \tilde{X}$*, i.e. vérifiant*

$$d(x, y) = \tilde{d}(T(x), T(y)), \ \ \forall x, y \in X,$$

telle que $T(X)$ est une partie dense de $(\tilde{X}, \tilde{d})$.

Noter qu'une telle application est nécessairement injective, ce qui fait que (X, d) et $(T(x), d')$ sont bien deux espaces isométriques.

Par ailleurs, il y a unicité du complété au sens où : si $(\tilde{X}_2, \tilde{d}_2)$ est un autre espace métrique complet vérifiant les propriétés ci-dessus (on note T_2 l'injection intervenant dans la définition) alors il existe une isométrie bijective

$$\Phi : (\tilde{X}, \tilde{d}) \longrightarrow (\tilde{X}_2, \tilde{d}_2),$$

telle que $\Phi(T(X)) = T_2(X)$.

Remarquons que c'est une construction du même type qui permet d'obtenir l'ensemble des nombres réels comme le complété du corps des rationnels pour la distance définie par la valeur absolue.

Exemple I.34

Si (X, d) est un espace complet et $Y \subset X$ une partie quelconque de X. Le complété de (Y, d) n'est rien d'autre que $(\overline{Y}, d)$, où $\overline{Y}$ est l'adhérence de Y dans (X, d).

Preuve (à omettre en première lecture) :

On note C l'ensemble de toutes les suites de Cauchy de (X, d).

— Pour deux éléments quelconques $x = (x_n)_n$ et $y = (y_n)_n$ dans C, on vérifie que la suite de nombre réels $(d(x_n, y_n))_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. On peut donc à bon droit définir la quantité

$$\delta(x, y) = \lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n), \ \ \forall x, y \in C.$$

Il est clair que δ vérifie les propriétés de positivité et de symétrie ainsi que l'inégalité triangulaire. En revanche, il y a fort peu de chances qu'elle satisfasse la propriété de séparation car si x et y sont deux suites différentes mais qui convergent vers le même point, alors on a $\delta(x, y) = 0$ bien que $x \neq y$.

— On munit donc C de la relation d'équivalence

$$\Big[x = (x_n)_n \sim y = (y_n)_n\Big] \iff d(x_n, y_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

On vérifie que cette relation d'équivalence est compatible avec l'application δ au sens où, pour tous $x, x', y, y' \in C$, on a

$$x \sim x' \text{ et } y \sim y' \Longrightarrow \delta(x, y) = \delta(x', y').$$

— On peut donc finalement passer au quotient et poser $\tilde{X} = C/\sim$ puis définir, pour tous $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{X}$

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \tilde{y}) = d(x, y), \quad \text{où } x \text{ et } y \text{ sont deux représentants quelconques des classes } \tilde{x} \text{ et } \tilde{y},$$

cette définition étant bien entendu indépendante du choix des représentants.

— Il est maintenant clair que $\tilde{d}$ est bien une distance sur $\tilde{X}$, le choix de la relation d'équivalence étant fait pour justement assurer la propriété de séparation qui nous manquait sur C.

— Pour tout $x \in X$, on définit $T(x)$ comme étant la (classe d'équivalence) de la suite constante égale à x.
Un calcul immédiat montre que $\tilde{d}(T(x), T(y)) = d(x, y)$ pour tous $x, y \in X$, ce qui montre l'injectivité de T.

— Montrons que $T(X)$ est dense dans $\tilde{X}$. On se donne un représentant $(x_k)_k \in C$ d'un élément quelconque $\tilde{x}$ de $\tilde{X}$ et on va montrer que $T(x_k)$ converge vers $\tilde{x}$.
Attention : $T(x_k)$ est une suite constante égale à x_k pour tout n !
Soit $\varepsilon > 0$, comme $(x_k)_k$ est une suite de Cauchy, il existe $k_0 \geq 0$ tel que

$$d(x_k, x_{k+p}) \leq \varepsilon, \ \ \forall k \geq k_0, \forall p \geq 0.$$

En passant à la limite quand p tend vers l'infini dans cette propriété (k étant fixé supérieur à k_0), on obtient par définition de la distance $\tilde{d}$:

$$\tilde{d}(T(x_k), \tilde{x}) \leq \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $k \geq k_0$, on a bien établi la convergence de la suite $T(x_k)$ vers $\tilde{x}$.

— Pour terminer, il faut montrer que $(\tilde{X}, \tilde{d})$ est complet.
On se donne une suite de Cauchy $(\tilde{x}^n)_n$ dans $(\tilde{X}, \tilde{d})$. Comme $T(X)$ est dense dans $(\tilde{X}, \tilde{d})$, on peut trouver pour tout n, un élément de X noté x_n tel que

$$\tilde{d}(\tilde{x}^n, T(x_n)) \leq 2^{-n}. \tag{I.6}$$

On pose maintenant $x = (x_n)_n$ la suite ainsi construite. On va montrer qu'elle est de Cauchy dans (X, d) en remarquant que, par inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &= \tilde{d}(T(x_n), T(x_{n+p})) \\ &\leq \tilde{d}(T(x_n), \tilde{x}^n) + \tilde{d}(\tilde{x}^n, \tilde{x}^{n+p}) + \tilde{d}(\widetilde{x^{n+p}}, T(x_{n+p})) \\ &\leq 2^{-n} + \tilde{d}(\tilde{x}^n, \tilde{x}^{n+p}) + 2^{-n-p} \\ &\leq 2^{-n+1} + \tilde{d}(\tilde{x}^n, \tilde{x}^{n+p}). \end{aligned}$$

Si $\varepsilon > 0$ est donné, on peut trouver n_0 tel que le second terme soit plus petit que ε pour tout $n \geq n_0$ et $p \geq 0$ vu que $(\tilde{x}^n)_n$ est de Cauchy dans $(\tilde{X}, \tilde{d})$. Quitte à prendre un n_0 plus grand, on peut aussi assurer que $2^{-n+1} \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$.
Ainsi, on a montré que pour tout $n \geq n_0$ et $p \geq 0$, on a $d(x_n, x_{n+p}) \leq 2\varepsilon$, ce qui prouve bien que $x = (x_n)_n \in C$. On note $\tilde{x}$ la classe d'équivalence de x et on utilise le résultat déjà obtenu plus haut qui montre que $(T(x_n))_n$ converge vers $\tilde{x}$ dans $(\tilde{X}, \tilde{d})$.
En revenant à (I.6), on obtient

$$\tilde{d}(\tilde{x}^n, \tilde{x}) \leq \tilde{d}(\tilde{x}^n, T(x_n)) + \tilde{d}(T(x_n), \tilde{x}),$$

et comme les deux termes du membre de droite tendent vers 0, on a bien établi que $(\tilde{x}^n)_n$ converge vers $\tilde{x}$ et donc que $(\tilde{X}, \tilde{d})$ est complet.

— Montrons enfin l'unicité du complété.
Construisons l'application Φ. Soit $\tilde{x} \in \tilde{X}$, comme $T(X)$ est dense dans $\tilde{X}$, il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de X telle que $T(x_n)$ converge vers $\tilde{x}$. En particulier, on a

$$\tilde{d}(T(x_n), T(x_{n+p})) = d(x_n, x_{n+p}) = \tilde{d}_2(T_2(x_n), T_2(x_{n+p})), \ \ \forall n, p \geq 0,$$

et donc la suite $(T_2(x_n))_n$ est de Cauchy dans $\tilde{X}_2$. Par suite, cette suite a une limite dans $\tilde{X}_2$ que l'on note $\Phi(\tilde{x})$.
Par construction, il est clair que Φ est une isométrie et que l'on a $\Phi(T(X)) \subset T_2(X)$. Par ailleurs, on vérifie immédiatement que l'on a égalité $\Phi(T(X)) = T_2(X)$ par un procédé de construction identique.
Montrons finalement que Φ a pour image $\tilde{X}_2$. Pour cela, on constate que $\Phi(\tilde{X})$ contient $\Phi(T(X)) = T_2(X)$ et comme $T_2(X)$ est dense dans $\tilde{X}_2$, par hypothèse, on en déduit que $\Phi(\tilde{X})$ est lui-même dense dans $\tilde{X}_2$.
Mais par ailleurs, $\Phi(\tilde{X})$ est complet car isométrique à $\tilde{X}$ qui est complet. On en déduit que $\Phi(\tilde{X})$ est fermé dans $\tilde{X}_2$, mais comme il est également dense dans cet espace, il ne peut que lui être égal.

■

En pratique, on a souvent la possibilité de construire le complété d'un espace métrique de façon plus explicite que la façon abstraite utilisée ici. Nous verrons des exemples par la suite.

II.2 Espaces vectoriels normés. Espaces préhilbertiens

Un des exemples fondamentaux d'espace métrique est donné par les espaces vectoriels normés. Beaucoup des espaces fonctionnels que l'on rencontre sont de cette nature.

Par simplicité on ne considère ici que des espaces vectoriels réels. La traduction de la majorité des résultats au cas des espaces complexes ne pose aucune difficulté.

II.2.a Définitions de base

Définition I.35 (Norme. Espace vectoriel normé)

Soit E un espace vectoriel réel. Une application $N : E \to \mathbb{R}$ est appelée norme *sur X si elle vérifie*

1. *Positivité :*
$$N(x) \geq 0, \ \ \forall x \in E.$$
2. *Séparation :*
$$N(x) = 0 \Leftrightarrow \ \ x = 0.$$
3. *Homogénéité :*
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \ \ N(\lambda x) = |\lambda| N(x).$$
4. *Inégalité triangulaire :*
$$\forall x, y \in E, \ \ N(x+y) \leq N(x) + N(y).$$

On dit que le couple (E, N) est un espace vectoriel normé. On utilise bien souvent la notation $\|.\|$ pour une norme.

Remarque I.36

Si toutes les propriétés d'une norme sont vérifiées à l'exception de la "séparation", on dira qu'on a affaire à une semi-norme.

On vérifie aisément que si (E, N) est un espace vectoriel normé, alors l'application définie par

$$d(x, y) = N(x - y), \ \ \forall x, y \in E,$$

est une distance sur E qui confère donc une structure d'espace métrique à E.

Plus généralement si $X \subset E$ est une partie quelconque d'un espace vectoriel normé, alors l'application

$$d(x, y) = N(x - y), \ \ \forall x, y \in X,$$

munit X d'une structure métrique canonique (bien que X ne soit pas nécessairement un sous-espace vectoriel). La topologie ainsi définie n'est autre que la topologie induite par celle de (E, N) sur X.

De même, si $\mathcal{E}$ est un espace affine dirigé par l'espace vectoriel E et que N est une norme sur E, alors on peut toujours définir

$$d(x, y) = N(x - y), \ \ \forall x, y \in \mathcal{E},$$

ce qui donne une structure métrique canonique à $\mathcal{E}$.

Remarque I.37

Soit (E, N) un espace vectoriel normé. L'application "norme" $N : E \to \mathbb{R}$ est 1-Lipschitzienne (et donc continue) sur (E, N). On vérifie, en effet, grâce à l'inégalité triangulaire que nous avons

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x - y), \ \ \forall x, y \in E.$$

Proposition I.38 (voir Exercice 14 du TD1)

Dans un espace vectoriel normé, les applications suivantes sont continues

$$(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E \mapsto \lambda x \in E,$$

$$(x, y) \in E \times E \mapsto x + y \in E.$$

On dit qu'on a affaire à une structure **d'espace vectoriel topologique***.*

Définition I.39 (Produit scalaire. Espace préhilbertien)

Soit E un espace vectoriel. Une application $(.,.) : E \times E \to \mathbb{R}$ est appelée **produit scalaire** *sur E si elle vérifie*

1. *Symétrie :*
$$(x, y) = (y, x), \ \ \forall x, y \in E.$$
2. *Bilinéarité :*
$$(x + \lambda y, z) = (x, z) + \lambda(y, z), \ \ \forall x, y, z \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$
3. *"Définie positivité" :*
$$(x, x) > 0, \ \ \forall x \in E, x \neq 0,$$
(pour $x = 0$, on a automatiquement $(x, x) = 0$ par bilinéarité).

On dit que $(E, (.,.))$ est un espace préhilbertien. (Si E est de dimension finie, on dit aussi : espace euclidien).

Les différentes définitions que nous avons introduites sont résumées par la figure I.2.

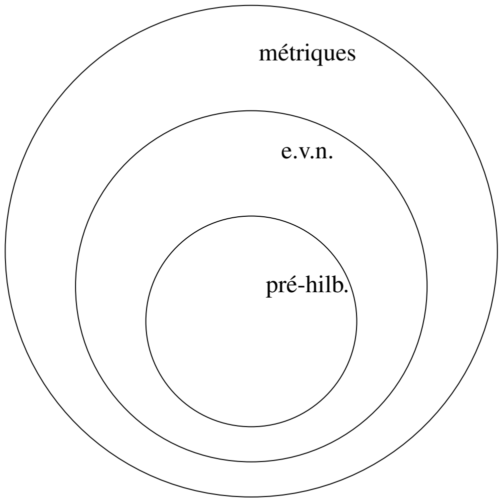


FIGURE I.2 – Les espaces topologiques étudiés dans ce cours

L'outil suivant est fondamental dans l'étude des espaces pré-hilbertiens.

Proposition I.40 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit $(E, (.,.))$ un espace préhilbertien. Pour tout $x \in E$, on note
$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$
On a alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz
$$|(x, y)| \leq \|x\| \, \|y\|, \ \ \forall x, y \in E.$$
Ainsi, l'application $x \in E \mapsto \|x\|$ est une norme sur E canoniquement associée au produit scalaire donné qui confère ainsi à E une structure d'espace vectoriel normé.

Preuve :

En réalité l'inégalité est encore vraie même sans l'hypothèse de "définie positivité". L'idée est de prendre $x, y \in E$ quelconques et de calculer le produit scalaire suivant pour tout $t \in \mathbb{R}$
$$0 \leq (x + ty, x + ty) = (x, x) + 2t(x, y) + t^2(y, y).$$
Pour x et y fixés, on a affaire à un polynôme du second degré en t qui a un signe constant. Son discriminant doit donc être négatif ou nul, ce qui donne
$$4(x, y)^2 - 4(x, x)(y, y) \leq 0,$$

ou encore
$$|(x,y)| \leq \|x\|\|y\|,$$
ce qu'il fallait démontrer.

Pour montrer que $\|.\|$ est une norme, il reste à vérifier l'inégalité triangulaire ce qui s'obtient de la façon suivante :
$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x,y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2,$$
puis par passage à la racine carrée. ■

II.2.b Applications linéaires continues

Dès lors qu'on étudie des espaces vectoriels, on est naturellement amenés à en étudier les morphismes, c'est-à-dire les applications linéaires. Dans le cadre topologique qui est le notre ici, c'est la notion d'application linéaire continue qui est pertinente et qui a de bonnes propriétés.

Théorème I.41

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et $T : E \to F$ une application **linéaire**. *On a l'équivalence entre*

1. *T est continue sur E.*
2. *T est continue en 0.*
3. *Il existe $M > 0$ tel que*
$$\|T(x)\|_F \leq M\|x\|_E, \ \ \forall x \in E.$$

Preuve :

1. $\Rightarrow$ 2. est triviale.
2. $\Rightarrow$ 3. Comme $T(0) = 0$, on sait qu'il existe $\delta > 0$ tel que
$$\|x\|_E \leq \delta \Rightarrow \|T(x)\|_F \leq 1.$$
On peut donc écrire pour tout $x \neq 0$
$$\left\| T\left(\delta \frac{x}{\|x\|_E}\right)\right\|_F \leq 1,$$
ce qui donne par homogénéité
$$\|T(x)\|_F \leq \frac{1}{\delta}\|x\|_E.$$
3. $\Rightarrow$ 1. Pour $x, y \in E$, on a donc
$$\|T(x) - T(y)\|_F = \|T(x-y)\|_F \leq M\|x-y\|_E,$$
ce qui montre que T est Lipschitzienne et donc continue.

■

Définition et Proposition I.42

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. L'ensemble des applications linéaires **continues** *de E dans F est un espace vectoriel noté $L(E,F)$.*
Pour tout $T \in L(E,F)$, on a
$$\sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|_E=1}} \|T(x)\|_F = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|_E\leq 1}} \|T(x)\|_F < +\infty.$$
Cette quantité est notée $|||T|||_{L(E,F)}$ ou plus simplement $|||T|||$ quand aucune confusion n'est possible.
L'application $|||.|||$ ainsi définie est une norme sur $L(E,F)$ qui lui confère donc une structure naturelle d'espace vectoriel normé. Cette norme est dite subordonnée *aux normes considérées sur E et F.*

On utilise souvent la propriété suivante, pour $T \in L(E,F)$
$$\|T(x)\|_F \leq |||T|||\ \|x\|_E, \ \ \forall x \in E,$$

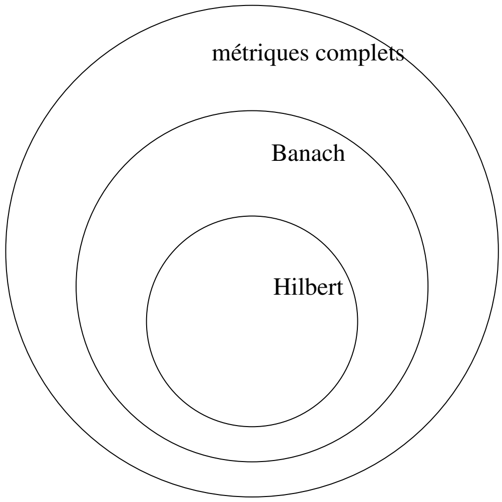


FIGURE I.3 – Les espaces complets étudiés dans ce cours

d'où l'on déduit la propriété de **norme d'algèbre** pour ces normes particulières : Si $T \in L(E,F)$ et $S \in L(F,G)$, alors $S \circ T \in L(E,G)$ et on a

$$|||S \circ T|||_{L(E,G)} \leq |||S|||_{L(F,G)} |||T|||_{L(E,F)}.$$

Notation : En général la composition de deux opérateurs est notée comme un produit $S.T$ ou simplement ST.

Définition I.43 (Dual d'un espace vectoriel normé)

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. On munit $\mathbb{R}$ de sa norme canonique qu'est la valeur absolue. L'ensemble des formes linéaires continues E, c'est-à-dire $L(E, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel normé appelé **dual topologique** *de E (ou plus simplement dual quand la confusion avec le dual algébrique n'est pas possible). Comme cet espace joue un rôle important en analyse fonctionnelle, on adopte une notation plus compacte E' qui ne doit pas faire oublier que la définition dépend de la norme initiale sur E.*

II.2.c Espaces de Banach et de Hilbert

Définition I.44

— *Un espace vectoriel normé (E, N) est complet si l'espace métrique naturellement défini par la norme N est complet. Un tel espace s'appelle* **espace de Banach**.

— *Un espace préhilbertien $(E, (.,.))$ est complet si l'espace vectoriel normé associé est complet. Un tel espace s'appelle* **espace de Hilbert**.

L'exemple le plus simple d'espace de Banach (et de Hilbert) est $\mathbb{R}$ (en tant qu'espace vectoriel réel de dimension 1) que l'on munit de la valeur absolue (qui est essentiellement la seule norme possible à constante multiplicative près dans $\mathbb{R}$). La complétude de $\mathbb{R}$ est l'une des propriétés essentielles de l'ensemble de nombres réels (selon la façon dont cet ensemble est construit, on peut même adopter cette propriété comme axiome de base de la construction).

Définition I.45

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E.

— *On dit que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ est convergente si la suite des sommes partielles*

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} x_n,$$

est convergente. La limite est alors appelée la somme de la série.

— *On dit que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ est absolument convergente si*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\| < +\infty.$$

Proposition I.46

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Alors E est complet si et seulement si toute série absolument convergente est convergente.

Preuve :

— Supposons que E est complet et que la série de terme général x_n est absolument convergente. Montrons que la suite des sommes partielles est de Cauchy. Pour $N, p \geq 0$, on écrit

$$\|S_{N+p} - S_N\| \leq \left\| \sum_{n=N+1}^{N+p} x_n \right\| \leq \sum_{n=N+1}^{N+p} \|x_n\| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \|x_n\|.$$

Le membre de droite est le reste d'une série convergente, ce qui montre qu'on peut rendre ce terme aussi petit que l'on veut pour N assez grand et p quelconque.

— Réciproquement, on suppose la propriété vérifiée et on veut montrer que E est complet. Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy dans E. D'après le résultat de l'exercice 6 du TD1, on peut trouver $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$\|u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}\| \leq 2^{-n}, \quad \forall n \geq 1.$$

En particulier la série de terme général $u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}$ est absolument convergente et donc convergente par hypothèse. Les sommes partielles de cette série sont

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} (u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}) = u_{\varphi(N+1)} - u_{\varphi(0)},$$

et donc la suite $(u_{\varphi(N)})_N$ est convergente.

Comme la suite $(u_n)_n$ est de Cauchy et admet une sous-suite convergente, le résultat de l'exercice 6 du TD1 montre que la suite $(u_n)_n$ converge et le résultat est donc démontré.

■

Proposition I.47

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Si F est complet alors $L(E, F)$ est également complet.
En particulier, le dual E' de n'importe quel espace vectoriel normé est toujours un espace de Banach.

Preuve :

Soit $(T_n)_n$ une suite de Cauchy dans $L(E, F)$. On voit clairement que, pour tout $x \in E$, la suite $(T_n(x))_n$ est de Cauchy dans F. Par hypothèse, F est complet et donc pour tout $x \in E$, il existe une limite notée $T(x) \in F$ à cette suite. La linéarité de l'application T ne fait aucun doute.

Utilisant la définition de la suite de Cauchy, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $n, m \geq n_0$ et pour tout $x \in E$, on a

$$\|T_n(x) - T_m(x)\|_F \leq \varepsilon \|x\|_E.$$

Pour ε, x et n fixés, on peut passer à la limite quand m tend vers l'infini et obtenir ainsi

$$\|T_n(x) - T(x)\|_F \leq \varepsilon \|x\|_E, \ \ \forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \forall n \geq n_0.$$

Ceci montre en particulier que T est une application continue et que nous avons, en prenant le supremum par rapport à x,

$$\|T_n - T\|_{L(E,F)} \leq \varepsilon, \ \ \forall n \geq n_0.$$

On a bien montré la convergence de $(T_n)_n$ vers T. ∎

Corollaire I.48 (Ensemble des inversibles dans $L(E)$ / Lemme de Von Neumann)

Soit E un espace de Banach et $T \in GL(E)$ un isomorphisme de E (i.e. une application linéaire continue bijective d'inverse continu). On a alors

$$B_{L(E)}(T, |||T^{-1}|||^{-1}) \subset GL(E).$$

En particulier $GL(E)$ est un ouvert de $L(E)$.

Preuve :

Ce résultat est le pendant en dimension infinie de l'exercice 3 du TD2.

On commence par étudier le cas $T = \mathrm{Id}$. Il s'agit de montrer que tous les éléments de $B_{L(E)}(\mathrm{Id}, 1)$ sont dans $GL(E)$. Soit donc $H \in L(E)$ tel que $|||H||| < 1$. Comme $|||\cdot|||$ est une norme d'algèbre, nous avons

$$|||H^k||| \leq |||H|||^k, \ \ \forall k \geq 0,$$

et donc, vu que $|||H||| < 1$, la série $\sum_{k\geq 0} H^k$ est absolument convergente. Comme E est complet, la proposition précédente nous dit que l'espace $L(E)$ est également complet. Ainsi, la série $\sum_{k\geq 0} H^k$ est convergente. On note S sa somme.

Si $S_n = \sum_{k=0}^n H^k$ est la somme partielle de cette série, un simple calcul montre que

$$(\mathrm{Id} - H)S_n = \mathrm{Id} - H^{n+1},$$

et on peut donc passer à la limite et obtenir

$$(\mathrm{Id} - H)S = \mathrm{Id}.$$

Ceci prouve que $\mathrm{Id} - H$ est inversible d'inverse S (qui est bien continue par construction).

Dans le cas général d'un $T \in GL(E)$, pour $H \in L(E)$ vérifiant $|||H||| < |||T^{-1}|||^{-1}$ on écrit

$$T - H = T(\mathrm{Id} - T^{-1}H),$$

et comme

$$|||T^{-1}H||| \leq |||T^{-1}|||.|||H||| < 1,$$

le résultat du cas précédent montre que $\mathrm{Id} - T^{-1}H$ est dans $GL(E)$, il en est donc de même de $T - H$. ∎

III Opérations élémentaires sur les espaces fonctionnels

III.1 Espaces produits

Définition I.49

— *Soient (X_1, d_1) et (X_2, d_2) deux espaces métriques. On pose alors $X = X_1 \times X_2$ et on définit*

$$d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2), \ \ \forall x = (x_1, x_2) \in X, \forall y = (y_1, y_2) \in X.$$

L'espace (X, d) est alors un espace métrique appelé espace métrique produit.

— *Soient (E_1, N_1) et (E_2, N_2) deux espaces vectoriels normés. On pose alors $E = E_1 \times E_2$ et*

$$N(x) = N_1(x_1) + N_2(x_2), \ \ \forall x = (x_1, x_2) \in E.$$

Alors (E, N) est un espace vectoriel normé appelé espace produit.

De plus, la norme $\tilde{N}$ sur E définie par

$$\tilde{N}(x) = \sqrt{N_1(x_1)^2 + N_2(x_2)^2}, \ \ \forall x \in E,$$

est équivalente à N et possède la propriété supplémentaire suivante : si N_1 et N_2 sont issues de produits scalaires, il en est de même de $\tilde{N}$, on parle alors d'espace préhilbertien produit.

Il y a bien d'autres façons équivalentes de définir les distances et normes produit. De plus toutes les définitions se généralisent sans peine à des produits d'un nombre fini quelconque d'espaces. Le cas d'un nombre infini d'espaces est plus délicat, nous ne le traiterons pas ici.

Proposition I.50

La topologie d'espace métrique produit définie plus haut est la moins fine qui rende continue les applications "coordonnées"

$$\varphi_i : x = (x_1, x_2) \in X \mapsto x_i \in X_i,$$

ou

$$\varphi_i : x = (x_1, x_2) \in E \mapsto x_i \in E_i.$$

De plus, la convergence des suites dans l'espace produit est équivalente à la convergence de chacune des suites "coordonnées".

Preuve :

En réalité, on va établir que les φ_i sont 1-Lipschitziennes. En effet, pour $x = (x_1, x_2) \in X$ et $y = (y_1, y_2) \in X$, nous avons, par exemple

$$d_1(\varphi_1(x), \varphi_1(y)) = d_1(x_1, y_1) \leq d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) = d(x, y),$$

et le même calcul est valable pour φ_2.

Supposons qu'on ait muni le produit $X = X_1 \times X_2$ d'une topologie τ (i.e. d'un ensemble d'ouverts vérifiant les propriétés de la Proposition I.3) pour laquelle φ_1 et φ_2 sont continues, on veut montrer que les ouverts de (X, d) sont nécessairement dans τ.

Soit $x = (x_1, x_2) \in X$ et $r_1, r_2 > 0$. Comme φ_1 est continue, on a

$$B_{d_1}(x_1, r_1) \times X_2 = \varphi_1^{-1}(B_{d_1}(x_1, r_1)) \in \tau,$$

et de même

$$X_1 \times B_{d_2}(x_2, r_2) = \varphi_2^{-1}(B_{d_2}(x_2, r_2)) \in \tau.$$

Par intersection de ces deux ouverts de τ, on obtient

$$B_{d_1}(x_1, r_1) \times B_{d_2}(x_2, r_2) \in \tau.$$

Par ailleurs, par définition de la distance d, on a immédiatement que

$$x \in B_{d_1}(x_1, r_1) \times B_{d_2}(x_2, r_2) \subset B_d(x, r_1 + r_2).$$

Soit donc U un ouvert de (X, d). Pour tout point $x \in U$, il existe $r_x > 0$ tel que $B_d(x, r_x) \subset U$, de sorte qu'on peut écrire

$$U = \bigcup_{x \in U} B_d(x, r_x).$$

D'après les propriétés établies ci-dessus, on a donc

$$U = \bigcup_{x \in U} B_{d_1}\left(x_1, \frac{r_x}{2}\right) \times B_{d_2}\left(x_2, \frac{r_x}{2}\right),$$

ce qui prouve que U est une union d'ouverts dans τ, et c'est donc aussi un ouvert de τ. ∎

Théorème I.51 (Complétude)

- *Si (X_1, d_1) et (X_2, d_2) sont complets alors l'espace produit (X, d) est aussi complet.*
- *Si (E_1, N_1) et (E_2, N_2) sont des Banach (resp. des Hilbert), alors (E, N) est un Banach (resp. $(E, \tilde{N})$ est un Hilbert).*

Preuve :

Il suffit de constater qu'une suite dans l'espace produit est de Cauchy (resp. convergente) si et seulement si chacune des deux suites "coordonnées" est de Cauchy (resp. convergente). ∎

Théorème I.52 (de Tychonoff)

Si (X_1, d_1) et (X_2, d_2) sont deux espaces métriques compacts, alors l'espace produit (X, d) est également compact.

Preuve :

Soit $x^n = (x_1^n, x_2^n) \in X = X_1 \times X_2$ une suite d'éléments de X.

Comme $(x_1^n)_n$ est une suite d'éléments du compact (X_1, d_1), on peut en extraire une sous-suite $(x_1^{\varphi(n)})_n$ qui converge vers un certain $x_1 \in X_1$.

On regarde maintenant la suite $(x_2^{\varphi(n)})_n$, qui est une suite du compact (X_2, d_2), on peut donc en extraire une sous-suite $(x_2^{\varphi(\psi(n))})_n$ qui converge vers un certain $x_2 \in X_2$.

On vérifie alors aisément que la suite de couples $(x_1^{\varphi(\psi(n))}, x_2^{\varphi(\psi(n))})_n$ converge vers (x_1, x_2) dans l'espace produit X. ■

On conclut ce paragraphe en s'intéressant aux applications bilinéaires sur un espace vectoriel normé produit (extension aux applications n-linéaires immédiate) avec le résultat suivant (similaire au Théorème I.41).

Proposition I.53

Soient $(E_1, \|.\|_{E_1})$, $(E_2, \|.\|_{E_2})$ et $(F, \|.\|_F)$ trois espaces vectoriels normés et $T : E_1 \times E_2 \to F$ une application bilinéaire. On a l'équivalence entre

1. *T est continue sur $E_1 \times E_2$.*
2. *T est continue en 0.*
3. *Il existe $M > 0$ tel que*

$$\|T(x_1, x_2)\|_F \leq M \|x_1\|_{E_1} \|x_2\|_{E_2}, \quad \forall x_1 \in E_1, x_2 \in E_2.$$

Preuve :

1. $\Rightarrow$ 2. est claire.

2. $\Rightarrow$ 3. Comme $T(0,0) = 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|(x_1, x_2)\|_{E_1 \times E_2} \leq \delta \Rightarrow \|T(x_1, x_2)\|_F \leq 1.$$

Soient maintenant $x_1 \neq 0$ et $x_2 \neq 0$. On applique ce qui précède au couple $\frac{\delta}{2}(x_1/\|x_1\|_{E_1}, x_2/\|x_2\|_{E_2})$ qui est bien de norme $\leq \delta$. Par bilinéarité, on trouve

$$\|T(x_1, x_2)\|_F \leq \frac{4}{\delta^2} \|x_1\|_{E_1} \|x_2\|_{E_2}.$$

Cette inégalité est encore trivialement vraie si x_1 ou x_2 sont nuls.

3. $\Rightarrow$ 1. L'inégalité proposée montre que pour $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ nous avons

$$\begin{aligned}\|T(x) - T(y)\|_F &= \|T(x_1 - y_1, x_2) + T(y_1, x_2 - y_2)\|_F \\ &\leq M\|x_1 - y_1\|_{E_1} \|x_2\|_{E_2} + M\|y_1\|_{E_1} \|x_2 - y_2\|_{E_2},\end{aligned}$$

ce qui prouve en particulier que $T(y)$ tend vers $T(x)$ dès que y tend vers x.

■

III.2 Espaces vectoriels normés quotients

Soit (E, N) un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E. On souhaite étudier la possibilité de conférer au quotient E/F une structure canonique d'espace quotient. Pour cela, on pose

$$\|\bar{x}\|_{E/F} = \inf_{y \in F} \|x - y\|_E, \quad \forall \bar{x} \in E/F, \forall x \in \bar{x}.$$

On peut aisément vérifier que ceci définit une semi-norme sur E/F (i.e. une application qui vérifie toutes les hypothèses d'une norme sauf celle de séparation). Il vient ensuite

$$\|.\|_{E/F} \text{ est une norme sur } E/F \iff F \text{ est fermé.}$$

En conséquence, dans la suite on supposera que F est fermé.

Théorème I.54

On se place sous les hypothèses précédentes, en supposant que F est un sous-espace strict, i.e. $F \neq E$. On a alors les propriétés suivantes :

1. *La projection canonique $\pi : E \to E/F$ est continue et de norme 1.*
2. *Si on suppose de plus que E est complet, alors E/F est complet.*
3. **Propriété universelle :** *Pour toute application linéaire continue $L : E \to G$, où G est un autre espace vectoriel normé telle que $L(F) = \{0\}$, il existe une unique application linéaire continue $\tilde{L} : E/F \to G$ telle que*
$$L = \tilde{L} \circ \pi.$$

Preuve :

1. La projection π est une application linéaire. De plus, par définition pour tout élément $x \in E$, nous avons (comme $0 \in F$!)
$$\|\pi(x)\|_{E/F} = \inf_{y \in F} \|x - y\|_E \leq \|x - 0\|_E = \|x\|_E.$$
Par le Théorème I.41, ceci montre que π est continue et de norme au plus égale à 1. Montrons que la norme de π est exactement égale à 1. On part de l'inégalité
$$\|\pi(x)\|_{E/F} \leq \|\pi\|_{L(E,E/F)} \|x\|_E, \ \ \forall x \in E.$$
On fixe maintenant $x \in E$ et on remarque que $\pi(x) = \pi(x - y)$ pour tout $y \in F$, de sorte que
$$\|\pi(x)\|_{E/F} = \|\pi(x - y)\|_{E/F} \leq \|\pi\|_{L(E,E/F)} \|x - y\|_E, \ \ \forall y \in F.$$
On peut maintenant prendre l'infimum par rapport à $y \in F$ dans cette inégalité et obtenir
$$\|\pi(x)\|_{E/F} \leq \|\pi\|_{L(E,E/F)} \|\pi(x)\|_{E/F}.$$
Si on a pris soin de choisir x tel que $\pi(x) \neq 0$, ce qui est possible dès lors que F est un sous-espace strict, on a bien obtenu
$$\|\pi\|_{L(E,E/F)} = 1.$$
2. On va utiliser la Proposition I.46. Soit donc une série de terme général $(\bar{x}_n)_n$ absolument convergente dans E/F. Par définition de la norme quotient, on peut trouver pour tout n, un élément $x_n \in E$, appartenant à la classe $\bar{x}_n$ et tel que
$$\|\bar{x}_n\|_{E/F} \leq \|x_n\|_E \leq \|\bar{x}_n\|_{E/F} + 2^{-n}.$$
Comme les séries de terme général $\|\bar{x}_n\|_{E/F}$ et 2^{-n} sont convergentes, on en déduit que la série de terme général $\|x_n\|_E$ est également convergente. En conséquence la série $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ est convergente dans E, car E est complet. En appliquant la projection π (qui est continue !) on déduit que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \bar{x}_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \pi(x_n)$ converge dans E/F, ce qui montre le résultat.
3. Comme L est nulle sur F, sa valeur sur n'importe quel élément d'une même classe d'équivalence $\bar{x}$ ne dépend que de la classe en question. On peut donc définir
$$\tilde{L}(\bar{x}) = L(x), \ \ \text{où } x \text{ est n'importe quel élément de } \bar{x}.$$
La linéarité de $\tilde{L}$ ne fait pas de doute de même que la propriété $L = \tilde{L} \circ \pi$ et l'unicité de cette application.
Il reste à montrer la continuité de $\tilde{L}$. On se donne $x \in E$ et on observe que
$$\|\tilde{L}(\bar{x})\|_G = \|L(x)\|_G = \|L(x - y)\|_G \leq \|L\|_{L(E,G)} \|x - y\|_E, \ \ \forall y \in F,$$
de sorte qu'en prenant l'infimum par rapport à y, on obtient
$$\|\tilde{L}(\bar{x})\|_G \leq \|L\|_{L(E,G)} \|\bar{x}\|_{E/F},$$
ce qui montre la continuité de $\tilde{L}$.

■

IV Principaux espaces que l'on peut rencontrer

IV.1 Les espaces vectoriels de dimension finie

IV.1.a Propriétés essentielles

On va commencer par étudier le cas de $\mathbb{R}^d = \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$ muni de la norme produit définie dans la section III.1. Celle-ci est définie par

$$\|x\|_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{d} |x_i|, \ \ \forall x = (x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

En utilisant le théorème de Tychonoff I.52 et la caractérisation des compacts de $\mathbb{R}$ obtenue dans l'exercice 2, on obtient immédiatement que les pavés

$$[a_1, b_1] \times ... \times [a_d, b_d],$$

sont compacts dans $(\mathbb{R}^d, \|.\|_1)$.

Utilisant ceci, on peut alors établir les propriétés essentielles à connaître sur les espaces vectoriels normés de dimension finie.

Théorème I.55

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors nous avons

1. *Toutes les normes sur E sont équivalentes, i.e. pour toutes normes N_1 et N_2, il existe $\alpha, \beta > 0$ telles que*
$$\alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x), \ \ \forall x \in E.$$
2. *Pour toute norme N, (E, N) est complet.*
3. *Dans (E, N) les compacts sont exactement les fermés bornés. (***Théorème de Borel-Lebesgue***)*
4. *Si (F, N_F) est un autre espace vectoriel normé quelconque (possiblement de dimension infinie), toutes les applications linéaires de E dans F sont continues.*

Il existe donc une seule structure d'espace vectoriel normé en dimension finie. Ceci ne veut pas dire que le choix d'une norme sur de tels espaces n'a pas d'importance, comme on le verra.

En dimension infinie, toutes ces propriétés deviennent fausses ce qui nécessite une attention très particulière qui sera l'objet de la suite du cours.

Preuve :

Tous les espaces de dimension finie étant isomorphes à un espace $\mathbb{R}^d$, on va se contenter de supposer $E = \mathbb{R}^d$. Sur cet espace on va utiliser la norme *de référence* $\|.\|_1$. On va commencer par montrer que toute norme est équivalente à celle-ci. On notera $(e_i)_i$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

1. On observe tout d'abord que tout élément de $\mathbb{R}^d$ s'écrit $x = \sum_{i=1}^d x_i e_i$ et donc
$$N(x) \leq \sum_{i=1}^{d} N(x_i e_i) = \sum_{i=1}^{d} |x_i| N(e_i) \leq \left(\max_{1 \leq i \leq d} N(e_i)\right) \|x\|_1, \ \ \forall x \in \mathbb{R}^d.$$
Ceci montre une des deux inégalités souhaitées. Par ailleurs, cela montre que $x \mapsto N(x)$ est également continue sur $(\mathbb{R}^d, \|.\|_1)$.
Soit S la sphère unité de $\mathbb{R}^d$ pour la norme $\|.\|_1$. Celle-ci est contenue dans le pavé $[-1, 1]^d$ qui est un compact d'après les rappels introductifs. S est donc une partie fermée d'un espace compact, c'est donc un compact de $(\mathbb{R}^d, \|.\|_1)$, d'après la proposition I.12.
Ainsi, d'après le théorème I.16, la fonction continue N est minorée et atteint son infimum sur S :
$$\exists a \in S, \text{ tel que } \inf_S N = N(a).$$
Mais comme a est dans S, il ne peut pas être nul et donc $N(a) > 0$. Maintenant, si x est n'importe quel élément non nul de E, on a $x/\|x\|_1 \in S$ et donc
$$N\left(\frac{x}{\|x\|_1}\right) \geq N(a),$$
ce qui par homogénéité donne
$$N(x) \geq N(a)\|x\|_1.$$

2. D'après le point précédent, toute norme est équivalent à la norme $\|.\|_1$ grâce à laquelle on a défini la topologie produit de $\mathbb{R}^d$. Le résultat découle donc du théorème I.51.
3. Là encore, par équivalence des normes, nous savons que tout fermé borné de (E, N) est contenu dans un pavé $[-M, M]^d$ dont on sait déjà qu'il est compact. On conclut par la proposition I.12.
4. Soit $T : E \to F$ une application linéaire et $(e_i)_{1\leq i\leq d}$ une base de E,pour tout $x = \sum_{i=1}^d x_i e_i$, on définit
$$\|x\| = \max_{1\leq i\leq d} |x_i|,$$
ce qui nous donne une norme sur E.
On peut maintenant écrire
$$\|T(x)\|_F = \left\| \sum_{i=1}^d x_i T(e_i) \right\|_F \leq \sum_{i=1}^d |x_i| \|T(e_i)\|_F \leq \left(\sum_{i=1}^d \|T(e_i)\|_F \right) \|x\|_\infty,$$
ce qui montre la continuité de T.

■

IV.1.b Caractérisation de la dimension finie. Théorème de Riesz

On a vu que, dans un espace de dimension finie, les fermés bornés sont compacts. On va voir que cette propriété est en fait caractéristique de ces espaces. C'est une des raisons qui font que l'étude des espaces de fonctions (de dimension infinie par nature) est bien plus complexe que celle des espaces de dimension finie.

Théorème I.56 (de Riesz)

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.
La boule unité fermée de E (ou encore les fermés bornés de E) est compacte si et seulement si E est de dimension finie.

Preuve :
On a déjà vu que si E est de dimension finie, alors tous les fermés bornés sont compacts. Il s'agit maintenant de démontrer la propriété réciproque.
On suppose donc que E est de dimension infinie et on va montrer qu'il existe une suite $(e_n)_n$ d'éléments de E vérifiant $\|e_n\| = 1$ pour tout n et de plus
$$\|e_n - e_m\| \geq 1/2, \quad \forall n \neq m.$$
Par construction, une telle suite est contenue dans la boule unité fermée de E et n'admet aucun sous-suite de Cauchy et donc aucun sous-suite convergente, ce qui montrera bien que la boule unité fermée de E n'est pas compacte.

— On commence par choisir n'importe quel e_1 de norme 1 et on pose $F_1 = \mathrm{Vect}(e_1)$.

— Comme E est de dimension infinie, on peut trouver $\tilde{e}_2$ qui ne soit pas dans F_1. De plus, F_1 est de dimension finie donc fermé dans E (Voir exercice 16 du TD1).
On utilise maintenant l'exercice 7 du TD1 pour obtenir que $\delta = d(\tilde{e}_2, F_1)$ est un nombre strictement positif. En particulier, il existe un $f_1 \in F_1$ tel que
$$\|\tilde{e}_2 - f_1\| \leq 2\delta.$$
On pose alors
$$e_2 = \frac{\tilde{e}_2 - f_1}{\|\tilde{e}_2 - f_1\|}.$$
Il est clair que $\|e_2\| = 1$ et que $e_2 \notin F_1$ (sinon $\tilde{e}_2$ serait lui-même dans F_1). De plus, on a
$$\|e_2 - e_1\| = \frac{1}{\|\tilde{e}_2 - f_1\|} \|\tilde{e}_2 - f_1 - \|\tilde{e}_2 - f_1\| e_1\| \geq \frac{1}{\|\tilde{e}_2 - f_1\|} d(\tilde{e}_2, F_1) \geq \frac{\delta}{2\delta} = \frac{1}{2}.$$

— Supposons avoir construits $\{e_1, ..., e_n\}$ vérifiant la propriété attendue. La technique précédente permet de construire e_{n+1}. En effet, on pose $F_n = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_n)$, on choisit un $\tilde{e}_{n+1}$ qui n'est pas dans F_n (ceci est toujours possible car E est de dimension inifie ! C'est exactement ici qu'on utilise l'hypothèse sur la dimension de E). On a alors
$$\delta = d(\tilde{e}_{n+1}, F_n) > 0,$$
et on peut choisir un $f_n \in F_n$ tel que
$$\|\tilde{e}_{n+1} - f_n\| \leq 2\delta.$$

On pose maintenant

$$e_{n+1} = \frac{\tilde{e}_{n+1} - f_n}{\|\tilde{e}_{n+1} - f_n\|},$$

et on vérifie que $d(e_{n+1}, F_n) \geq 1/2$ ce qui conclut la preuve.

■

IV.1.c Exemples

Dans $\mathbb{R}^d$, les normes les plus usuelles sont les suivantes

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^d |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \; \forall 1 \leq p < +\infty,$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq d} |x_i|.$$

Pour $p = 2$, il s'agit de la norme euclidienne usuelle. Pour $p = 1$ ou $p = +\infty$, il est assez facile de voir que ce sont bien des normes. Dans le cas général, c'est un peu plus délicat. Les propriétés de ces normes sont rappelées dans la proposition suivante dont la démonstration fait l'objet de l'exercice 1 du TD2.

Proposition I.57

Soit $1 \leq p \leq +\infty$. On définit l'exposant conjugué de p par $1/p + 1/p' = 1$, avec $1/\infty = 0$.

1. **Inégalité de Hölder** *: pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$ nous avons*

$$\sum_{i=1}^d |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_{p'}.$$

2. *L'application $\|.\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^d$.*
3. *Pour $0 < p < 1$, $\|.\|_p$* **n'est pas** *une norme sur $\mathbb{R}^d$.*

Si E est un espace vectoriel de dimension d, et si $e = (e_i)_i$ est une base de E, on a un isomorphisme naturel entre $\mathbb{R}^d$ et E donné par

$$\Phi_e : x \in \mathbb{R}^d \mapsto \sum_{i=1}^d x_i e_i \in E,$$

qui permet de définir des normes sur E par

$$N_{e,p}(x) = \|\Phi_e^{-1}(x)\|_p, \;\; \forall x \in E, \forall 1 \leq p \leq +\infty.$$

Ces normes dépendent de p bien sûr mais aussi de la base e choisie.

Tout espace de dimension d est ainsi isométrique à $\mathbb{R}^d$ muni d'une certaine norme et donc isomorphe (en tant qu'espace métrique) à $(\mathbb{R}^d, \|.\|_\infty)$.

On a déjà vu que l'espace $L(E,F)$ possède une norme naturelle $|||.|||_{L(E,F)}$ et que celle-ci est une norme d'algèbre au sens suivant

$$|||S \circ T|||_{L(E,G)} \leq |||S|||_{L(F,G)} |||T|||_{L(E,F)}, \;\; \forall S \in L(F,G), \forall T \in L(E,F).$$

Si $E = \mathbb{R}^d$, $F = \mathbb{R}^{d'}$ que l'on munit de leurs bases canoniques respectives alors $L(E,F)$ s'identifie à l'espace des matrices de taille $d \times d'$. Les définitions données ci-dessus s'adaptent naturellement

$$|||M|||_{E,F} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|M.x\|_F}{\|x\|_E}, \quad \forall M \in \mathcal{M}_{d,d'}(\mathbb{R}), \tag{I.7}$$

et la propriété de norme d'algèbre devient

$$|||A.B|||_{E,G} \leq |||A|||_{F,G} |||B|||_{E,F}.$$

Dans le cas des endomorphismes (i.e. si $F = E = G$), on convient quasi-systématiquement (bien que rien ne nous y oblige) d'utiliser la même norme pour l'espace d'arrivée et de départ. Ainsi, pour les matrices carrées, on trouve

$$|||AB||| \leq |||A|||.|||B|||, \;\; \forall A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}).$$

L'usage veut que l'on note, pour $1 \leq p \leq +\infty$,

$$|||A|||_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A.x\|_p}{\|x\|_p}.$$

Attention : Il existe bien sûr d'autres normes sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ que les normes subordonnées (celles de la forme (I.7)). On peut immédiatement vérifier que ces normes associées vérifient toujours $|||\mathrm{Id}||| = 1$ ce qui donne un premier critère (non suffisant) pour déterminer si oui ou non une norme donnée est issue d'une norme sur l'espace $\mathbb{R}^d$.

Donnons un exemple de norme non subordonnée couramment utilisée : la norme de Frobenius. Elle est définie par

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{Tr}(A^t A)}.$$

Ce n'est autre que la norme euclidienne de la matrice vue comme un élément de $\mathbb{R}^{d^2}$ (en rangeant tous les coefficients dans un grand vecteur à d^2 composantes). Cette norme vérifie également la propriété des normes d'algèbre

$$\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F, \ \ \forall A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}).$$

Citons quelques sous-ensembles remarquables de $M_d(\mathbb{R})$ qu'il est bon de connaître :

— L'ensemble des matrices inversibles $GL_d(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. Une façon de voir ce résultat c'est d'utiliser la continuité de l'application déterminant et le fait que $GL_d(\mathbb{R})$ est l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}^*$ par cette application.

— $GL_d(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

— L'ensemble des matrices complexes diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. En revanche, l'ensemble des matrices réelles diagonalisables (dans $\mathbb{R}$) n'est pas dense dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

— L'ensemble $O_d(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales est un compact de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

La notion de dualité topologique en dimension finie semble assez pauvre car nous avons vu (Théorème I.55) que toutes les formes linéaires étaient continues dans de tels espaces. Il n'en demeure pas moins que la détermination d'une bonne représentation de ce dual et le calcul de la norme associée sont instructives en vue d'applications plus complexes à des espaces de dimension infinie.

La proposition suivante donne un exemple de détermination explicite de la norme duale dans un espace de dimension finie. La démonstration fait l'objet de l'exercice 6 du TD2.

Proposition I.58 (Dualité pour $(\mathbb{R}^d, \|.\|_p)$)

Soit $1 \leq p \leq +\infty$. On note $p' \in [1, +\infty]$ l'exposant conjugué de p.
On note $E = \mathbb{R}^d$ que l'on munit de la norme $\|.\|_p$ et $F = \mathbb{R}^d$ que l'on munit de la norme $\|.\|_{p'}$.
Alors, l'application

$$\Psi : y \in F \mapsto \Psi(y) = \left(x \in \mathbb{R}^d \mapsto \sum_{i=1}^d x_i y_i\right) \in E',$$

est une isométrie de $(F, \|.\|_{p'})$ sur $(E', \|.\|_{E'})$.

IV.2 Espaces de dimension infinie

IV.2.a Espaces de suites

— Pour $1 \leq p < +\infty$, on pose

$$l^p = \left\{(x_n)_n \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \text{ t.q. } \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty\right\},$$

que l'on munit de la norme

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \ \ \forall x \in l^p.$$

— Pour $p = +\infty$, on pose

$$l^\infty = \left\{(x_n)_n \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \text{ t.q. } \sup_{n \geq 0} |x_n| < +\infty\right\},$$

que l'on munit de la norme

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \geq 0} |x_n|, \ \ \forall x \in l^\infty.$$

Proposition I.59 (Inégalité de Hölder)

Soit $1 \leq p < +\infty$ et p' l'exposant conjugué de p. Pour tout $x \in l^p$ et $y \in l^{p'}$, la série (notée xy) de terme général $(x_n y_n)_n$ est absolument convergente (i.e. $xy \in l^1$) et on a l'inégalité de Hölder

$$\|xy\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n y_n| \leq \|x\|_p \|y\|_{p'}.$$

En particulier l'application **produit**

$$(x, y) \in l^p \times l^{p'} \mapsto xy \in l^1,$$

est continue et de norme 1.

Preuve :

Pour tout $N \geq 1$, on applique l'inégalité de Hölder obtenue en dimension finie dans l'exercice 1 du TD2, ce qui donne

$$\sum_{n=0}^{N} |x_n y_n| \leq \left(\sum_{n=0}^{N} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=0}^{N} |y_n|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Les membres de droite se majorent par les sommes des séries correspondantes, ce qui donne

$$\sum_{n=0}^{N} |x_n y_n| \leq \|x\|_p \|y\|_{p'}.$$

Il suffit maintenant de prendre la limite quand $N \to \infty$ pour obtenir le résultat.

La continuité de l'application bilinéaire est une conséquence immédiate de l'inégalité de Hölder et de la Proposition I.53. ■

Définition I.60

Par analogie avec le produit scalaire dans l^2, on notera pour tout $x \in l^p$ et $y \in l^{p'}$

$$(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n,$$

ce qui définit une forme bilinéaire continue sur $l^p \times l^{p'}$. Quand $p = p' = 2$, on retrouve le produit scalaire usuel.

Proposition I.61

- *Les espaces l^p pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, munis de leurs normes respectives sont complets (ce sont donc des Banach).*
- *L'espace l^2 est un espace de Hilbert.*
- *Pour $1 \leq p < q \leq +\infty$, on a l'inclusion stricte*

  $$l^p \subset l^q,$$

  et de plus l'injection canonique associée à cette inclusion est continue pour les normes respectives de l^p et de l^q, et plus précisément on a

  $$\|x\|_{l^q} \leq \|x\|_{l^p}, \quad \forall x \in l^p.$$
- *On se donne de plus un $\theta \in [0, 1]$. On définit $r \in [p, q]$ par la formule*

  $$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}.$$

  On a alors l'inégalité dite **d'interpolation** *suivante*

  $$\|x\|_r \leq \|x\|_p^{\theta} \|x\|_q^{1-\theta}, \quad \forall x \in l^q.$$

Preuve :

— Traitons le cas $p < +\infty$. Soit $(x^k)_k$ une suite de Cauchy dans l^p. Pour tout k, on écrira $x^k = (x^k_n)_n$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $k_0 \geq 0$ tel que

$$\|x^k - x^l\|_p \leq \varepsilon, \ \ \forall k, l \geq k_0. \tag{I.8}$$

Comme pour chaque n, nous avons $|x^k_n - x^l_n| \leq \|x^k - x^l\|_p$ et donc la propriété précédente montre que, pour tout n fixé, les suites $(x^k_n)_k$ sont de Cauchy dans $\mathbb{R}$.
Comme $\mathbb{R}$ est complet, toutes ces suites convergent. On note $x_n = \lim_{k\to\infty} x^k_n$.
Repartons de (I.8) en tronquant la série du terme de gauche au rang N

$$\left(\sum_{n=0}^{N} |x^k_n - x^l_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon.$$

Comme la somme de gauche est finie, on peut passer à la limite quand l tend vers l'infini et obtenir ainsi

$$\left(\sum_{n=0}^{N} |x^k_n - x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon.$$

On peut maintenant passer à la limite quand $N \to \infty$ pour arriver à

$$\|x^k - x\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x^k_n - x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon,$$

ce qui montre tout à la fois que $x \in l^p$ et que $(x^k)_k$ tend vers x dans l^p.

— Dans le cas $p = 2$, on a déjà vu qu'on a bien un produit scalaire, il n'y a donc plus rien à ajouter.

— Si $x \in l^p$, on sait en particulier que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ et donc que $(x_n)_n$ est une suite bornée et de plus on a

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p, \tag{I.9}$$

car la valeur absolue de n'importe quel élément de la suite est clairement plus petite que la norme l^p de cette suite.
Cette inégalité montre le résultat dans le cas $q = +\infty$.
Soit maintenant $q > p$, $q < +\infty$. Pour tout n et comme $q > p$, on a

$$|x_n|^q \leq |x_n|^p \|x\|_\infty^{q-p},$$

ce qui montre en sommant que $x \in l^q$ et que

$$\|x\|_q^q \leq \|x\|_p^p \|x\|_\infty^{q-p},$$

puis en prenant la puissance $1/q$ de cette inégalité, on trouve

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p^{\frac{p}{q}} \|x\|_\infty^{1-\frac{p}{q}}. \tag{I.10}$$

En utilisant à nouveau (I.9), on obtient l'inégalité attendue (moins précise que la précédente)

$$\|x\|_p \leq \|x\|_q,$$

qui montre que l'identité est une application (linéaire !) continue de l^p dans l^q.

— En changeant les noms des indices, on voit que (I.10) donne déjà l'inégalité d'interpolation dans le cas $q = +\infty$.
Supposons donc $q < +\infty$. Pour tout n, on écrit

$$\|x\|_r^r = \sum_{n\geq 0} |x_n|^r = \sum_{n\geq 0} |x_n|^{r\theta} |x_n|^{r(1-\theta)},$$

puis on constate que, par définition de r et θ, les exposants $p/(r\theta)$ et $q/r(1-\theta)$ sont dans $[1, +\infty[$ et conjugués, on peut donc appliquer l'inégalité de Hölder (Proposition I.59) et obtenir

$$\|x\|_r^r \leq \|x\|_p^{r\theta} \|x\|_q^{r(1-\theta)},$$

le résultat vient en prenant la puissance $1/r$ de cette inégalité.

■

Définition I.62 (Quelques sous-espaces importants de l^∞)

— *Le sous-ensemble de l^∞ constitué des suites convergentes est noté c, et celui des suites qui tendent vers 0 est noté c_0.*
Pour toute suite $x \in c$, on note $L(x) \in \mathbb{R}$, la limite de la suite x. Ceci construit une application linéaire de c dans $\mathbb{R}$.

— *On note c_f l'espace des suites finies (c'est-à-dire nulles à partir d'un certain rang).*

Proposition I.63 (Théorème de double limite ; Propriétés fondamentales des l^p)

1. *L'espace c est fermé dans l^∞ (c'est donc lui-même un Banach) et l'application L est continue de norme $\|L\| = 1$, c'est la propriété de* **double limite**.
2. *L'espace c_0 est fermé dans l^∞, c'est le noyau de L.*
3. *c_f est dense dans l^p pour tout $1 \leq p < +\infty$ mais pas dans l^∞. Dans ce dernier cas, l'adhérence de c_f est c_0.*
4. *Pour $1 \leq p < +\infty$, l^p est séparable. L'espace c est séparable mais l^∞ n'est pas séparable.*
5. *Pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace l^p n'est jamais complet si on le munit de la norme $\|.\|_q$ pour $q > p$. Déterminer son complété pour cette norme.*

Preuve :

1. Soit $(x^k)_k$ une suite d'éléments de c qui converge vers un élément x de l^∞ (au sens de la norme de l^∞ bien entendu). Il s'agit de montrer que x appartient à c, c'est-à-dire admet une limite à l'infini, et que de plus sa limite $L(x)$ est égale la limite de la suite de nombres réels $(L(x^k))_k$.

   — Montrons d'abord que la suite $(L(x^k))_k$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$, comme $(x^k)_k$ converge dans l^∞, elle est de Cauchy (Proposition I.24), et donc pour un k_0 assez grand on a

   $$\|x^k - x^l\|_\infty \leq \varepsilon, \quad \forall k \geq k_0, \forall l \geq k_0.$$

   Si on écrit la définition de la norme infinie, ceci donne

   $$|x^k_n - x^l_n| \leq \varepsilon, \quad \forall k \geq k_0, \forall l \geq k_0, \forall n \geq 0.$$

   On peut donc fixer k et l dans cette inégalité et faire tendre n vers l'infini pour obtenir

   $$|L(x^k) - L(x^l)| \leq \varepsilon, \quad \forall k \geq k_0, \forall l \geq k_0.$$

   Ceci montre exactement que $(L(x^k))$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et donc convergente. On note l sa limite.

   — Il s'agit maintenant de montrer que $\lim_{n\to\infty} x_n = l$, ce qui montrera que $x \in c$ et que $L(x) = l = \lim_{k\to\infty} L(x^k)$.
   Ecrivons pour tout k

   $$|l - x_n| \leq |l - L(x^k) + L(x^k) - x^k_n + x^k_n - x_n| \leq |l - L(x^k)| + |L(x^k) - x^k_n| + |x^k_n - x_n|.$$

   On veut montrer que ces trois termes sont petits. Le problème est que nous avons deux indices qui varient et qu'il y a deux termes dans lesquels les deux indices apparaissent simultanément. Il faut maintenant utiliser de façon cruciale la convergence dans l^∞ de la suite $(x^k)_k$ qui nous fournit de **l'uniformité** et nous permet donc de supprimer un des indices dans l'un des termes. Plus précisément, il suffit de vérifier que le troisième terme dans l'inégalité ci-dessus est majoré par $\|x^k - x\|_\infty$, et donc on a

   $$|l - x_n| \leq |l - L(x_k)| + \|x^k - x\|_\infty + |L(x^k) - x^k_n|.$$

   On voit que les deux premiers termes ne dépendent que de k (et tendent vers 0 quand k tend vers l'infini). On fixe $\varepsilon > 0$ et on choisit $k = k_0$ tel que ces deux termes soient plus petits que ε, il vient

   $$|l - x_n| \leq 2\varepsilon + |L(x^{k_0}) - x^{k_0}_n|.$$

   Maitenant que $k = k_0$ est fixé, on utilise la définition de L qui nous permet de rendre le dernier terme plus petit que ε pour tout n assez grand.
   Tout ceci montre la convergence de $(x_n)_n$ vers l et le résultat est démontré.

2. Il est clair que $c_0 = \mathrm{Ker}\, L$ et donc c'est bien un sous-espace fermé d'après l'exercice 13 du TD1.
3. Pour tout $N \geq 0$, on introduit l'opérateur de troncature T_N qui à une suite quelconque dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ associe la suite tronquée au rang N : les N premiers termes de $T_N x$ sont les N premiers termes de x et les termes suivants sont nuls.

   On vérifie aisément que T_N est linéaire continue et de norme 1, pour tout $N \geq 1$. De plus, l'image de T_N est égale à l'ensemble des suites nulles à partir du rang $N+1$, c'est donc un espace de dimension finie contenu dans c_f.

   Soit $1 \leq p < +\infty$. Pour tout $x \in l^p$, on a $T_N x \in c_f \subset l^p$ et de plus
$$\|x - T_N x\|_p^p = \sum_{n=N+1}^{+\infty} |x_n|^p,$$
   ce qui est le reste d'une série numérique convergente. On a donc $\|T_N x - x\|_p$ qui tend vers 0 dans l^p. Ceci prouve que tout élément x de l^p peut être approché par une suite d'éléments de c_f, c'est-à-dire que c_f est dense dans l^p.

   Vérifions que ce résultat est faux dans l^∞. On prend pour x, la suite constante égale à 1. On observe que, pour toute suite $y \in c_f$, dont on note N_y le rang maximal des éléments non nuls, on a
$$\|x - y\|_\infty \geq |x_{N_y+1} - y_{N_y+1}| = |x_{N_y+1}| = 1.$$
   Ainsi $d(x, c_f) = 1$ et il n'est donc pas possible d'approcher x par des éléments de c_f.

   En revanche, on va montrer que $\overline{c_f} = c_0$.
   - Tout d'abord, on a $L(c_f) = \{0\}$ donc $c_f \subset c_0$ et comme c_0 est fermé, on a $\overline{c_f} \subset c_0$.
   - Réciproquement, soit $x \in c_0$, on reprend les notations ci-dessus et on observe que
$$\|T_N x - x\|_\infty = \sup_{k \geq N+1} |x_k|,$$
     et cette quantité tend bien vers 0 quand N tend vers l'infini car, par définition, on a $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$.
4. On cherche un sous-ensemble dense dénombrable dans l^p. D'après ce qui précède, il est facile de voir que l'ensemble $c_f^{\mathbb{Q}}$ des suites finies à coefficients rationnels convient.

   Dans l^∞, la situation est la suivante. On vérifie d'abord sans peine que $c_f^{\mathbb{Q}}$ est dense dans c_0 (qui est donc séparable) et enfin comme $c = c_0 \otimes \mathbb{R}(1)$ où (1) désigne la suite constante égale à 1, on obtient bien que c est lui-même séparable.

   Montrons que l^∞ n'est pas séparable. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il le soit. On considère donc une partie D de l^∞ qui soit dénombrable et dense. On introduit maintenant l'ensemble T des suites de l^∞ dont tous les termes sont égaux à ± 1.

   Comme D est dense, pour tout $t \in T$, on peut trouver un $d(t) \in D$ tel que $\|t - d(t)\|_\infty \leq 1/2$. On définit ainsi [1] une application $d : T \subset D$. On montre maintenant que d est injective. En effet si $d(t_1) = d(t_2)$, nous avons
$$\|t_1 - t_2\|_\infty \leq \|t_1 - d(t_1)\|_\infty + \underbrace{\|d(t_1) - d(t_2)\|_\infty}_{=0} + \|d(t_2) - t_2\|_\infty \leq 1,$$
   et comme les éléments de la suite $t_1 - t_2$ ne peuvent être que 0, 2 ou -2, on en déduit qu'ils sont nécessairement tous nuls, et donc que $t_1 = t_2$.

   On a donc construit une injection de T dans l'ensemble dénombrable D, ce qui montre que T est lui-même dénombrable.

   Or, T est idempotent à $2^{\mathbb{N}}$, c'est-à-dire à $\mathbb{R}$ et il n'est donc pas dénombrable (Cantor), ce qui fournit la contradiction cherchée.
5. En tant qu'ensembles on a vu que l'on a les inclusions
$$c_f \subset l^p \subsetneq l^q.$$
   Or l^q est complet pour la norme $\|.\|_q$. Si l^p était complet pour $\|.\|_q$, ce serait un fermé de $(l^q, \|.\|_q)$ et on aurait donc
$$\overline{c_f} \subset l^p \subsetneq l^q,$$
   ce qui n'est pas possible car c_f est dense dans l^q. Pour cette même raison, l'ensemble l^p est dense dans $(l^q, \|.\|_q)$ qui est complet. Ce dernier espace est donc le complété de $(l^p, \|.\|_q)$.

1. modulo l'utilisation implicite ici de l'axiome du choix

■

On peut maintenant complètement comprendre la structure du dual de l^p (pour $p < +\infty$) grâce au théorème de représentation suivant. Sa démonstration fera l'objet de l'exercice 10 du TD2.

Théorème I.64 (Dualité des l^p)

Soit $1 \leq p < +\infty$. L'application

$$\Phi : y \in l^{p'} \mapsto \left(x \in l^p \mapsto \sum_n x_n y_n \right) \in (l^p)'$$

est bien définie et réalise une bijection isométrique entre $l^{p'}$ et le dual de l^p.

On déduit de cet exercice que le dual topologique de l^p peut s'identifier de façon canonique à $l^{p'}$ *via* l'application Φ construite ci-dessus. En pratique, c'est ce que l'on fait toujours (sans le dire explicitement bien souvent). Notons que le cas $p = +\infty$ est exclu de ce résultat. On peut montrer que le dual de l^∞ est strictement plus gros que l^1 et plus précisément que, pour $p = +\infty$ et donc $p' = 1$, l'application Φ du théorème est encore une isométrie mais qu'elle n'est pas surjective. Il existe donc des éléments du dual de l^∞ que l'on ne peut pas représenter comme un élément de l^1.

Théorème I.65 (Compacité faible de la boule unité de l^p)

On note B la boule unité fermée de l^p, où $1 < p < +\infty$. Pour tout $x, y \in B$, on pose

$$d(x, y) = \sum_{n \geq 0} 2^{-n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}.$$

Les propriétés suivantes sont vérifiées

1. *d est une distance sur B.*
2. *L'espace métrique (B, d) est compact.*
   Cette propriété est **remarquable** *car le théorème de Riesz nous dit que B n'est pas compacte pour la topologie définie par la norme l^p.*
3. *Une suite $(x^k)_k$ d'éléments de B converge vers $x \in B$ au sens de la distance d si et seulement si, elle converge faiblement au sens suivant*

$$(x^k, y) \xrightarrow[k \to \infty]{} (x, y), \quad \forall y \in l^{p'}. \tag{I.11}$$

On conclut de l'ensemble de ces propriétés la propriété suivante, très importante :

De toute suite bornée $(x^k)_k$ d'éléments de l^p, on peut extraire une sous-suite $(x^{\varphi(k)})_k$ qui converge faiblement au sens de (I.11).

Remarque I.66

Les cas $p = 1$ et $p = +\infty$ sont singuliers dans cette théorie. On peut montrer que la propriété ci-dessus est encore valable pour $p = +\infty$ mais on parle alors de convergence faible-$\star$ pour des raisons que nous ne détaillerons pas ici (retenons seulement que c'est une topologie encore plus faible que la topologie faible ...).
En revanche dans le cas $p = 1$, le théorème ci-dessus devient faux. On peut néanmoins définir une notion de convergence faible dans l^1 qui, chose assez étonnante, s'avère être identique à la notion de convergence forte. Cela n'implique néanmoins pas que les topologies en question soient identiques ! ! La raison en est que, dans ce contexte, la topologie faible sur la boule unité de l^1 n'est pas métrisable (on ne peut pas définir l'équivalent de la distance d du théorème précédent).
Nous sommes donc en présence de deux topologies distinctes qui ont pourtant les mêmes suites convergentes.

Preuve :

1. D'abord il est clair que d est bien définie car la série est toujours convergente. La symétrie et la positivité de d sont évidentes de même que la propriété de séparation. Il reste à montrer l'inégalité triangulaire. Celle-ci découle de l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue dans $\mathbb{R}$ et de la croissance de l'application

$$t \in [0, +\infty[\mapsto \frac{t}{1+t} \in [0, +\infty[.$$

En effet, on déduit de cela que pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$ on a

$$\frac{|a-c|}{1+|a-c|} \leq \frac{|a-b|}{1+|a-b|} + \frac{|b-c|}{1+|b-c|}.$$

2. La non-compacité de B pour la topologie naturelle de l^p est simplement une application du théorème de Riesz (si la boule était compacte, l^p serait de dimension finie).
   Montrons que (B, d) est compacte. Soit $(x^k)_k$ une suite dans B. En particulier, elle est bornée dans l^p et donc dans l^∞. Pour toute valeur de n, la suite $(x_n^k)_k$ est donc bornée dans $\mathbb{R}$. Par un processus diagonal similaire à celui utilisé dans l'exercice 7 du TD2 (ici avec $c_n = 1$ mais ça n'a pas d'importance), on peut trouver une sous-suite $(x^{\psi(k)})_k$ qui converge simplement vers une suite $x \in l^\infty$. De plus, on montre aisément que cette suite est dans l^p.
   Il nous faut maintenant montrer que $(x^{\psi(k)})_k$ converge vers x au sens de la distance d.
   Soit $\varepsilon > 0$ fixé. On choisit N tel que $\sum_{n=N+1}^{+\infty} 2^{-n} \leq \varepsilon$ (ceci est possible car c'est le reste d'une série convergente).
   On écrit maintenant

$$\begin{aligned} d(x^{\psi(k)}, x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \frac{|x_n^{\psi(k)} - x_n|}{1+|x_n^{\psi(k)} - x_n|} &\leq \sum_{n=0}^{N} 2^{-n} \frac{|x_n^{\psi(k)} - x_n|}{1+|x_n^{\psi(k)} - x_n|} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} 2^{-n} \\ &\leq \sum_{n=0}^{N} 2^{-n} \frac{|x_n^{\psi(k)} - x_n|}{1+|x_n^{\psi(k)} - x_n|} + \varepsilon. \end{aligned}$$

   Encore une fois, on est ramenés maintenant à une somme finie de termes dont chacun tend vers 0 quand $k \to \infty$, par construction. On peut donc rendre cette somme plus petite que ε pour $k \geq k_0$ avec k_0 bien choisi.
   On obtient, au final, l'inégalité

$$d(x^{\psi(k)}, x) \leq 2\varepsilon, \;\; \forall k \geq k_0,$$

   et le résultat est bien démontré.
3. On constate d'abord que la convergence faible implique la convergence simple et on a vu ci-dessus qu'elle-même implique la convergence au sens de la distance d.
   Dans le sens réciproque, on a vu plus haut que comme la suite $(x^k)_k$ est bornée dans l^p, il suffit de montrer la convergence faible pour les $y \in c_f$ car cet espace est dense dans $l^{p'}$. Mais il se trouve que pour $y \in c_f$, la convergence de (x^k, y) vers (x, y) est une conséquence de la convergence simple.

■

IV.2.b Espaces de fonctions

IV.2.b.i Fonctions bornées et continues. On rappelle le résultat essentiel concernant les suites de fonctions continues. Ce théorème a déjà été vu en licence dans un cadre moins général mais il n'y a pas de difficulté technique supplémentaire à se placer dans des espaces métriques quelconques ici.

Théorème I.67 (Limite localement uniforme de suites de fonctions continues)

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues d'un espace métrique (X, d) dans un autre espace métrique (Y, d'). On suppose que $(f_n)_n$ converge **localement uniformément** *vers une fonction $f : X \to Y$ (ceci signifie, que pour tout point $x \in X$, il existe une boule de rayon $r > 0$ centrée en x sur laquelle la convergence de $(f_n)_n$ vers f est uniforme).*
Alors la fonction limite f est elle-même continue.

Dans le cas où l'espace d'arrivée est un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$, on peut étudier l'espace vectoriel $B(X, E)$ des fonctions bornées de X dans E muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_E, \;\; \forall x \in B(X, E).$$

Cette norme est souvent appelée la norme de la convergence uniforme pour des raisons claires.

Ceci définit un nouvel espace vectoriel normé de dimension infinie (dès lors que X n'est pas un ensemble fini) dont on résume quelques propriétés essentielles dans la proposition suivante (voir l'exercice 1 du TD3)

Proposition I.68

L'espace $(B(X, E), \|.\|_\infty)$ est complet si et seulement si E est complet.
L'ensemble des fonctions continues bornées de X dans E est un sous-espace fermé de $B(X, E)$. En particulier, celui-ci est borné dès que E est complet.

On verra plus loin que l'ensemble des fonctions continues de X dans E (non nécessairement bornées) n'est pas raisonnablement normable, en revanche si (X,d) est compact, on a $\mathcal{C}^0(X,E) = \mathcal{C}_b^0(X,E)$ et donc on peut utiliser la norme infinie sur cet espace.

En réalité, il y a un résultat assez fort et que nous verrons dans un chapitre ultérieur (voir l'exercice 11 du TD4), qui dit que la norme infinie est la seule norme *raisonnable* sur cet espace. Plus précisement, si (X,d) est compact, E complet et si $\|.\|$ est une norme quelconque sur $\mathcal{C}^0(X,E)$ qui le rende complet et telle que

$$\|f_n - f\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \implies (f_n)_n \text{ converge simplement vers } f \text{ sur un sous-ensemble dense de } X,$$

alors cette norme $\|.\|$ est équivalente à la norme $\|.\|_\infty$.

IV.2.b.ii Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{C}^\infty$. Dans le cas où on considère des fonctions définies sur des parties de $\mathbb{R}^d$ et non plus sur un espace métrique général, on dispose du calcul différentiel et on peut donc s'intéresser aux classes de régularité supérieure des fonctions. Il faut distinguer selon la nature du domaine de départ considéré.

On supposera ici que l'espace d'arrivée est $\mathbb{R}$ mais cela pourrait être généralisé sans peine. On omettra donc de mentionner l'espace d'arrivée dans les notations qui suivent.

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un ouvert non vide, et $k \geq 0$, on définit par récurrence

$$\mathcal{C}^k(\Omega) = \{f \in \mathcal{C}^{k-1}(\Omega),\ \ \partial_{x_i} f \in \mathcal{C}^{k-1}(\Omega),\ \forall i = 1,...,n\}.$$

La topologie naturelle sur cet espace est celle de la convergence uniforme locale des dérivées jusqu'à l'ordre k. Cette topologie est métrisable mais pas normable, comme on le verra (sur un exemple) dans la section V.

On introduit également

$$\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \cap_{k\geq 0}\mathcal{C}^k(\Omega),$$

dont la topologie naturelle (celle de la convergence locale uniforme de toutes les dérivées partielles) est également métrisable et non normable.

En revanche, dès lors qu'on se place dans un cadre où les fonctions en jeu sont supposées bornées, on peut voir qu'on a affaire à des espaces de Banach.

Proposition I.69

Soit Ω un ouvert non vide quelconque de $\mathbb{R}^d$. L'espace vectoriel suivant

$$\mathcal{C}_b^k(\Omega) = \{f \in \mathcal{C}^k(\Omega),\ \text{t.q. toutes les dérivées partielles de } f \text{ jusqu'à l'ordre } k \text{ sont bornées sur } \Omega\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{k,\infty} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d, |\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha f\|_\infty,$$

est un espace de Banach.

Preuve :

Le cas $k = 0$ a déjà été étudié précédemment (voir l'exercice 1du TD3 qui se place même dans un cadre plus général).

Etudions maintenant le cas $k = 1$, les autres cas étant strictement identiques. Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}_b^1(\Omega)$. Par définition de la norme dans cet espace, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ et $m \geq n_0$, on a

$$\|f_n - f_m\|_\infty + \sum_{i=1}^d \|\partial_i f_n - \partial_i f_m\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Ceci montre que la suite $(f_n)_n$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}_b^0(\Omega)$ mais aussi que toutes les suites des dérivées partielles $(\partial_i f_n)_n$ sont de Cauchy dans $\mathcal{C}_b^0(\Omega)$.

Comme $\mathcal{C}_b^0(\Omega)$ est un Banach, on en déduit que toutes ces suites convergent vers des limites notées respectivement f et g_i pour $i = 1,...,d$. Il s'agit maintenant de montrer que f admet des dérivées partielles en tout point et qui sont égales aux fonctions g_i.

Pour cela, on fixe un point x dans Ω, ainsi qu'un vecteur $h \in \mathbb{R}^d$ non nul, suffisament petit pour que $B(x,|h|) \subset \Omega$. Pour tout n, on écrit maintenant

$$f_n(x+h) - f_n(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f_n(x+th)\,dt = \sum_{i=1}^d \int_0^1 th_i \partial_i f_n(x+th)\,dt.$$

Grâce aux convergences uniformes obtenues plus haut, on peut passer à la limite dans tous les termes (en particulier dans les intégrales) et ainsi obtenir

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{i=1}^{d} \int_0^1 t h_i g_i(x+th)\, dt.$$

On écrit ensuite

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^{d} h_i g_i(x) + \underbrace{\sum_{i=1}^{d} \int_0^1 t h_i (g_i(x+th) - g_i(x))\, dt}_{=R_h},$$

et on déduit en utilisant la continuité des g_i que, par convergence dominée par exemple, le terme de reste R_h vérifie l'estimation

$$|R_h| = o(\|h\|).$$

Ceci prouve bien que f admet des dérivées partielles en x égales respectivement aux $g_i(x)$.

Il s'en suit que f admet des dérivées partielles en tout point de Ω et que les fonctions $\partial_i f$ sont continues et bornées sur Ω. On en déduit que f est bien dans $\mathcal{C}_b^1(\Omega)$.

Par ailleurs, par construction nous avons $f_n \to f$ et $\partial_i f_n \to \partial_i f$ uniformément sur Ω, ce qui montre bien que

$$\|f_n - f\|_{1,\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

■

Si on considère maintenant des fonctions définies non plus sur un ouvert mais sur un fermé $F \subset \mathbb{R}^d$, il est nécessaire de convenir d'une définition raisonnable pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 0$ sur F. En effet, la notion de dérivée n'est définie en toute rigueur que sur l'intérieur de l'ensemble de définition de la fonction et des problèmes peuvent apparaître sur le bord du domaine.

On propose donc de définir

$$\mathcal{C}^k(F) = \{f : F \to \mathbb{R},\ \exists \tilde{f} \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d),\ \text{telle que } \tilde{f} = f,\ \text{sur } F\},$$

il n'y a bien sûr par unicité de la fonction $\tilde{f}$ dans cette définition. De même, en imposant des conditions de bornitude on introduit

$$\mathcal{C}_b^k(F) = \{f : F \to \mathbb{R},\ \exists \tilde{f} \in \mathcal{C}_b^k(\mathbb{R}^d),\ \text{telle que } \tilde{f} = f,\ \text{sur } F\},$$

L'espace $\mathcal{C}_b^k(F)$ peut être muni de la norme suivante

$$\|f\|_{\mathcal{C}_b^k(F)} = \inf_{\tilde{f}} \|\tilde{f}\|_{k,\infty},\ \ \forall f \in \mathcal{C}^k(F),$$

l'infimum étant pris sur l'ensemble des $\tilde{f} \in \mathcal{C}_b^k(\mathbb{R}^d)$ qui prolongent f à $\mathbb{R}^d$ tout entier.

Remarque I.70

Il faut bien voir que $\mathcal{C}^k(F)$ n'est pas l'espace des fonctions continues sur F et de classe $\mathcal{C}^k$ dans l'intérieur de F.

- *Par exemple, la fonction $x \in [0,1] \mapsto \sqrt{x} \in [0,1]$ est bien continue et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ mais elle n'est pas dans $\mathcal{C}^1([0,1])$ car sa dérivée en 0 n'existe pas, ou plus exactement elle ne peut pas se prolonger en une fonction dérivable en 0.*
- *Il se peut aussi que l'intérieur de F soit vide, ce qui fait que la définition alternative (f est $\mathcal{C}^k$ à l'intérieur de F) ne serait d'aucune utilité. Prenons par exemple $F = \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$. Son intérieur est vide et on peut naturellement assimiler les fonctions définies sur F comme des fonctions d'une seule variable. La définition précédente montre alors qu'une fonction $f : F \to \mathbb{R}$ est dans $\mathcal{C}_b^k(F)$ si et seulement si la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto f(x,0)$ est dans $\mathcal{C}_b^k(\mathbb{R})$ et on a alors égalité des normes.*
  La définition proposée est donc bien cohérente.

On peut établir (voir l'exercice 3 du TD3) que cet espace est complet.

Proposition I.71

L'espace $\mathcal{C}_b^k(F)$ ainsi défini est un espace de Banach.

Dans le cas $k = 0$, on obtient l'espace $\mathcal{C}_b^0(F)$ qui est plus usuellement muni de la norme infinie $\|.\|_\infty$. Il se trouve que cette norme est équivalente à la norme $\|.\|_{\mathcal{C}_b^0(F)}$ définie plus haut. On a donc affaire au même espace de Banach. Cela provient du théorème de prolongement de Tietze-Urysohn que l'on donne ici sans démonstration (voir l'exercice 4 du TD3).

Théorème I.72 (de prolongement de Tietze-Urysohn, [9])

Soit (X, d) un espace métrique et Y un fermé de X. Alors, pour toute fonction f continue et bornée sur Y, il existe $g \in \mathcal{C}_b^0(X, \mathbb{R})$ vérifiant

$$g = f, \text{ sur } Y,$$

$$\sup_X |g| = \sup_Y |f|.$$

De façon plus précise, on peut même choisir g pour que

$$\inf_X g = \inf_Y f,$$

$$\sup_X g = \sup_Y f.$$

IV.2.b.iii Espaces L^p. On ne considèrera ici que les espaces construits sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}^d$ (ou d'une partie de $\mathbb{R}^d$) et munis de la mesure de Lebesgue.

On rappelle les énoncés principaux dont nous aurons besoin et qui sont des conséquences de la construction de la mesure de Lebesgue (ces résultats sont encore vrais du reste dans des espaces mesurés beaucoup plus généraux).

Théorème I.73 (Lemme de Fatou)

Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions mesurables positives sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$, on a

$$\int_\Omega \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)\,dx.$$

Théorème I.74 (Convergence monotone)

Si $(f_n)_n$ est une suite **croissante** *de fonctions mesurables positives sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$, alors on a*

$$\int_\Omega \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)\,dx,$$

les deux quantités pouvant être éventuellement infinies.
Si la suite des intégrales $\left(\int_\Omega f_n(x)\,dx\right)_n$ est bornée, alors on a

$$\|f_n - f\|_{L^1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Théorème I.75 (Convergence dominée)

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$. On suppose que la suite converge presque partout vers une fonction f et qu'il existe une fonction positive intégrable g telle que

$$|f_n(x)| \leq g(x), \ \ \forall n \geq 1, \text{ pour presque tout } x \in \Omega.$$

Alors, les fonctions f et $(f_n)_n$ sont toutes intégrables sur Ω et on a

$$\int_\Omega f_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_\Omega f(x)\,dx.$$

Définition et Proposition I.76 (Espaces L^p)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

— *Pour $1 \leq p < +\infty$, on définit $\mathcal{L}^p(\Omega)$ comme étant l'ensemble des fonctions mesurables, telles que $|f|^p$ est une fonction intégrable sur Ω.*

Si f et g sont deux fonctions mesurables telles que $f = g$ presque partout, alors on a

$$\int_\Omega |f(x)|^p \, dx = \int_\Omega |g(x)|^p \, dx,$$

et donc $f \in \mathcal{L}^p(\Omega) \iff g \in \mathcal{L}^p(\Omega)$.

On peut donc définir $L^p(\Omega)$ comme étant le quotient de $\mathcal{L}^p(\Omega)$ par le relation d'équivalence "égalité presque partout". Si $\bar{f} \in L^p(\Omega)$ est l'une de ces classes, on définit de façon naturelle les quantités suivantes en utilisant n'importe lequel des représentants de la classe

$$\int_\Omega |\bar{f}|^p \, dx \;\; \text{et} \;\; \|\bar{f}\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |\bar{f}|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

L'espace $(L^p(\Omega), \|.\|_{L^p})$ ainsi défini est un espace vectoriel normé.

— *Pour $p = +\infty$, on dit que $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ s'il existe un $M > 0$ telle que*

$$|f(x)| \leq M, \;\; \text{pour presque tout } x \in \Omega.$$

Il existe alors une plus petite valeur de M pour laquelle ceci est vrai, et on la note $\|f\|_{\mathcal{L}^\infty}$.

Si $f = g$ presque partout, alors on a $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega) \iff g \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ et dans ce cas $\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} = \|g\|_{\mathcal{L}^\infty}$. On peut alors naturellement définir $L^\infty(\Omega)$ comme le quotient de $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ par la même relation d'équivalence et là encore définir

$$\|\bar{f}\|_{L^\infty} = \|f\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)}, \;\; \forall f \in \bar{f}.$$

L'espace $(L^\infty(\Omega), \|.\|_{L^\infty})$ ainsi défini est également un espace vectoriel normé.

En pratique, sauf si cela introduit des confusions, on identifie sans le dire toujours explicitement une classe de fonction dans $L^p(\Omega)$ à n'importe lequel de ses éléments.

Il est très souvent utile d'avoir en tête une sorte de "réciproque" du théorème de convergence dominée.

Proposition I.77

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions dans $L^p(\Omega)$ qui converge vers une fonction $f \in L^p(\Omega)$. Alors il existe une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_n$ et une fonction $g \in L^p(\Omega)$ telles que

$$\left|f_{\varphi(n)}(x)\right| \leq g(x), \;\; \forall n \geq 0, \;\; \text{pour presque tout } x \in \Omega,$$

$$f_{\varphi(n)}(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x), \;\; \text{pour presque tout } x \in \Omega.$$

Théorème I.78

1. *Pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, l'espace $(L^p(\Omega), \|.\|_{L^p})$ est complet. Pour $p = 2$ c'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire défini par*

$$(f, g)_{L^2} = \int_\Omega f(x) g(x) \, dx, \;\; \forall f, g \in L^2(\Omega).$$

2. *L'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions étagées (i.e. des combinaisons linéaires de fonctions indicatrices de boréliens de mesures finies) est dense dans $L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p < +\infty$.*
3. *Si $1 \leq p < +\infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est séparable, alors que $L^\infty(\Omega)$ n'est pas séparable.*
4. *L'ensemble $\mathcal{C}_c^0(\Omega)$ des fonctions continues à support compact dans Ω est dense dans $L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p < +\infty$.*

Preuve :

1. — Dans le cas $p = +\infty$, la démonstration est similaire à celle effectuée pour l'ensemble des fonctions bornées d'un espace métrique à valeurs dans un espace vectoriel normé. La seule différente venant du fait qu'on travaille modulo la relation d'équivalence “presque partout”.
   — Supposons donc $p < +\infty$. On se donne une suite $(f_n)_n$ de Cauchy dans $L^p(\Omega)$. On utilise la proposition I.46. On se donne une série de fonctions de L^p qui soit absolument convergente et on veut montrer qu'elle converge dans L^p.
   Soit donc $(f_n)_n$ une suite dans $L^p(\Omega)$ telle que
   $$M = \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_{L^p} < +\infty.$$
   On pose pour tout $x \in \Omega$ et $N \geq 1$,
   $$g_N(x) = \sum_{n=0}^{N} |f_n(x)|, \ \ g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)|.$$
   Par l'inégalité triangulaire, on a
   $$\int_\Omega |g_N(x)|^p \, dx = \|g_N\|_{L^p}^p \leq \left(\sum_{n=0}^{N} \|f_n\|_{L^p} \right)^p \leq M^p.$$
   Et donc par le thèorème de convergence monotone, on a
   $$\int_\Omega |g(x)|^p \, dx \leq M^p,$$
   ce qui montre que $g \in L^p(\Omega)$ et en particulier que g est finie presque partout.
   Ainsi, pour presque tout $x \in \Omega$, la série de nombre réels $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est absolument convergente et donc convergente. On note S la (classe de) fonction limite ; par construction elle vérifie $|S| \leq g$ et donc elle est dans $L^p(\Omega)$.
   Enfin, on a la propriété de domination
   $$\left| \sum_{n=0}^{N} f_n(x) - S(x) \right| \leq \sum_{n=0}^{N} |f_n(x)| + |S(x)| \leq 2g(x),$$
   et la convergence presque partout, de sorte que le théorème de convergence dominée de Lebesgue nous permet de conclure que
   $$\int_\Omega \left| \sum_{n=0}^{N} f_n(x) - S(x) \right|^p \, dx \xrightarrow[N\to\infty]{} 0,$$
   et donc que la série des f_n est convergence dans L^p.
   — Le fait que L^2 est un espace de Hilbert est maintenant évident, il suffit de s'assure que la forme bilinéaire proposée est bien un produit scalaire associé à la norme L^2.
2. La densité des fonctions simples est quasiment une définition de l'intégrale de Lebesgue. Cependant, on peut le retrouver aisément si on a oublié la construction de l'intégrale de Lebesgue de la façon suivante.
   Soit $f \in L^p(\Omega)$, $p < +\infty$. On suppose que $f \geq 0$, quitte à séparer f en sa partie positive et sa partie négative.
   Pour tout $N \geq 1$, on introduit la fonction simple suivante
   $$f_N = \sum_{n=0}^{N^2} (n/N) 1_{\{n/N \leq f(x) < (n+1)/N\}}.$$
   Notons que chaque ensemble $A_{n,N} = \{n/N \leq f(x) < (n+1)/N\}$ est bien de mesure finie car
   $$+\infty > \int_\Omega |f|^p \, dx \geq \int_{A_{n,N}} |f|^p \geq \left(\frac{n}{N}\right)^p |A_{n,N}|.$$
   Par construction, on a $0 \leq f_N \leq f$ et donc $0 \leq f_N^p \leq f^p$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée si on montre que f_N converge presque partout (en réalité partout !) vers f. Pour montrer cela, on fixe un $x \in \Omega$, puis on choisit un N_0 tel que $f(x) < (N_0^2 + 1)/N_0$. Il s'ensuit que
   $$\forall N \geq N_0, \exists 0 \leq n \leq N^2, x \in A_{n,N},$$
   et donc
   $$f_N(x) \leq f(x) \leq f_N(x) + 1/N,$$
   ce qui montre bien le résultat.

3. Il suffit de remarquer que l'ensemble des pavés de $\mathbb{R}^d$ dont les coordonnées sont rationnelles engendre la tribu borélienne et donc que les combinaisons linéaires à coefficients rationnels des indicatrices de tels pavés sont denses dans l'ensemble des fonctions simples pour la norme L^p, $p < +\infty$. Il s'agit manifestement d'un ensemble dénombrable et donc la séparabilité de L^p est démontrée.

   La non-séparabilité de L^∞ est un peu plus délicate et nous l'admettrons.

4. Traitons seulement le cas $\Omega = \mathbb{R}^d$. Il est facile d'en déduire le cas général.

   Cette propriété de densité des fonctions continues à support compact est intimement liée à la régularité de la mesure de Lebesgue (notée $|.|$). Cette dernière propriété (voir le cours Mesure/Probas) dit que pour tout borélien B de $\mathbb{R}^d$ nous avons
$$\begin{aligned} |B| &= \sup\left\{|K|, \text{ pour tout } K \text{ compact tel que } K \subset B\right\}, \\ &= \inf\left\{|U|, \text{ pour tout } U \text{ ouvert tel que } B \subset U\right\}. \end{aligned} \tag{I.12}$$

   D'après la question 2, il nous suffit de montrer que pour tout borélien borné B de mesure finie, et tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction continue f telle que
$$\|f - 1_B\|_p^p \leq \varepsilon.$$

   Pour cela, d'après (I.12), on commence par considérer un compact K et un ouvert U tels que $K \subset B \subset U$ et tels que
$$|B \setminus K| \leq 2^{-p-1}\varepsilon, \;\; |U \setminus B| \leq 2^{-p-1}\varepsilon.$$

   Comme B est borné, on peut toujours supposer U borné (il suffit de l'intersecter avec une boule ouverte assez grosse pour contenir B).

   On considère alors le fermé $F = K \subset U^c$ et la fonction $\tilde{f}$ définie sur F par
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in K \\ 0 & \text{si } x \in U^c \end{cases}.$$

   Comme K et U^c sont des fermés disjoints, il est facile de voir que $\tilde{f}$ est continue et bornée (par 1) sur F. D'après le théorème de prolongement de Tietze-Urysohn I.72, cette fonction $\tilde{f}$ se prolonge en une fonction continue f sur $\mathbb{R}^d$ et qui vérifie de plus $0 \leq f \leq 1$. Comme U est borné et que $f = 0$ sur U^c, f a bien un support compact : $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$.

   On peut maintenant calculer
$$\int_{\mathbb{R}^d} |f - 1_B|^p \, dx = \int_{U \setminus K} |f - 1_B|^p \, dx,$$
   car $f = 1_B = 1$ sur K et $f = 1_B = 0$ sur U^c. Ainsi, nous obtenons
$$\int_{\mathbb{R}^d} |f - 1_B|^p \, dx \leq 2^p |U \setminus K| \leq 2^{p+1} 2^{-p-1}\varepsilon = \varepsilon,$$
   et le résultat est démontré.

■

Nous verrons dans le TD3 différentes applications classiques et très importantes de ces résultats.

Plus loin dans ce cours nous démontrerons (au moins dans certains cas) le théorème fondamental et assez difficile suivant. Celui-ci doit faire écho aux résultats donnés par exemple dans l'exercice 10 du TD2 pour les espaces l^p et dont l'analyse est beaucoup plus simple et a pu être menée à bout sans outils très sophistiqués.

Théorème I.79 (de représentation de Riesz)

Soit $1 \leq p < +\infty$ et p' son exposant conjugué ($p' = p/(p-1)$). Pour toute forme linéaire continue $\Phi \in (L^p(\Omega))'$ il existe une unique (classe de) fonctions $g \in L^{p'}(\Omega)$ telle que
$$\forall f \in L^p(\Omega), \;\; \Phi(f) = \int_\Omega f(x) g(x) \, dx,$$
et
$$\|\Phi\|_{L^{p'}} = \|g\|_{L^{p'}}.$$
Ainsi le dual topologique de $L^p(\Omega)$ s'identifie à l'espace $L^{p'}(\Omega)$.
Attention : *le dual de $L^\infty(\Omega)$ ne s'identifie pas à $L^1(\Omega)$!*

V Espaces vectoriels semi-normés ; espaces de Fréchet

Le cadre des espaces vectoriels normés est très agréable car il permet d'utiliser à la fois les bonnes propriétés topologiques et les propriétés linéaires des espaces vectoriels. Malheureusement, il existe des espaces fonctionnels relativement courants qui ne possèdent pas de bonne structure d'espace vectoriel normé.

Donnons-en un exemple simple sans l'intention de développer une théorie générale.

Proposition I.80

Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Il n'existe pas de norme sur E qui définisse la topologie de la convergence localement uniforme, c'est-à-dire pour laquelle une suite $(f_n)_n$ converge vers f si et seulement si $(f_n)_n$ converge vers f uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Preuve :

Supposons qu'une norme N sur E vérifie la propriété de l'énoncé. On se donne une fonction $\varphi \in E$ à support dans $[-1, 1]$ (penser à une dent de scie triangulaire typiquement). On pose alors

$$f_n(x) = \varphi(x - n), \ \ \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geq 0.$$

On pose enfin $g_n = \frac{f_n}{\|f_n\|}$, ce qui est possible car $f_n \neq 0$.

— Montrons que $(g_n)_n$ converge localement uniformément vers 0. En effet, si K est un compact de $\mathbb{R}$, il est en particulier borné et donc pour tout $n \geq n_0$ assez grand on a $[n - 1, n + 1] \cap K = \emptyset$, ce qui montre que g_n est nulle sur K, on a donc
$$\sup_K |g_n| = 0, \ \forall n \geq n_0,$$
ce qui montre le résultat désiré.

— Par construction, on a $\|g_n\| = 1$ pour tout n, et donc $(g_n)_n$ ne tend pas vers 0 au sens de la norme, ce qui contredit l'existence d'une telle norme.

■

On va voir par la suite qu'il est toutefois possible de définir une distance sur $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui définisse la topologie de la convergence localement uniforme et que de plus, l'espace métrique ainsi défini est complet. On va même regarder le cas un peu plus général de l'espace $\mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R})$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

Pour tout $n \geq 1$, on pose
$$K_n = \overline{B}(0, n) \cap \{x \in \mathbb{R}^d, \ \ d(x, \Omega^c) \geq 1/n\}.$$

Il s'agit manifestement d'un fermé borné et donc d'un compact de $\mathbb{R}^d$. On a deplus les propriétés suivantes

$$K_n \subset K_{n+1}, \ \ \forall n \geq 1,$$

$$\Omega = \bigcup_{n \geq 1} K_n.$$

Exercice I.1

Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ tel que $K \subset \Omega$. Montrer qu'il existe $n \geq 1$ tel que $K \subset K_n$.

Ainsi, une suite de fonctions converge uniformément sur tout compact de Ω si et seulement si elle converge uniformément sur tous les K_n. On est donc ramenés à considérer une famille dénombrable de compacts.

L'idée est la suivante : sur chacun des compacts K_n la convergence uniforme est naturellement associée à la norme

$$N_n(f) = \sup_{K_n} |f|, \ \ \forall f \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R}).$$

La problème que nous rencontrons est que N_n est une norme sur $\mathcal{C}^0(K_n, \mathbb{R})$ mais pas sur $\mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R})$ où c'est seulement une semi-norme : il y a des fonctions f non-nulles telles que $N_n(f) = 0$.

On pose maintenant, pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R})$.

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{N_n(f - g)}{1 + N_n(f - g)}.$$

Le théorème suivant montre que cette construction répond à la question initiale.

Théorème I.81

On a les propriétés suivantes :

1. *L'application d est une distance sur $\mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R})$.*
2. *Une suite $(f_k)_k$ converge vers f dans $(\mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R}), d)$ si et seulement si $(f_k)_k$ converge vers f uniformément sur tout compact de Ω.*
3. *L'espace métrique $(\mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R}), d)$ est complet.*

Preuve :

On va utiliser dans la suite le fait que la fonction

$$\xi \in [0, +\infty[\mapsto \frac{\xi}{1+\xi} \in [0, 1[,$$

est strictement croissante. En particulier, on remarque que le n-ième terme de la série qui définit d est majoré par 2^{-n}, quelque soit f et g, et donc la série est bien convergente

1. La symétrie et la positivité de d sont claires. Par ailleurs, si $d(f, g) = 0$, alors cela implique que $N_n(f - g) = 0$ pour tout n, ce qui signifie que $f = g$ sur tous les compacts K_n. Comme Ω est la réunion de tous les K_n, cela implique bien que $f = g$.

   Enfin, l'inégalité triangulaire découle de l'inégalité triangulaire pour les semi-normes N_n et de la croissance de l'application $\xi \mapsto \xi/(1 + \xi)$ comme nous l'avons mentionné au début de la preuve.
2. — Soit $(f_k)_k$ une suite qui converge vers f au sens de la distance d. Par définition de d, on a que pour tout $n \geq 0$,

   $$N_n(f_k - f) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.,$$

   et donc $(f_k)_k$ converge vers f uniformément sur tous les compacts $(K_n)_n$. Comme tout compact K de Ω est contenu dans l'un des compacts K_n, on en déduit bien que $(f_k)_k$ converge uniformément vers f sur tout compact de Ω.

   — Réciproquement, si $(f_k)_k$ converge vers f sur tout compact, on va montrer que $d(f_k, f)$ tend vers 0. On se fixe un $\varepsilon > 0$ et on commence par choisir un $N \geq 1$ tel que

   $$\sum_{n=N+1}^{+\infty} 2^{-n} \leq \varepsilon.$$

   Ceci étant fait, on observe que

   $$\begin{aligned} d(f_k, f) &\leq \sum_{n=0}^{N} 2^{-n} \frac{N_n(f_k - f)}{1 + N_n(f_k - f)} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} 2^{-n} \\ &\leq \sum_{n=0}^{N} 2^{-n} \frac{N_n(f_k - f)}{1 + N_n(f_k - f)} + \varepsilon \\ &\leq \frac{N_N(f_k - f)}{1 + N_N(f_k - f)} + \varepsilon. \end{aligned}$$

   Comme le choix de N ne dépend que de ε, on peut maintenant utiliser la convergence uniforme de f_k vers f sur le compact K_N pour en déduire qu'il existe k_0 tel que $N_N(f_k - f) \leq \varepsilon$ pour $k \geq k_0$ ce qui donne

   $$d(f_k, f) \leq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} + \varepsilon \leq 2\varepsilon, \ \ \forall k \geq k_0,$$

   et le tour est joué.
3. Soit $(f_k)_k$ une suite de Cauchy dans $(\mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R}), d)$. Au vu de la définition de la distance, nous voyons que cela implique que, pour tout n, la suite des restrictions $(f_{k|K_n})_k$ est de Cauchy dans $\mathcal{C}^0(K_n)$ qui est un Banach. Ainsi, pour tout n, cette suite converge vers une certain fonction continue $g_n \in \mathcal{C}^0(K_n)$.

   Comme les compacts K_n sont emboités et donc que la convergence uniforme sur K_{n+1} implique la convergence uniforme sur K_n, nous voyons ques les limites g_n obtenues précédemment se recollent parfaitement, c'est-à-dire que

   $$g_{n+1} = g_n, \ \ \text{sur } K_n.$$

On peut donc définir une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continue par la formule

$$f(x) = g_n(x), \quad \text{si } x \in K_n,$$

car $g_n(x)$ ne dépend pas de la valeur de n qui convient.

Il est alors clair que la suite $(f_k)_k$ converge uniformément vers f sur tous les compacts K_n. Comme on l'a vu ci-dessus, cela implique bien que $d(f_k, f) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ et on a donc bien montré que la suite de Cauchy $(f_k)_k$ est convergente.

■

Ce type de construction est en fait très générale et s'applique à tout espace muni d'une famille séparante dénombrable de semi-normes. Un tel espace, s'il est complet, s'appelle un espace de Fréchet. La plupart des résultats valables dans les espaces métriques complets le sont encore dans les Fréchet.

Chapitre II

Théorèmes fondamentaux dans les espaces métriques complets

I Théorème du point fixe de Banach

I.1 Enoncé, preuve, variantes et commentaires

Théorème II.1

Soit (X,d) un espace métrique complet et $f : X \to X$ une application k-contractante (voir Définition I.18). Alors il existe un unique point fixe $x^* \in X$ de f dans X (i.e. une unique solution de $f(x^*) = x^*$) et de plus, pour tout choix de $x_0 \in X$, la suite définie par récurrence par

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

converge vers x^*. Enfin, on a l'estimation d'erreur

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1), \quad \forall n \geq 0.$$

Preuve :

— Supposons qu'il existe deux points fixes $x^*, x_* \in X$. On a alors

$$d(x^*, x_*) = d(f(x^*), f(x_*)) \leq kd(x^*, x_*),$$

et comme $k < 1$, ceci n'est possible que si $x^* = x_*$.

— On se donne $x_0 \in X$, puis on construit la suite $(x_n)_n$ par récurrence comme dans l'énoncé. On a donc

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq kd(x_n, x_{n-1}).$$

Ainsi, on a

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0).$$

On en déduit par inégalité triangulaire

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq (k^n + ... + k^{n+p-1}) d(x_1, x_0) = \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0).$$

Comme $k < 1$, la suite du membre de droite tend vers 0 quand $n \to \infty$ et donc on a prouvé que $(x_n)_n$ est de Cauchy dans X. Comme cet espace est complet, la suite $(x_n)_n$ converge vers une limite notée x^*. Par passage à la limite dans l'équation qui définit la suite on obtient bien que $f(x^*) = x^*$, ce qui est le résulat attendu. L'estimation d'erreur s'obtient par passage à la limite ($p \to \infty$) dans l'inégalité ci-dessus.

■

Exemple II.2

Il est important de remarquer que la conclusion du théorème ne fait intervenir que la topologie sur X, alors que l'hypothèse est de nature métrique. Ainsi, le choix d'une bonne métrique qui rende contractante l'application f peut ne pas être trivial même parmi une classe de métriques topologiquement équivalentes.
Illustrons cela sur l'exemple élémentaire suivant. On considère l'espace vectoriel normé $X = \mathbb{R}^2$ (toutes les normes y sont équivalentes !) et l'application

$$f : x \in \mathbb{R}^2 \mapsto Ax \in \mathbb{R}^2,$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si l'on prend la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^2$, l'application f n'est pas contractante. En effet, si on note (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$, nous avons

$$\frac{\|f(e_2) - f(0)\|_2}{\|e_2 - 0\|_2} = \frac{\|f(e_2)\|_2}{\|e_2\|_2} = 2,$$

et donc la constante de Lipschitz de f pour cette norme est au moins égale à 2. On ne peut donc pas appliquer le théorème du point fixe dans ce cadre.
En revanche, la matrice A est diagonalisable et il existe donc une matrice de passage $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = D,$$

et si on définit la norme suivante sur $\mathbb{R}^2$

$$N(x) = \|Px\|_2, \;\; \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

alors nous avons pour tout $x, y \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} N(f(x) - f(y)) &= N(f(x-y)) = N(A(x-y)) \\ &= \|PA(x-y)\|_2 = \|DP(x-y)\|_2 \\ &\leq \|D\|_2 \|P(x-y)\|_2 = \frac{1}{2} N(x-y), \end{aligned}$$

et donc f est $1/2$-contractante pour la norme N.
L'unique point fixe de f est bien entendu $x^* = 0$ dans ce cas.

Corollaire II.3

On prend les mêmes notations que précédemment. On ne suppose plus que f est contractante, mais seulement qu'il existe une itérée de f, notée $f^p = f \circ \cdots \circ f$ qui est contractante. Alors la conclusion est la même : existence e tunicité du point fixe et convergence de la suite des itérées vers celle-ci.

Preuve :

On applique tout d'abord le théorème du point fixe de Banach à l'application f^p (qui est contractante par hypothèse). Il existe donc un unique point fixe l de f^p, i.e. qui vérifie

$$f^p(l) = l.$$

Si on applique f à cette égalité, nous trouvons

$$f^p(f(l)) = f(f^p(l)) = f(l),$$

ce qui prouve que $f(l)$ est lui-même un point fixe de f^p. Ce dernier étant unique (est égal à l), nous en déduisons que $f(l) = l$ et donc que l est bien un point fixe de l.

Il reste à montrer que la suite des itérées converge bien vers l. Pour tout $0 \leq k \leq p-1$, la suite $(x_{k+np})_n$ est une suite construite en itérant f^p et donc elle converge vers l d'après le Théorème II.1. Dès lors, on peut montrer que toute la suite $(x_n)_n$ converge vers l d'après le résultat classique (et assez utile à retenir) démontré dans le lemme II.4 qui suit. ■

Lemme II.4

Soit $(x_n)_n$ une suite d'un espace métrique (X, d), $p \geq 2$ un entier et $l \in X$. On suppose que pour tout $0 \leq k \leq p-1$, la sous-suite $(x_{k+np})_n$ converge vers l, alors toute la suite $(x_n)_n$ converge vers l.

Preuve :

On se donne $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, pour tout $0 \leq k \leq p-1$, il existe n_k tel que

$$\forall n \geq n_k, \quad d(x_{k+np}, l) \leq \varepsilon. \tag{II.1}$$

On pose maintenant $N = (p+1) \times (\max_{0 \leq k \leq p-1} n_k)$. Soit alors $n \geq N$ quelconque, on note k son reste modulo p, de sorte que l'on a $n = k + mp$ avec $m \in \mathbb{N}$. Par construction de N, on voit que $m \geq n_k$ et donc par (II.1) on a bien

$$d(x_n, l) \leq \varepsilon.$$

■

Exemple II.5

Un exemple très élémentaire d'application du corollaire précédent est, par exemple, le cas de la fonction réelle définie par $f(x) = \cos(x)$. On vérifie aisément que f n'est pas contractante (car il y a des points où $|f'(x)| = 1$) mais par contre, on peut montrer à l'aide du théorème des accroissements finis que $f \circ f$ est contractante sur $\mathbb{R}$. Ainsi, on obtient qu'il existe un unique nombre réel x^* tel que

$$\cos(x^*) = x^*,$$

et que celui-ci peut s'obtenir en construisant la suite d'itérées

$$x_{n+1} = \cos(x_n),$$

pour tout choix de la donnée intiale x_0.

I.2 Applications

Le théorème du point-fixe précédent admet de très nombreuses applications et demeure l'un des outils principaux de résolution de certains problèmes concrets comme on va le voir par la suite. Il est remarquable que (contrairement à d'autres théorèmes de point fixe que nous ne verrons pas dans ce cours) le résultat ne se contente pas de donner l'existence et l'unicité du point fixe mais aussi un procédé de construction d'un tel point fixe.

I.2.a Inversion d'applications Lipschitziennes. Inversion locale

On commence par démontrer une sorte de version non-linéaire du lemme de Von Neumann (Exercice 3 du TD2), dans un espace de Banach.

Proposition II.6

Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach et $f : E \to E$ une application Lipschitzienne. On suppose que $\mathrm{Lip}(f) < 1$, alors $\mathrm{Id} - f$ est une bijection et son inverse est Lipschitzienne avec

$$\mathrm{Lip}(\mathrm{Id} - f) \leq (1 - \mathrm{Lip}(f))^{-1}.$$

Preuve :

On fixe $y \in E$ quelconque. Il s'agit de démontrer que l'équation

$$x - f(x) = y,$$

admet une unique solution. On pose donc $\varphi_y(x) = y + f(x)$ et on est donc ramené à montrer que l'application φ_y admet un unique point fixe. Pour cela, on utilise le théorème du point fixe de Banach en montrant que φ_y est contractante ce qui provient du calcul suivant

$$\|\varphi_y(x_1) - \varphi_y(x_2)\| = \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \mathrm{Lip}(f)\|x_1 - x_2\|, \quad \forall x_1, x_2 \in E,$$

et du fait que $\mathrm{Lip}(f) < 1$.

Ceci prouve la bijectivité de $\mathrm{Id} - f$ et de plus, si on pose $x_1 = (\mathrm{Id} - f)^{-1}(y_1)$ et $x_2 = (\mathrm{Id} - f)^{-1}(y_2)$, on a

$$y_1 - y_2 = (x_1 - x_2) - (f(x_1) - f(x_2)),$$

d'où

$$\|x_1 - x_2\| \leq \|y_1 - y_2\| + \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \|y_1 - y_2\| + \mathrm{Lip}(f)\|x_1 - x_2\|,$$

et ainsi

$$\|x_1 - x_2\| \leq (1 - \mathrm{Lip}(f))^{-1}\|y_1 - y_2\|,$$

ce qui donne l'estimation attendue. ■

Remarque II.7

En regardant attentivement la démonstration de ce résultat, on sait que l'on peut construire $(\mathrm{Id} - f)^{-1}(y)$ en itérant l'application φ_y, en partant par exemple de $x_0 = 0$. Ecrivons les premières itérations

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_1 &= y + f(0), \\ x_2 &= y + f(y + f(0)), \\ x_3 &= y + f(y + f(y + f(0))), \end{aligned}$$

On remarque que, si f est linéaire, c'est-à-dire que $f(x) = Tx$ où $T \in L(E, E)$, les itérations deviennent

$$x_n = (\mathrm{Id} + T + T^2 + ...T^{n-1})(y),$$

et donc on retrouve la formule donnée par le lemme de Von Neumann

$$(\mathrm{Id} - T)^{-1}y = \sum_{n\geq 0} T^n y.$$

Ce résultat permet par exemple de montrer l'existence et l'unicité des solutions du schéma d'Euler implicite dans le cadre de la résolution numérique d'un problème de Cauchy pour une équation différentielle ordinaire.

Exercice II.1 (Méthode d'Euler implicite)

On se donne une fonction $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ globalement Lipschitzienne, de constante de Lipschitz L et une donnée initiale $y_0 \in \mathbb{R}^d$. On se fixe un pas de temps $\Delta t > 0$.

1. *Montrer que, si le pas de temps Δt est assez petit alors la formule de récurrence suivante définit de façon unique une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^d$*

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = F(y_{n+1}), \ \ \forall n \geq 0.$$

2. *A n fixé, proposer une méthode itérative de calcul d'une approximation de y_{n+1}.*

Corrigé :

Si y_n est connu, il nous suffit de résoudre l'équation non-linéaire suivante

$$y_{n+1} - (\Delta t)F(y_{n+1}) = y_n,$$

c'est-à-dire d'inverser l'application $\mathrm{Id} - (\Delta t)F$. Comme $\mathrm{Lip}((\Delta t)F) = (\Delta t)L$, on voit que ceci est possible pour Δt assez petit, c'est-à-dire dès que $L(\Delta t) < 1$. ■

On peut aussi étudier les propriétés topologiques de l'ensemble des applications lipschitziennes inversibles et d'inverse lipschitzien.

Exercice II.2

Pour tout $f : E \to E$ Lipschitzienne, on définit

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} = \|f(0)\| + \mathrm{Lip}(f).$$

1. *Montrer que $\|.\|_{\mathrm{Lip}}$ définit une norme sur l'ensemble $\mathrm{Lip}(f)$ des fonctions Lipschitziennes.*
2. *Vérifier que l'espace vectoriel normé ainsi défini est un Banach.*
3. *Démontrer que l'ensemble G des applications Lipschitziennes inversibles et d'inverse Lipschitzienne est un ouvert de $\mathrm{Lip}(f)$.*

Corrigé :

1. Il n'y a aucune difficulté particulière ici.
2. Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy pour $\|.\|_{\mathrm{Lip}}$. On a en particulier
$$\|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \|f_n(0) - f_m(0)\| + \mathrm{Lip}(f_n - f_m)\|x\|, \ \ \forall x \in \mathbb{R}^d.$$
En particulier, la suite $(f_n(x))_n$ est de Cauchy pour tout x et donc converge. On note $f(x)$ la limite de cette suite. Pour tout n et tout $x, y \in E$, on a
$$\|(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(y) - f_m(y))\| \leq \mathrm{Lip}(f_n - f_m)\|x - y\|,$$
Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on a $\mathrm{Lip}(f_n - f_m) \leq \varepsilon$ dès que n et m sont plus grands qu'un certain n_0. Pour de tels n et m, on a donc
$$\|(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(y) - f_m(y))\| \leq \varepsilon\|x - y\|.$$
On peut maintenant passer à la limite quand $m \to \infty$ et obtenir
$$\|(f_n(x) - f(x)) - (f_n(y) - f(y))\| \leq \varepsilon\|x - y\|, \ \ \forall x, y \in E.$$
Ceci montre à la fois que f est Lipschitzienne et que $\mathrm{Lip}(f_n - f) \leq \varepsilon$. Comme on sait déjà que $\|f_n(0) - f(0)\|$ tend vers 0, on a bien la convergence
$$\|f_n - f\|_{\mathrm{Lip}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$
3. Soit $f \in G$ et $g \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ quelconque. On veut montrer que si $\|g\|_{\mathrm{Lip}}$ est assez petit, alors $f+g \in G$. Pour cela, on écrit $f+g = f \circ (\mathrm{Id} + f^{-1} \circ g)$. Comme $f \in G$ et que G est un groupe, il suffit de montrer que $\mathrm{Id} + f^{-1} \circ g \in G$. D'après la Proposition II.6, ceci est vrai dès que $\mathrm{Lip}(f^{-1} \circ g) < 1$. Comme on a $\mathrm{Lip}(f^{-1} \circ g) \leq \mathrm{Lip}(f^{-1})\,\mathrm{Lip}(g)$, on a bien les propriétés suivantes
$$\|g\|_{\mathrm{Lip}} < \frac{1}{\mathrm{Lip}(f^{-1})} \Rightarrow \mathrm{Lip}(g) < \frac{1}{\mathrm{Lip}(f^{-1})} \Rightarrow \mathrm{Lip}(f^{-1} \circ g) < 1 \Rightarrow f + g \in G.$$
On a donc montré que si $f \in G$, on a
$$B_{\mathrm{Lip}}(f, \mathrm{Lip}(f^{-1})^{-1}) \subset G,$$
et G est donc bien un ouvert de $\mathrm{Lip}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$.

■

Théorème II.8 (Théorème d'inversion locale)

Soit $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ et $x_0 \in \mathbb{R}^d$. On suppose que $DF(x_0)$ est inversible, alors il existe un voisinage ouvert U de x_0 et un voisinage ouvert V de $F(x_0)$ tel que F soit un difféomorphisme de U sur V.

Preuve :

Quitte à changer F en $x \mapsto F(x + x_0) - F(x_0)$ on peut toujours supposer que $x_0 = y_0 = 0$. On écrit ensuite
$$F(x) = DF(0).\big(x + (DF(0)^{-1}F(x) - x)\big),$$
et comme $DF(0)$ est inversible, il suffit d'après la Proposition II.6 de montrer que $G = DF(0)^{-1}F - \mathrm{Id}$ vérifie $\mathrm{Lip}(G) < 1$, au moins localement. Pour cela, on constate que $G(0) = 0$ et $DG(0) = 0$ et donc il existe une boule $\overline{B}(0, r)$ telle que
$$k \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in \overline{B}} \|DG(x)\| < 1,$$

et

$$DF(x), \text{ est inversible pour tout } x \in \overline{B}(0,r).$$

L'inégalité des accroissements finis montre alors que $G_{|\bar{B}}$ est bien Lipschitzienne de rapport $k < 1$ sur $\bar{B}$. On construit alors une fonction Lipschitzienne $\tilde{G} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ qui prolonge $G_{|\bar{B}}$ et telle que $\text{Lip}(\tilde{G}) < 1$ (Lemme II.15 et remarque II.16). L'application $\text{Id} + \tilde{G}$ est donc inversible (et d'inverse Lipschitzien) et il en est donc de même que l'application

$$\tilde{F} = DF(0).(\text{Id} + \tilde{G}).$$

Comme par construction F et $\tilde{F}$ coincident sur l'ouvert $U = B(0,r)$, on voit bien que F réalise un homéomorphisme de U dans $V = F(U)$ et comme de plus, par choix de r, la différentielle de F ne s'annulle pas dans U, un exercice de calcul différentiel élémentaire montre que $F^{-1} : V \to U$ est elle même de classe $\mathcal{C}^1$. ■

I.2.b Equations intégrales de Volterra

On se donne un intervalle compact $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ et une fonction continue $K : I \times I \to \mathbb{R}$, appelée **noyau**. Etant donnée une fonction continue $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ nous nous intéressons au problème suivant :

$$\text{Trouver } x : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ continue vérifiant } x(t) = g(t) + \int_a^t K(t,s)x(s)\,ds, \quad \forall t \in I.$$

Théorème II.9

Le problème précédent admet une unique solution. De plus, il existe une fonction continue $R : I \times I \to \mathbb{R}$ ne dépendant que de I et K, appelée **noyau résolvant***, telle que la solution x du problème s'écrive sous la forme*

$$x(t) = g(t) + \int_a^t R(t,s)g(s)\,ds.$$

Preuve :

On se place dans l'espace $E = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, muni de la norme infinie et on introduit l'application

$$\Phi : z \in E \mapsto \Phi(z) \in E,$$

où $\Phi(z)$ est définie par

$$\Phi(z)(t) = g(t) + \int_a^t K(t,s)\,z(s)\,ds.$$

On va chercher à appliquer le théorème du point fixe, ou plutôt le Corollaire II.3. Pour cela, on note $M = \sup_{I\times I}|K|$ et on établit l'inégalité suivante

$$|\Phi(z_1 - z_2)(t)| \leq \int_a^t |K(t,s)||z_1(s) - z_2(s)|\,ds \leq M(t-a)\|z_1 - z_2\|_\infty.$$

On observe que si $M(b-a) < 1$, alors l'application Φ est contractante et le théorème du point fixe s'applique. Si cette hypothèse n'est pas vérifiée, il faut aller plus loin et estimer l'itérée Φ^2 :

$$|\Phi^2(z_1 - z_2)(t)| \leq M^2\frac{(t-a)^2}{2}\sup_{a\leq s\leq t}|z_1 - z_2|,$$

et ainsi de suite, on arrive à l'inégalité

$$\|\Phi^n(z_1 - z_2)\|_\infty \leq \frac{M^n(b-a)^n}{n!}\|z_1 - z_2\|_\infty,$$

ce qui montre que Φ^n est contractante pour n assez grand et clôt la preuve.

On veut maintenant obtenir l'existence du noyau résolvant. Pour cela, on va utiliser le fait que les itérées de Picard (partant par exemple de la fonction $x_0 = g$) convergent (uniformément) vers la solution x du problème. On a ainsi

$$x_0(t) = g(t),$$

$$x_1(t) = \Phi(x_0)(t) = g(t) + \int_a^t K(t,s)g(s)\,ds,$$

et par une récurrence immédiate et le théorème de Fubini, on obtient que

$$x_n(t) = g(t) + \int_a^t \left(\sum_{i=1}^{n} K_i(t,s) \right) g(s)\, ds, \tag{II.2}$$

où les fonctions K_i sont définies par récurrence par

$$K_1 = K,$$

$$K_{i+1}(t,s) = \int_s^t K(t,u)K_i(u,s)\, du, \quad \forall i \geq 1.$$

Une récurrence immédiate montre que

$$|K_{i+1}(t,s)| \leq \frac{M^{i+1}(t-s)^i}{i!}, \quad \forall t,s \in I,$$

et en particulier

$$\sup_{I\times I} |K_{i+1}| \leq \frac{M^{i+1}(b-a)^i}{i!}.$$

On pose alors

$$R(t,s) = \sum_{i=1}^{+\infty} K_i(t,s),$$

qui est une série normalement convergente d'après l'estimation des K_i obtenue ci-dessus. Ainsi, R est bien définie et continue sur $I \times I$. Il suffit de passer à la limite dans (II.2) pour obtenir le résultat annoncé. ■

I.2.c Les théorèmes de Cauchy-Lipschitz

On se donne une application continue $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ et un $y_0 \in \mathbb{R}^d$. Il s'agit de montrer l'existence et l'unicité d'une solution au problème suivant

$$\begin{cases} y'(t) = F(t, y(t)), \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{II.3}$$

Plus exactement, il s'agit de trouver un intervalle I tel que $0 \in \circ I$ et une fonction dérivable $y : I \to \mathbb{R}$ vérifiant le problème ci-dessus. Il faut bien comprendre que trouver l'intervalle I fait partie intégrante du problème.

On commence par montrer le lemme suivant.

Lemme II.10 (Formulation intégrale)

Le couple (I, y) est solution de (II.3) si et seulement si

1. $y \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^d)$.
2. *Pour tout $t \in I$, on a l'égalité*

$$y(t) = y_0 + \int_0^t F(s, y(s))\, ds. \tag{II.4}$$

Preuve :

La condition nécessaire s'obtient immédiatement en intégrant (II.3) entre 0 et t (sachant que toute fonction dérivable est continue).

Il s'agit en fait de montrer que les conditions proposées sont suffisantes. A priori, on suppose seulement que y est continue mais si l'on regarde attentivement (II.4), on voit que y est une primitive de la fonction $s \mapsto F(s, y(s))$ qui est elle-même continue car composée de fonctions continues. Ainsi, y est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Par ailleurs, en évaluant (II.4) en $t = 0$, on a bien $y(0) = y_0$ et enfin en dérivant cette même équation par rapport à t, on trouve bien que y vérifie l'équation différentielle. ■

L'intérêt de ce lemme est de permettre de chercher la solution dans un espace fonctionnel plus gros (l'ensemble des fonctions continues, au lieu de l'ensemble des fonctions dérivables) et d'autre part de transformer un problème différentiel en problème intégral.

Ceci étant fait, la stratégie de résolution est la suivante. On prend un intervalle compact I contenant 0 dans son intérieur (celui-ci sera choisi ensuite), puis on introduit l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^d)$ sur lequel on définit l'application

$$\Phi : z \in E \mapsto \Phi(z) = \left(t \in I \mapsto y_0 + \int_0^t F(s, z(s))\, ds \right).$$

Résoudre le problème de Cauchy (II.3) revient donc à trouver un point fixe de I.

En vue de l'application du théorème de point fixe de Banach, il faut munir E d'une bonne topologie métrique (i.e. qui le rende complet) de sorte que Φ soit contractante (ou une de ses itérées ...).

C'est ici que des hypothèses supplémentaires sur la fonction F vont intervenir.

Définition II.11

On dit que $F : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ est globalement Lipschitzienne par rapport à la variable d'état y s'il existe $k : \mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ continue telle que

$$\|F(t,y_1)-F(t,y_2)\| \leq k(t)\|y_1-y_2\|,\ \ \forall t\in\mathbb{R}, \forall y_1,y_2\in\mathbb{R}^d.$$

Théorème II.12 (Cauchy-Lipschitz global)

On suppose que F est globalement Lipschitzienne par rapport à la variable d'état.
Alors, pour toute donnée initiale y_0, il existe une unique solution **globale***, c'est-à-dire définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, du problème de Cauchy (II.3).*

On va donner trois preuves de ce résultat qui utilisent toutes le théorème du point fixe sous une forme un peu différente.

Preuve (Première méthode):

On pose $I=[-T,T]$ pour tout $T>0$ et on va établir que Φ est contractante dans $E_T=\mathcal{C}^0([-T,T],\mathbb{R}^d)$ muni de la norme infinie si T est suffisamment petit.

Pour tout $t\in I$, on a

$$\Phi(y_1)(t)-\Phi(y_2)(t)=\int_0^t F(s,y_1(s))-F(s,y_2(s))\,ds,$$

et donc (prendre garde à l'ordre des bornes dans l'intégrale)

$$\begin{aligned}\|\Phi(y_1)(t)-\Phi(y_2)(t)\| &\leq \left|\int_0^t k(s)\|y_1(s)-y_2(s)\|\,ds\right|,\\ &\leq \left(\int_{-T}^T k(s)\,ds\right)\left(\sup_{[-T,T]}\|y_1-y_2\|\right).\end{aligned}$$

Si maintenant on prend le supremum pour $t\in[-T,T]$, on trouve

$$\|\Phi(y_1)-\Phi(y_2)\|_{E_T}\leq\left(\int_{-T}^T k(s)\,ds\right)\|y_1-y_2\|_{E_T}.$$

Si on choisit T assez petit pour que

$$\left(\int_{-T}^T k(s)\,ds\right)<1,$$

ce qui est toujours possible, alors on a bien montré que Φ était contractante sur E_T. Le théorème du point fixe de Banach nous montre donc que cette application admet un unique point fixe dans E_T, c'est-à-dire que le problème de Cauchy (II.3) admet une et une seule solution sur l'intervalle $[-T,T]$.

On veut montrer que cette solution est en fait définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Pour cela, il suffit de constater que le temps d'existence T obtenu plus haut ne dépend que de k mais pas de la donnée y_0. Un petit argument simple montre alors que l'on peut recoller toutes les solutions pour obtenir une solution globale. ∎

Preuve (Deuxième méthode, semblable à celle utilisée pour l'équation de Volterra, Section I.2.b):

On fixe $T>0$ quelconque cette fois (aussi grand qu'on veut) et on note $K_T=\sup_{[-T,T]}k(t)$. Les calculs précédents montrent en fait que

$$\begin{aligned}\|\Phi(y_1)(t)-\Phi(y_2)(t)\| &\leq \left|\int_0^t k(s)\|y_1(s)-y_2(s)\|\,ds\right|,\\ &\leq tK_T\left(\sup_{[-t,t]}\|y_1-y_2\|\right).\end{aligned}$$

De sorte que la fonction Φ^2 (itérée deux fois) vérifie

$$\|\Phi^2(y_1)(t)-\Phi^2(y_2)(t)\|\leq\frac{t^2}{2}K_T^2\left(\sup_{[-t,t]}\|y_1-y_2\|\right),$$

et ainsi de suite, par récurrence, on trouve

$$\|\Phi^p(y_1)(t) - \Phi^p(y_2)(t)\| \leq \frac{t^p}{p!} K_T^p \left(\sup_{[-t,t]} \|y_1 - y_2\| \right).$$

Ainsi, nous avons l'estimation

$$\|\Phi^p(y_1) - \Phi^p(y_2)\|_{E_T} \leq \frac{T^p}{p!} K_T^p \|y_1 - y_2\|_{E_T}.$$

Or, nous avons

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{T^p}{p!} K_T^p = 0,$$

ce qui signifie qu'on peut choisir l'exposant p de sorte que l'itérée Φ^p soit contractante dans E_T. D'après le corollaire II.3, on déduit l'existence d'un unique point fixe de Φ dans E_T, et ce pour toute valeur de T, ce qui donne bien le résultat attendu. ■

Preuve (Troisième méthode):

Pour simplifier un peu les notations, on va supposer que la fonction k est bornée (par une constante notée $K > 0$), et que $t \mapsto F(t, 0)$ est également bornée (aussi par la même constante K) mais cela n'est en réalité d'aucune importance.

On va maintenant directement travailler dans $I = \mathbb{R}$ et dans l'espace suivant

$$E = \{z \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d), \text{ t.q. } \sup_{t\in\mathbb{R}} \|z(t)\| e^{-2K|t|} < +\infty\},$$

que l'on munit de la norme

$$\|z\|_E = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left(\|z(t)\| e^{-2K|t|}\right).$$

On peut aisément montrer que l'espace vectoriel normé E est un Banach (voir Exercice 2du TD3). On va montrer que cet espace a été bien choisi pour que l'application Φ envoie E dans lui-même et qu'elle soit contractante pour la distance associée.

On montre d'abord que $\Phi(0) \in E$. Pour cela on écrit, pour $t \geq 0$,

$$\|\Phi(0)(t)\| \leq \|y_0\| + \int_0^t \|F(s, 0)\| \, ds = \|y_0\| + Kt.$$

Il est donc bien clair que $\sup_{t\geq 0} e^{-2Kt} \|\Phi(0)(t)\| < +\infty$. Un calcul similaire pour les $t < 0$ montre bien le résultat attendu.

Soient maintenant $z_1, z_2 \in E$. On effectue le calcul suivant, pour $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
\|\Phi(z_1)(t) - \Phi(z_2)(t)\| &\leq \int_0^t \|F(s, z_1(s)) - F(s, z_2(s))\| \, ds \\
&\leq \int_0^t k(s) \|z_1(s) - z_2(s)\| \, ds \\
&\leq \int_0^t K e^{2Ks} \|z_1(s) - z_2(s)\| e^{-2Ks} \, ds \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^t K e^{2Ks} \, dx \right) \|z_1 - z_2\|_E \\
&= \frac{1}{2} e^{2Kt} \|z_1 - z_2\|_E.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $t \geq 0$, on a

$$\sup_{t\geq 0} \left(e^{-2Kt} \|\Phi(z_1)(t) - \Phi(z_2)(t)\| \right) \leq \frac{1}{2} \|z_1 - z_2\|_E.$$

On peut obtenir le même genre d'estimation pour les $t < 0$ et donc, on a tout à la fois montré que E est stable par Φ (en prenant $z_2 = 0$) et son caractère contractant.

Le théorème du point fixe de Banach nous donne donc l'existence et l'unicité de la solution du problème recherché dans l'espace E.

Notons que cette méthode ne permet pas de déterminer s'il existe ou pas des solutions du problème initial qui ne seraient pas dans E. En réalité de telles solutions n'existent pas. En effet, si y est une fonction continue solution de (II.4), alors nous avons (toujours pour $t \geq 0$)

$$\begin{aligned}\|y(t)\| &\leq \|y_0\| + \int_0^t \|F(s, y(s))\| \, ds \\ &\leq \|y_0\| + \int_0^t \|F(s, y(s)) - F(s, 0)\| \, ds + \int_0^t \|F(s, 0)\| \, dx \\ &\leq \|y_0\| + Kt + K \int_0^t \|y(s)\| \, ds,\end{aligned}$$

ce qui donne

$$(1 + \|y(t)\|) \leq (1 + \|y_0\|) + K \int_0^t (1 + \|y(s)\|) \, ds,$$

et par l'inégalité de Gronwall, on trouve

$$\|y(t)\| \leq 1 + \|y(t)\| \leq (1 + \|y_0\|)e^{Kt}, \forall t \geq 0,$$

avec une estimation identique pour les $t < 0$, on a bien obtenu que y est dans E, ce qui clôt la preuve. ■

Sous des hypothèses plus faibles de F, le même genre de techniques permet de montrer l'existence et l'unicité **locale** (c'est-à-dire sur un intervalle éventuellement petit) d'une solution au problème de Cauchy considéré. Pour simplifier un peu, on va supposer que F ne dépend pas de t.

Définition II.13

On dit que $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est localement Lipschitzienne sur $\mathbb{R}^d$, si pour tout point $y \in \mathbb{R}^d$, il existe un $r > 0$ tel que F est lipschitzienne sur $B(y, r)$.
A titre d'exemple, toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est localement Lipschitzienne, d'après l'inégalité des accroissements finis.

Théorème II.14 (Cauchy-Lipschitz)

On suppose que $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est localement Lipschitzienne. Alors, pour toute donnée initiale $y_0 \in \mathbb{R}^d$, il existe un intervalle compact I contenant 0 dans son intérieur tel que le problème de Cauchy (II.3) admette une unique solution y définie sur I.

Preuve :

On va donc montrer qu'il existe un $T > 0$ tel qu'il y ait existence et unicité de la solution du problème sur l'intervalle $[-T, T]$.

On commence par choisir un voisinage de la donnée initiale $\overline{B}(y_0, r)$ sur lequel la fonction F est Lipschitzienne. On construit maintenant un prolongement Lipschitzien de $F_{|\overline{B}(y_0,r)}$, c'est-à-dire une nouvelle fonction $\tilde{F} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} \tilde{F} \text{ est Lipschitzienne sur } \mathbb{R}^d \text{ tout entier,} \\ \tilde{F} \text{ coincide avec } F \text{ sur } \overline{B}(y_0, r). \end{cases}$$

Une telle fonction existe en effet comme on le verra juste après (Lemme II.15).

Supposons ce prolongement connu, on peut alors appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz global vu précédemment qui nous assure l'existence et l'unicité d'une solution $\tilde{y}$, définie sur $\mathbb{R}$ tout entier du problème de Cauchy modifié

$$\begin{cases} \tilde{y}'(t) = \tilde{F}(\tilde{y}(t)), \ \ \forall t \in \mathbb{R}, \\ \tilde{y}(0) = y_0. \end{cases}$$

On choisit maintenant $T > 0$ tel que

$$\tilde{y}([-T, T]) \subset \overline{B}(y_0, r),$$

ce qui est possible par continuité de $\tilde{y}$ (et vu que $\tilde{y}(0) = y_0$ est le centre de la boule en question).

On va maintenant vérifier que $t \in [-T, T] \mapsto y(t) = \tilde{y}(t)$ est bien l'unique solution du problème initial. Elle vérifie clairement la donnée initiale et par ailleurs, par construction de $\tilde{F}$ nous avons

$$\forall t \in [-T, T], \ \ \tilde{y}'(t) = \tilde{F}(t, \tilde{y}(t)) = F(t, \tilde{y}(t)).$$

■

Lemme II.15 (Prolongement Lipschitzien)

Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ une partie non vide quelconque de $\mathbb{R}^d$ et $F : A \to \mathbb{R}^p$, avec $p \geq 1$, une fonction Lipschitzienne sur A. Alors il existe une fonction $\tilde{F} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, lipschitzienne sur $\mathbb{R}^d$ et qui coincide avec F sur A.

Preuve :

Il suffit de raisonner composante par composante pour se ramener au cas $p = 1$. Dans ce cas, on note L la constante de Lipschitz de F sur A et nous posons

$$\tilde{F}(x) = \inf_{y \in A} \Big(F(y) + L\|x - y\| \Big), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

On va vérifier que ce choix convient.

— Si $x \in A$, par hypothèse sur F nous avons

$$F(x) \leq F(y) + L\|x - y\|, \ \forall y \in A,$$

avec égalité si $y = x$ et donc

$$F(x) = \inf_{y \in A} \Big(F(y) + L\|x - y\| \Big) = \tilde{F}(x),$$

ce qui prouve que $\tilde{F}$ est bien un prolongement de F.

— Il reste à montrer que $\tilde{F}$ est Lipschitzienne. Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$. Nous avons donc pour tout $y \in A$

$$\tilde{F}(x_1) \leq F(y) + L\|x_1 - y\| \leq F(y) + L\|x_2 - y\| + L\|x_1 - x_2\|,$$

et en passant à l'infimum en $y \in A$, il vient

$$\tilde{F}(x_1) \leq \tilde{F}(x_2) + L\|x_1 - x_2\|.$$

En changeant x_1 en x_2 on trouve l'inégalité inverse et le résultat est prouvé.

■

Remarque II.16

A cause du raisonnement composante par composante, la preuve précédente donne seulement une borne du type $\mathrm{Lip}(\tilde{F}) \leq C\,\mathrm{Lip}(F)$ pour un certain $C > 0$ dépendant de la dimension, des normes choisies, etc ...
En réalité, on peut montrer (mais c'est beaucoup plus difficile) que le prolongement peut s'effectuer sans augmenter la constante de Lipschitz, c'est-à-dire qu'on peut construire un prolongement Lipschitzien $\tilde{F}$ tel que

$$\mathrm{Lip}(\tilde{F}) = \mathrm{Lip}(F).$$

I.2.d Théorème d'Hartman-Grobman global pour les systèmes dynamiques discrets

Une application très importante des résultats précédents réside dans l'étude des systèmes dynamiques discrets (en dimension finie). Il s'agit d'étudier les suites définies par une donnée initiale et par la récurrence

$$x_{n+1} = F(x_n), \tag{II.5}$$

]où $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est une fonction continue.

Le théorème du point fixe de Banach nous dit que si F est contractante pour une certaine norme, alors les suites précédentes convergent toutes vers l'unique point fixe de F. C'est un premier résultat intéressant bien sûr mais il ne couvre qu'une petite partie des cas possibles, et de plus, il ne dit rien du comportement précis des suites en question (vitesse de convergence, etc ...).

L'étude générale de tels systèmes est très compliquée et sort très largement du cadre de ce cours (bien que l'analyse fonctionnelle joue un rôle essentiel dans cette étude). Nous allons voir un premier résultat plus général dans cette direction.

L'idée initiale consiste à remarquer que si F est linéaire, i.e. de la forme $F(x) = Ax$, où $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, alors on a

$$x_n = A^n x_0,$$

et l'algèbre linéaire permet alors de comprendre presque complètement le comportement de la suite $(x_n)_n$ en fonction des valeurs propres de la matrice A. Par exemple, si A est diagonalisable à valeurs propres réelles on peut trouver un changement de base P tel que

$$Px_n = D^n P x_0,$$

et donc, dans la nouvelle base, le système dynamique se comporte comme $n \mapsto \lambda_k^n$ sur sa k-ième coordonnée.

Le théorème que nous allons voir ci-dessous dit essentiellement que, si F est une application non-linéaire qui est "proche" d'une application linéaire $x \mapsto Ax$ et sous de bonnes hypothèses sur A, alors le système dynamique défini par F a le même comportement que celui défini par la matrice A.

Définition II.17

Une matrice $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est dite hyperbolique si elle n'a aucune valeur propre de module égal à 1.

Théorème II.18 (Hartman-Grobman)

Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice hyperbolique et inversible.
Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour toutes fonctions $g, \tilde{g} \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ telles que $\mathrm{Lip}(g) < \varepsilon$ et $\mathrm{Lip}(\tilde{g}) < \varepsilon$, l'application $F = A + g$ est conjuguée à $\tilde{F} = A + \tilde{g}$. Plus précisément cela signifie qu'il existe un homéomorphisme $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ tel que

$$h^{-1} \circ F \circ h = \tilde{F},$$

c'est-à-dire tel que

$$F(h(x)) = h(\tilde{F}(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

De plus, h peut être choisi de la forme $h = \mathrm{Id} + v$, où $v \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ et il y a unicité du choix de h de cette forme qui convient.

Avant de démontrer ce résultat (dans un cas particulier qui simplifie un peu les calculs), on voit de suite en quoi il peut être utile pour étudier le système dynamique (II.5).

Tout d'abord, on applique le résultat avec $\tilde{g} = 0$, c'est-à-dire $\tilde{F}(x) = Ax$. Alors, si on pose $y_n = h^{-1}(x_n)$, on a

$$y_{n+1} = h^{-1}(x_{n+1}) = h^{-1}(F(x_n)) = Ah^{-1}(x_n) = Ay_n.$$

Autrement dit, à travers le changement de variables **non-linéaire** h, le système dynamique initial défini par F est transformé en un système dynamique **linéaire** que l'on peut étudier beaucoup plus aisément à l'aide d'outils d'algèbre linéaire comme on l'a vu précédemment.

Donnons quelques exemples :

— Si on suppose $\rho(A) < 1$ (et donc en particulier A est bien hyperbolique) et que F est suffisament proche de A au sens du théorème, alors on a

$$x_n = h(A^n h^{-1}(x_0)) \xrightarrow[n \to 0]{} h(0),$$

quelle que soit la donnée initiale choisie. Ce résultat n'est pas nouveau car on peut voir que F est nécessairement contractante dans ce as.

— Un cas plus intéressant est le suivant : supposons $d = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Alors l'application F n'est plus contractante et la dynamique est plus compliquée. Le comportement du système linéaire associé est connu

$$A^n x_0 = \begin{pmatrix} 2^n x_0^1 \\ 2^{-n} x_0^2 \end{pmatrix},$$

de sorte que $A^n x_0$ converge vers l'infini sauf si la première composante de la donnée initiale x_0^1 est nulle, et dans ce cas on a $A^n x_0$ qui tend vers 0.

Le théorème d'Hartmann-Grobman permet d'affirmer qu'on a le même comportement pour le système non-linéaire : la suite $(x_n)_n$ définie par (II.5) tend vers l'infini sauf si la donnée initiale appartient au sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ obtenu en prenant l'image par h de l'espace propre associé à la valeur propre $1/2$, c'est-à-dire $h(\{0\} \times \mathbb{R})$.

Preuve (du Théorème II.18):

On va se contenter pour simplifier de supposer que $\rho(A) < 1$ (c'est-à-dire que toutes les valeurs propres de A sont de module strictement plus petit que 1). Ca n'est pas le cas plus intéressant mais cela simplifie les calculs sans changer de façon fondamentale la preuve générale.

On commence par choisir $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$\mathrm{Lip}(g) < \varepsilon_0 \Rightarrow A + g \text{ est inversible et d'inverse Lipschitzien.}$$

On suppose désormais que $\mathrm{Lip}(g) < \varepsilon_0$ et $\mathrm{Lip}(\tilde{g}) < \varepsilon_0$. On cherche h sous la forme proposée $h = \mathrm{Id} + v$ et on observe que l'on a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} F \circ h = h \circ \tilde{F} &\Longleftrightarrow (A+g) \circ (\mathrm{Id}+v) = (\mathrm{Id}+v) \circ (A+\tilde{g}) \\ &\Longleftrightarrow A + A \circ v + g \circ (\mathrm{Id}+v) = A + \tilde{g} + v \circ (A+\tilde{g}) \\ &\Longleftrightarrow g \circ (\mathrm{Id}+v) \circ (A+\tilde{g})^{-1} = \tilde{g} \circ (A+\tilde{g})^{-1} + v - A \circ v \circ (A+\tilde{g})^{-1}. \end{aligned}$$

On note maintenant

$$\Psi(g, \tilde{g}, v) = g \circ (\mathrm{Id}+v) \circ (A+\tilde{g})^{-1},$$

et

$$L(\tilde{g}, v) = \tilde{g} \circ (A+\tilde{g})^{-1} + v - A \circ v \circ (A+\tilde{g})^{-1}.$$

On voit que $\Psi(g, \tilde{g}, .)$ est un opérateur non-linéaire pour tous $g, \tilde{g}$ alors que $L(\tilde{g}, .)$ est un opérateur affine continu sur $\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. On va montrer dans la suite que $L(\tilde{g}, .)$ est inversible, d'inverse continu et on va poser

$$\Theta(g, \tilde{g}, v) = L(\tilde{g}, .)^{-1} \circ \Psi(g, \tilde{g}, v), \quad \forall v \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d), \forall g, \tilde{g} \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d), \text{avec } \mathrm{Lip}(g) < \varepsilon_0, \mathrm{Lip}(\tilde{g}) < \varepsilon_0.$$

Ainsi, avec le petit calcul ci-dessus, le problème initial est ramené à la question suivante : trouver un certain ε telque $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, tel que

pour tout $g, \tilde{g}$ tels que $\mathrm{Lip}(g) < \varepsilon$, $\mathrm{Lip}(\tilde{g}) < \varepsilon$, l'application $\Theta(g, \tilde{g}, .)$ admet un unique point fixe.

Dans ce but, on va vouloir utiliser le théorème du point fixe de Banach et donc montrer que l'application $\Theta(g, \tilde{g}, .)$ est contractante pour tous $g, \tilde{g}$ convenables.

— Commençons par montrer les propriétés de $L(\tilde{g}, .)$ énoncées plus haut : $L(\tilde{g}, .)$ est inversible et d'inverse continu. Pour cela, on observe que $L(\tilde{g}, .)$ s'écrit sous la forme $\mathrm{Id} - T$ où T est l'opérateur affine défini par

$$T : v \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \mapsto A \circ v \circ A^{-1} - \tilde{g} \circ (A+\tilde{g})^{-1}.$$

On choisit une norme N sur $\mathbb{R}^d$ telle que la norme induite $\mathfrak{N}$ sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ vérifie $\mathfrak{N}(A) < 1$ (ceci est possible car $\rho(A) < 1$, voir l'exercice 4 du TD2) puis on munit $\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ de la norme de la convergence uniforme associée à ce choix, c'est-à-dire

$$\|v\|_{\infty,N} = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} N(v(x)), \quad \forall v \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^d).$$

On a maintenant

$$\begin{aligned} \|Tv_1 - Tv_2\|_{\infty,N} &= \sup_{x \in \mathbb{R}^d} N\big(A \circ v_1 \circ (A+\tilde{g})^{-1}(x) - A \circ v_2 \circ (A+\tilde{g})^{-1}(x)\big) \\ &= \sup_{y \in \mathbb{R}^d} N\big(Av_1(y) - Av_2(y)\big) \\ &\leq \mathfrak{N}(A) \sup_{y \in \mathbb{R}^d} N(v_1(y) - v_2(y)) \\ &= \mathfrak{N}(A) \|v_1 - v_2\|_{\infty,N}. \end{aligned}$$

Ainsi, T est Lipschitzien sur $\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ pour la norme $\|.\|_{\infty,N}$ et on a

$$\mathrm{Lip}(T) \leq \mathfrak{N}(A) < 1$$

et donc on peut appliquer le lemme de Von Neumann en dimension infinie, c'est-à-dire la proposition II.6, pour en déduire que $L(\tilde{g}, .) = \mathrm{Id} - T$ est bien inversible et d'inverse Lipschitzien ainsi que l'estimation

$$\mathrm{Lip}\left(L(\tilde{g}, .)^{-1}\right) \leq \frac{1}{1 - \mathrm{Lip}(T)} \leq \frac{1}{1 - \mathfrak{N}(A)}.$$

— On a maintenant choisi la norme sur $\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ et il s'agit de montrer que l'application $\Theta(g, \tilde{g}, .)$ est contractante pour tous $g, \tilde{g}$ judicieusement choisis. Pour cela, on effectue le calcul suivant

$$\begin{aligned} \|\Theta(g, \tilde{g}, v_1) - \Theta(g, \tilde{g}, v_2)\|_{\infty,N} &\leq \mathrm{Lip}(L(\tilde{g}, .)^{-1}) \|\Psi(g, \tilde{g}, v_1) - \Psi(g, \tilde{g}, v_2)\|_{\infty,N} \\ &\leq \frac{1}{1 - \mathfrak{N}(A)} \|\Psi(g, \tilde{g}, v_1) - \Psi(g, \tilde{g}, v_2)\|_{\infty,N}. \end{aligned}$$

On estime maintenant le terme contenant Ψ

$$\begin{aligned}
\|\Psi(g,\tilde{g},v_1)-\Psi(g,\tilde{g},v_2)\|_{\infty,N} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^d} N(g\circ(\mathrm{Id}+v_1)\circ(A+\tilde{g})^{-1}(x)-g\circ(\mathrm{Id}+v_2)\circ(A+\tilde{g})^{-1}(x))\\
&\leq \mathrm{Lip}_N(g)\sup_{x\in\mathbb{R}^d} N\left((\mathrm{Id}+v_1)\circ(A+\tilde{g})^{-1}(x)-(\mathrm{Id}+v_2)\circ(A+\tilde{g})^{-1}(x)\right)\\
&= \mathrm{Lip}_N(g)\sup_{x\in\mathbb{R}^d} N\left((v_1-v_2)\circ(A+\tilde{g})^{-1}(x)\right)\\
&= \mathrm{Lip}_N(g)\sup_{y\in\mathbb{R}^d} N\left((v_1-v_2)(y)\right)\\
&\leq \mathrm{Lip}_N(g)\|v_1-v_2\|_{\infty,N},
\end{aligned}$$

où $\mathrm{Lip}_N(g)$ est la constante de Lipschitz de g associée à la norme N sur $\mathbb{R}^d$. Comme toutes les normes sur $\mathbb{R}^d$ sont équivalentes, il existe $C>0$ telle que $\mathrm{Lip}_N(g)\leq C\,\mathrm{Lip}(g)$ pour tout g et donc

$$\|\Theta(g,\tilde{g},v_1)-\Theta(g,\tilde{g},v_2)\|_{\infty,N}\leq \frac{C\,\mathrm{Lip}(g)}{1-\mathfrak{N}(A)}\|v_1-v_2\|_{\infty,N}.$$

Ainsi, on voit bien que si on pose

$$\varepsilon=\min\left(\frac{1-\mathfrak{N}(A)}{C},\varepsilon_0\right),$$

on a

$$\mathrm{Lip}(g)<\varepsilon,\mathrm{Lip}(\tilde{g})<\varepsilon\Longrightarrow \Theta(g,\tilde{g},.)\text{ est contractante sur }\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)\text{ muni de la norme }\|.\|_{\infty,N}.$$

— D'après ce qui précède, et avec le théorème du point fixe de Banach, on voit que pour tous $g,\tilde{g}$ vérifiant $\mathrm{Lip}(g)<\varepsilon$ et $\mathrm{Lip}(\tilde{g})<\varepsilon$, l'application $\Theta(g,\tilde{g},.)$ admet un unique point fixe, noté v et donc qui satisfie

$$\Theta(g,\tilde{g},v)=v.$$

Pour démontrer le théorème, il suffit donc de montrer que $h=\mathrm{Id}+v$ est un homéorphisme de $\mathbb{R}^d$.
Pour l'instant, on sait seulement que

$$F\circ h=h\circ\tilde{F}.$$

Mais on peut échanger les rôles de F et $\tilde{F}$ (donc de g et $\tilde{g}$) et considérer l'unique solution $\tilde{v}\in\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ de

$$\Theta(\tilde{g},g,\tilde{v})=\tilde{v},$$

ce qui fait qu'en posant $\tilde{h}=\mathrm{Id}+\tilde{v}$ on a

$$\tilde{F}\circ\tilde{h}=\tilde{h}\circ F.$$

En combinant les deux formules ainsi obtenues, nous avons

$$F\circ h\circ\tilde{h}=h\circ\tilde{F}\circ\tilde{h}=h\circ\tilde{h}\circ F.$$

Ceci prouve que $h\circ\tilde{h}$ commutte avec F. Mais comme par ailleurs, on a

$$h\circ\tilde{h}=\mathrm{Id}+w,$$

avec $w=\tilde{v}+v\circ(\mathrm{Id}+\tilde{v})$ qui est une fonction de $\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$, cela prouve que

$$\Theta(g,g,w)=w.$$

Mais on a vu que $\Theta(g,g,.)$ admet un unique point fixe qui ne peut être autre que 0.
Ainsi, on a $w=0$ et donc $h\circ\tilde{h}=\mathrm{Id}$.
On montre de même que $\tilde{h}\circ h=\mathrm{Id}$ ce qui prouve bien que h est un homéomorphisme et le théorème est démontré.

■

II Théorème de Baire et premières applications

II.1 Enoncé et preuve

Théorème II.19 (de Baire)

Soit (X,d) un espace métrique complet. On a alors les deux propriétés suivantes :

1. *Pour toute famille dénombrable d'***ouverts denses** *$(U_n)_n$, nous avons*
$$\bigcap_{n\geq 0} U_n \text{ est dense dans } X.$$
2. *Pour toute famille dénombrable de* **fermés d'intérieur vide** *$(F_n)_n$, nous avons*
$$\bigcup_{n\geq 0} F_n \text{ est d'intérieur vide dans } X.$$

Plus généralement, un espace métrique vérifiant les deux propriétés du théorème est appelé un **espace de Baire**. Le théorème dit donc que tout espace métrique complet est de Baire.

— Il faut prendre garde à ce que $\bigcap_n U_n$ n'est pas un ouvert en général, de même que $\bigcup_n F_n$ n'est pas fermé.

— On peut comprendre ce résultat de la façon suivante : toute intersection de "gros ouverts" est aussi un gros ensemble ; toute réunion de "petits fermés" est aussi "petite".

Preuve :

Par passage au complémentaire, on voit bien que les deux propriétés sont équivalentes. On va donc démontrer la première propriété. On note $A = \bigcap_{n\geq 0} U_n$ et il faut montrer que A est dense dans X.

Soit $x \in X$ quelconque et $r > 0$. On veut montrer que $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$.

— Comme U_0 est dense dans X, il existe $x_0 \in U_0$ tel que $d(x_0, x) \leq r/2$, et comme U_0 est ouvert, il existe un ε_0 (que l'on choisit plus petit que $r/2$) tel que
$$\overline{B}(x_0, \varepsilon_0) \subset U_0.$$

— Supposons x_n et ε_n connu.
Comme U_{n+1} est dense, on peut trouver $x_{n+1} \in U_{n+1}$ tel que
$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{\varepsilon_n}{2}.$$
Enfin, comme U_{n+1} est ouvert, on peut trouver $\varepsilon_{n+1} > 0$, que l'on suppose suffisamment petit pour que $\varepsilon_{n+1} \leq \frac{\varepsilon_n}{2}$ et pour que
$$\overline{B}(x_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) \subset U_{n+1}.$$

— Il s'en suit que nous avons
$$\varepsilon_n \leq \frac{r}{2} 2^{-n}, \ \ \forall n \geq 0,$$
et
$$\overline{B}(x_n, \varepsilon_n) \subset \overline{B}(x_{n-1}, \varepsilon_{n-1}).$$
En effet, si y est tel que $d(y, x_n) \leq \varepsilon_n$, alors on a
$$d(y, x_{n-1}) \leq d(y, x_n) + d(x_n, x_{n-1}) \leq \varepsilon_n + \frac{\varepsilon_{n-1}}{2} \leq \varepsilon_{n-1}.$$

— La suite $(x_n)_n$ ainsi obtenue est une suite de Cauchy car la série de terme général $d(x_{n+1}, x_n)$ est convergente. Comme (X,d) est complet, cette suite converge. On note $l \in X$ sa limite.
Par ailleurs, les boules construites précédemment sont emboîtées et donc pour tout $k \geq 0$, nous avons
$$x_n \in \overline{B}(x_k, \varepsilon_k), \ \ \forall n \geq k.$$
Comme les boules en question sont fermées, nous obtenons que la limite l vérifie pour tout $k \geq 0$,
$$l \in \overline{B}(x_k, \varepsilon_k) \subset U_k.$$
Ainsi l est dans tous les ouverts U_k et donc $l \in A$.
Par ailleurs, l est dans la première des boules, c'est-à-dire que $d(l, x_0) \leq \varepsilon_0 \leq r/2$ et donc
$$d(l,x) \leq d(l, x_0) + d(x_0, x) \leq r,$$
et le résultat est démontré.

■

Les espaces métriques complets ne sont pas les seuls à posséder la propriété de Baire. Par exemple, on démontrera dans l'exercice 1 du TD4 le résultat suivant.

Corollaire II.20

Soit (X,d) un espace métrique complet et Ω un ouvert de X. Montrer que (Ω,d) est un espace de Baire.

On remarquera dans cet énoncé que (Ω,d) n'a aucune raison d'être complet.

II.2 Applications élémentaires classiques

On liste ici quelques applications classiques et immédiates du théorème de Baire.

Proposition II.21

L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels ne peut s'écrire comme intersection dénombrables d'ouverts de $\mathbb{R}$.

Preuve :

On raisonne par l'absurde en supposant que $\mathbb{Q} = \bigcap_{n\geq 0} U_n$, avec $U_n \subset \mathbb{R}$ ouvert (nécessairement non vide). On aurait alors, par passage au complémentaire

$$\mathbb{Q}^c = \bigcup_{n\geq 0} U_n^c,$$

et comme $\mathbb{Q}$ est lui-même union dénombrable de fermés $(F_n)_n$ (constitués de tous les singletons d'éléments de $\mathbb{Q}$), on en déduit que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c$ est réunion dénombrable de fermés.

Comme $\mathbb{R}$ est complet, et d'intérieur non vide, on peut appliquer le théorème de Baire, qui nous dit qu'au moins l'un des fermés $(F_n)_n$ ou $(U_n^c)_n$ est d'intérieur non vide.

Ca ne peut pas être l'un des singletons F_n, ce qui signifie qu'il s'agit nécessairement de l'un des $U_{n_0}^c$. Il existe donc un intervalle ouvert non trivial $]a,b[$, avec $a<b$, contenu dans $U_{n_0}^c$. Ceci signifie que

$$]a,b[\cap U_{n_0} = \emptyset,$$

et comme $\mathbb{Q}$ est l'intersection de tous les $(U_n)_n$ on a $\mathbb{Q} \subset U_{n_0}$ et on a donc établi que $]a,b[$ ne contient aucun rationnel ce qui clairement faux et constitue la contradiction recherchée. ■

Proposition II.22

Soit $(E,\|.\|)$ un espace vectoriel normé de dimension infinie dénombrable (i.e. il existe une base algébrique dénombrable de E).
Alors, $(E,\|.\|)$ n'est pas complet.

Autrement dit, il n'existe aucun Banach de dimension infinie dénombrable.

Preuve :

Supposons que $(E,\|.\|)$ est complet et soit $(e_n)_n$ une base algébrique dénombrable de E. Pour tout $N\geq 1$, on note

$$F_N = \text{Vect}(e_1,...,e_N).$$

D'après l'exercice 16 du TD1, tous les espaces F_N sont fermés dans E. De plus, ils sont d'intérieur vide. En effet, supposons qu'il existe une boule $B(a,r)$ non réduite à un point dans F_N.

Comme $a\in F_N$ et que F_N est un espace vectoriel, on a également

$$B(0,r) = B(a,r) - a \subset F_N.$$

De la même façon, F_N étant un espace vectoriel, on a

$$\forall t>0, B(0,tr) = tB(0,r) \subset F_N.$$

Ceci étant vrai pour tout $t>0$, ces inclusions impliqueraient que $E\subset F_N$ ce qui n'est pas possible car E est de dimension finie.

On peut donc appliquer le théorème de Baire et déduire que la réunion A de tous les F_N est un ensemble d'intérieur vide. Par construction, A est l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de $(e_n)_n$, et donc c'est exactement l'espace E lui-même.

On a donc établi que E est d'intérieur vide dans lui-même ce qui est clairement une contradiction qui établit le résultat.
■

Le résultat suivant est historiquement celui qui a initié les travaux de Baire. Il s'intéresse à la continuité des limites simples de fonctions continues. Il permet d'aller plus loin que le résultat classique qui dit que toute limite (localement) uniforme de fonctions continues est continue.

Théorème II.23 (de la limite simple de Baire)

Soient (X,d), (Y,d') deux espaces métriques et $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues de X dans Y. On suppose que (X,d) est complet et que la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction $f : X \to Y$.
Alors, l'ensemble des points de X en lesquels f est continue est un sous-ensemble dense de X.

Preuve :

— Pour tout $k, n \geq 1$, on note

$$F_{k,n} = \{x \in X, \forall p, q \geq n, \ \ d(f_p(x), f_q(x)) \leq 1/k\}.$$

Comme, on peut écrire

$$F_{k,n} = \bigcap_{p,q\geq n} \{x \in X, \ \ d(f_p(x), f_q(x)) \leq 1/k\},$$

et que chacun des ensembles dans cette intersection est un fermé (car f_p et f_q sont continues !), on déduit que $F_{k,n}$ est lui-même un fermé de X.

— On fixe $k \geq 1$. Comme pour tout $x \in X$, la suite $(f_p(x))_p$ est convergente, elle est en particulier de Cauchy et donc, le critère de Cauchy avec $\varepsilon = 1/k$, nous montre que

$$X = \bigcup_{n\geq 0} F_{k,n}.$$

D'après le résultat de l'exercice 2 du TD4, qui est une conséquence du théorème de Baire, on en déduit que la réunion des intérieurs

$$\Omega_k = \bigcup_{n\geq 0} \overset{\circ}{F}_{k,n},$$

est un ouvert dense de (X,d).

— On dispose maintenant d'une famille d'ouverts denses de X. On peut appliquer à nouveau le théorème de Baire, pour en déduire que l'ensemble

$$A = \bigcap_{k\geq 1} \Omega_k,$$

est dense dans X.
On va maintenant montrer que la limite f est continue en tout point de A, ce qui montrera bien que l'ensemble des points de continuité de f est dense dans X.
Soit $x \in A$. Nous avons alors par définition de A et des Ω_k.

$$\forall k \geq 1, \ \ \exists n \geq 0, \ \ x \in \overset{\circ}{F}_{k,n},$$

et donc en particulier

$$\forall k \geq 1, \ \ \exists n \geq 0, \ \ \exists r > 0, \ \ \forall p, q \geq n, \text{ on a } d(f_p(y), f_q(y)) \leq \frac{1}{k}, \ \ \forall y \in X, \text{ t.q. } d(x,y) \leq r.$$

On peut passer à la limite dans cette formule quand $q \to +\infty$ et se contenter de prendre $p = n$ par exemple et ainsi obtenir

$$\forall k \geq 1, \ \ \exists n \geq 0, \ \ \exists r > 0, \text{ on a } d(f_n(y), f(y)) \leq \frac{1}{k}, \ \ \forall y \in X, \text{ t.q. } d(x,y) \leq r.$$

On utilise maintenant que f_n est continue en x, de sorte qu'on peut trouver $r' \leq r$ tel que

$$d(f_n(y), f_n(x)) \leq 1/k, \ \ \forall x \in X, \text{ t.q. } d(x,y) \leq r'.$$

Ainsi, en combinant les deux familles d'inégalités ci-dessus, on trouve que pour tout $y \in X$ tel que $d(x,y) \leq r'$, on a

$$d(f(y), f(x)) \leq d(f(y), f_n(y)) + d(f_n(y), f_n(x)) + d(f_n(x), f(x)) \leq \frac{3}{k}.$$

Pour tout k, nous avons alors trouvé un $r' > 0$ convenable pour lequel la propriété ci-dessus est vraie, ce qui montre bien la continuité de f au point x.

■

Une application simple et très classique de ce théorème de la limite simple de Baire dit que la dérivée d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ est continue sur un sous-ensemble dense de points (voir l'exercice 3 du TD4).

On verra dans l'exercice 5 du TD4 une démonstration également assez classique du résultat un peu surprenant suivant. Celui-ci dit qu'il existe énormément de fonctions très irrégulières c'est-à-dire continues mais dérivables en aucun point.

Proposition II.24 (Fonctions continues nulle-part dérivables, [7])

L'ensemble E des fonctions continues sur $[0,1]$ et nulle part dérivables dans $[0,1]$ est dense dans $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

III Théorème de Banach-Steinhaus et applications

Une des plus importantes conséquences du théorème de Baire est le résultat suivant.

Théorème II.25 (de Banach-Steinhaus ou principe de la borne uniforme)

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. On suppose que E est un Banach. On se donne une famille $(T_i)_{i\in I}$ quelconque d'applications linéaires continues $T_i \in L(E,F)$.
Si pour tout $x \in E$, on a

$$\sup_{i\in I} \|T_i x\|_F < +\infty,$$

alors on a

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{L(E,F)} < +\infty.$$

Preuve :

Pour tout $n \geq 1$, on note

$$F_n = \{x \in E,\ \sup_{i\in I} \|T_i x\|_F \leq n\} = \bigcap_{i\in I} T_i^{-1}(\overline{B}_F(0,n)).$$

Comme les T_i sont continues, l'ensemble F_n est une intersection de fermés, c'est donc un fermé.

Par hypothèse, nous avons

$$E = \bigcup_{n\geq 1} F_n.$$

Comme E est complet et qu'il n'est pas d'intérieur vide (dans lui-même), le théorème de Baire nous dit que l'un au moins des F_n n'est pas d'intérieur vide.

Ainsi, il existe une boule qui est contenue dans F_n

$$\overline{B}(a,\eta) \subset F_n.$$

Soit maintenant $x \in E$ tel que $\|x\|_E \leq 1$. On a $y = a + \eta x \in \overline{B}(a,\eta)$ et donc $y \in F_n$, ce qui signifie que

$$\sup_{i\in I} \|T_i y\|_F \leq n,$$

on en déduit que

$$\|T_i x\|_F = \left\| T_i \frac{y-a}{\eta} \right\|_F = \frac{1}{\eta}(\|T_i a\|_F + \|T_i y\|_F) \leq \frac{2n}{\eta}.$$

Donc, la norme de T_i est bornée par

$$\|T_i\|_{L(E,F)} \leq \frac{2n}{\eta}, \quad \forall i \in I.$$

■

Corollaire II.26

Sous les hypothèses du théorème, si une suite $(T_n)_n$ d'applications linéaires continues converge simplement, la limite T est elle-même une application linéaire continue et on a

$$\|T\|_{L(E,F)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|_{L(E,F)}.$$

Preuve :

Comme pour tout $x \in E$, la suite $(T_n x)_n$ converge dans F, elle est en particulier bornée. On peut donc appliquer le théorème de Banach-Steinhaus qui dit que

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \sup_n \|T_n\|_{L(E,F)} < +\infty.$$

En particulier, pour tout n et tout $x \in E$, on a

$$\|T_n x\|_F \leq \|T_n\|_{L(E,F)} \|x\|_E \leq M\|x\|_E.$$

On peut alors passer à la limite inférieure quand $n \to \infty$ dans cette inégalité, à x fixé (la $\liminf$ de gauche étant en réalité une vraie limite) et obtenir

$$\|Tx\|_F \leq \left(\liminf_{n\to\infty} \|T_n\|_{L(E,F)}\right) \|x\|_E.$$

Ceci étant valable pour tout $x \in E$, on a bien montré le résultat attendu. ■

Remarque II.27

Attention, rien ne dit dans ce théorème que la convergence de $(T_n)_n$ vers T est uniforme. Autrement dit, nous n'avons pas en général $\|T_n - T\|_{L(E,F)} \to 0$.
C'est par exemple le cas des opérateurs de translation étudiés dans l'exercice 8 du TD3. Plus exactement, on a montré que si $p < +\infty$, on a

$$\|\tau_{1/n} f - f\|_{L^p(\mathbb{R})} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \ \ \forall f \in L^p(\mathbb{R}),$$

mais on peut vérifier que

$$\|\tau_{1/n} - \mathrm{Id}\|_{L(L^p(\mathbb{R}),L^p(\mathbb{R}))} = 2, \ \ \forall n \geq 1.$$

Regardons quelques appplications classiques de ce résultat.

Proposition II.28

*Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés. On suppose que E **ou** F est complet. Soit $T : E \times F \to G$ une application bilinéaire. Montrer que si T est séparément continue, i.e.*

$$\forall x \in E, \ \ T_{x.} : y \in F \mapsto T(x,y) \in G, \ \textit{est continue},$$

$$\forall y \in F, \ \ T_{.y} : x \in E \mapsto T(x,y) \in G, \ \ \textit{est continue},$$

alors T est continue.

Preuve :

Quitte à échanger E et F on peut supposer que F est complet.

On considère la famille d'applications linéaires continues indexée sur la boule unité fermée B_E de E définie par $(T_{x.})_{x\in B_E}$. On a alors :

— Pour tout $x \in B_E$, l'application $T_{x.}$ est dans $L(Y, G)$.

— Pour tout $y \in F$, l'application $x \in E \mapsto T_{x.}(y) = T(x,y)$ est linéaire continue et donc, elle est bornée sur la boule unité B_E.

Comme F est complet, on peut dès lors appliquer le théorème de Banach-Steinhaus qui montre qu'il existe $M < +\infty$ tel que

$$\|T_{x.}\|_{L(F,G)} \leq M, \ \ \forall x \in B_E.$$

Ceci signifie que

$$\|T(x,y)\|_G \leq M\|y\|_F, \ \ \forall x \in B_E, \forall y \in F,$$

et donc on a

$$\|T(x,y)\|_G \leq M\|x\|_E\|y\|_F, \ \ \forall x \in E, y \in F,$$

ce qui montre bien la continuité de T. ∎

Remarque II.29

L'hypothèse de complétude de E ou de F est essentielle ici. Voici un contre-exemple : on prend $E = F = \mathbb{R}[X]$ que l'on muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f|\,dx$, $G = \mathbb{R}$, et

$$T : (f,g) \in E \times F \to T(f,g) = \int_0^1 fg\,dx \in G.$$

Pour f fixé dans $\mathbb{R}[X]$, on a bien

$$|T(f,g)| \leq \|f\|_\infty \|g\|_{L^1},$$

ce qui montre la continuité par rapport à g et de même pour la continuité partielle par rapport à f. Montrons que T n'est pas continue. Si c'était le cas, on aurait pour tout $n \geq 1$.

$$|T(f_n,f_n)| \leq \|T\| \|f_n\|_{L^1}^2,$$

où f_n est la fonction polynôme $f_n(x) = x^n$. Tous calculs faits, on trouve

$$\frac{1}{2n+1} = \left| \int_0^1 (x^n)(x^n)\,dx \right| \leq \frac{\|T\|}{(n+1)^2},$$

ce qui n'est clairement pas possible pour n grand.

Proposition II.30 (Retour sur les suites faiblement convergentes dans l^p)

Soit $1 \leq p < +\infty$ et $(x^k)_k$ une suite d'éléments de l^p qui converge faiblement vers un élément $x \in l^p$, c'est-à-dire tel que

$$(x^k, y) \xrightarrow[k\to\infty]{} (x,y), \quad \forall y \in l^{p'}.$$

Alors la suite $(x^k)_k$ est bornée dans l^p et on a

$$\|x\|_{l^p} \leq \liminf_{k\to\infty} \|x^k\|_{l^p}.$$

Preuve :

Pour tout k, on définit la forme linéaire sur $l^{p'}$ définie par

$$T_k : y \in l^{p'} \mapsto (x^k, y).$$

D'après l'inégalité de Hölder et le théorème I.64 qui caractérise le dual de l^p, nous savons que T_k est continue et que sa norme duale vaut exactement

$$\|T_k\|_{(l^{p'})'} = \|x^k\|_{l^p}.$$

Par hypothèse nous avons

$$\forall y \in l^{p'}, \quad \sup_k |T_k y| < +\infty,$$

et donc le théorème de Banach-Steinhaus implique que

$$\sup_k \|T_k\|_{(l^{p'})'} < +\infty,$$

ce qui donne bien

$$\sup_k \|x^k\|_{l^p} < +\infty.$$

Par ailleurs, si on applique le corollaire II.26, on voit que l'on obtient bien l'inégalité annoncée

$$\|x\|_{l^p} \leq \liminf_{k\to\infty} \|x^k\|_{l^p}.$$

∎

Parmi les applications importantes du théorème que nous verrons en TD, citons

- L'existence de fonctions continues pour lesquelles la suite des polynômes d'interpolation de Lagrange ne converge pas uniformément vers la fonction de départ quand le nombre de points tend vers l'infini. C'est l'exercice 9 du TD4.
- L'existence de fonctions continues périodiques pour lesquelles la série de Fourier correspondante diverge en $x = 0$. C'est l'exercice 10 du TD4.

IV Théorème de l'application ouverte et applications

Théorème II.31 (Application ouverte)

Soient E et F deux espaces de Banach et $T \in L(E, F)$ une application linéaire continue.
Si T est surjective, alors T est **ouverte***, ce qui signifie que*

$$\forall U \subset E \text{ ouvert, on a } T(U) \text{ est un ouvert de } F.$$

Remarque II.32

Le caractère surjectif de l'application T est bien évidemment essentiel car si T est ouverte, son image $T(E)$ est un sous-espace vectoriel ouvert de F. Ceci n'est possible que si $T(E) = F$.

Le corollaire immédiat et essentiel de ce résultat est le suivant.

Théorème II.33 (de l'isomorphisme de Banach)

Soient E et F deux Banach. Si T est une application linéaire continue bijective, alors T^{-1} est également continue. En particulier T réalise un isomorphisme entre espaces de Banach.

Preuve (du théorème d'isomorphisme):
Comme T est bijective, pour tout ouvert U de E nous avons

$$(T^{-1})^{-1}(U) = T(U) \text{ est un ouvert de } F,$$

ce qui montre que l'image réciproque par T^{-1} de tout ouvert est un ouvert et donc que T^{-1} est continue. ■
Preuve (du théorème de l'application ouverte):

— Comme T est linéaire, il suffit de montrer que l'image par T de la boule unité ouverte de E contient une boule ouverte de F centrée en 0, c'est-à-dire

$$\exists R > 0, \quad B_F(0, R) \subset T(B_E(0, 1)).$$

— On commence par observer que, comme T est surjective, nous avons

$$F = \bigcup_{n \geq 0} \overline{T(B_E(0, n))},$$

et donc d'après le théorème de Baire, l'un des fermés de cette réunion est nécessairement d'intérieur non vide. Il existe donc $n \geq 1$, $a \in F$ et $r > 0$ telle que

$$B_F(a, r) \subset \overline{T(B_E(0, n))}.$$

Comme $\overline{T(B_E(0, n))}$ est symétrique par rapport à 0 nous avons également

$$B_F(-a, r) \subset \overline{T(B_E(0, n))},$$

et comme cet ensemble est convexe, nous avons

$$B_F(0, r/2) \subset \frac{1}{2}\big(B_F(a, r) + B_F(-a, r)\big) \subset \overline{T(B_E(0, n))}.$$

Finalement, si on pose $\rho = r/2n$, nous avons

$$B_F(0, \rho) \subset \overline{T(B_E(0, 1))}. \tag{II.6}$$

— On va montrer pour conclure que $R = \rho/2$ convient.
Soit $y \in B_F(0, \rho/2)$. D'après (II.6), nous avons donc $y \in \overline{T(B_E(0, 1/2))}$ et ainsi, nous pouvons trouver

$$x_1 \in B_E(0, 1/2), \text{ tel que } \|y - Tx_1\|_F \leq \rho/4.$$

On répète ainsi l'argument en remplaçant y par $y - Tx_1$. On construit ainsi une suite $(x_n)_n$ vérifiant

$$x_n \in B_E(0, 2^{-n}), \text{ et } \left\| y - T\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right\|_F \leq \rho 2^{-n-1}.$$

Par construction, nous avons

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \|x_k\|_E < \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} = 1.$$

Ainsi, la série $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k$ est absolument convergente dans E et donc convergente (car E est complet). On note x sa somme et on voit que l'estimation ci-dessus donne $x \in B_E(0,1)$.

Par ailleurs, nous avons

$$\left\| y - T\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \right\|_F \leq \rho 2^{-n-1}, \quad \forall n \geq 1,$$

et donc on peut passer à la limite (on utilise la continuité de T ici) pour obtenir

$$y = Tx \in T(B_E(0,1)).$$

■

On observe que les deux espaces de départ et d'arrivée doivent être complets pour faire fonctionner la démonstration. Nous verrons dans les exercices que ces hypothèses sont en effet nécessaires.

V Théorème du graphe fermé

Définition II.34

Soit $f : X \to Y$ une application quelconque entre deux ensembles X et Y. Le graphe de f est le sous-ensemble de $X \times Y$ défini par

$$G(f) = \{(x, f(x)), \;\; x \in X\}.$$

Commençons par un résultat élémentaire.

Proposition II.35

Soient (X,d) et (Y,d') deux espaces métriques. Si $f : X \to Y$ est une application continue, alors le graphe $G(f)$ est fermé dans $X \times Y$.

Preuve :

Soit $(x_n, y_n)_n \subset G(f)$ une suite qui converge vers un élément $(x,y) \in X \times Y$. Par définition du graphe, nous avons $y_n = f(x_n)$ pour tout n. Nous avons donc

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x,$$

$$y_n = f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} y.$$

Mais comme f est continue, nous avons $f(x_n) \to f(x)$ et par unicité de la limite nous avons $y = f(x)$, ce qui signifie bien que le couple (x,y) est dans $G(f)$. ■

Le théorème fondamental de ce paragraphe est une réciproque du résultat précédent dans le cas d'applications linéaires entre espaces de Banach.

Théorème II.36 (du graphe fermé)

Soient E et F deux espaces de Banach et $T : E \to F$ une application linéaire. On a alors

$$T \text{ est continue} \iff \text{Le graphe } G(T) \text{ est fermé dans } E \times F.$$

Preuve :

L'implication $\Rightarrow$ est toujours vraie comme on l'a vue précédemment. Il s'agit de montrer l'implication $\Leftarrow$.

Comme T est linéaire, $G(T)$ est un sous-espace vectoriel de $E \times F$ (ce produit étant un Banach). Supposons donc que $G(T)$ est fermé. Il s'agit donc d'un espace de Banach (c'est un fermé dans un complet) muni de la norme de l'espace produit.

L'application $\varphi : E \to G(T)$ définie par

$$\varphi(x) = (x, T(x)) \in G(T),$$

est clairement linéaire et bijective. Par ailleurs, nous avons

$$\|\varphi(x)\|_{G(T)} = \|\varphi(x)\|_{E\times F} = \|x\|_E + \|Tx\|_F \geq \|x\|_E, \ \ \forall x \in E.$$

Ainsi φ^{-1} est une application linéaire continue et bijective entre les deux Banach $G(T)$ et E. Le théorème d'isomorphisme de Banach (Théorème II.33) nous dit alors que φ est elle-même continue. Il existe donc $C > 0$ telle que

$$\|x\|_E + \|Tx\|_F = \|\varphi(x)\|_{G(T)} \leq C\|x\|_E, \ \ \forall x \in E,$$

ce qui donne en particulier l'inégalité

$$\|Tx\|_F \leq C\|x\|_E, \ \ \forall x \in E,$$

et donc T est continue. ■

Remarque II.37

Pour que ce théorème soit vrai, il faut absolument que les deux espaces soient complets. En effet, on prend pour E l'espace $\mathcal{C}^0([0,1])$ muni de la norme L^1, pour F le même ensemble mais muni de la norme infinie et pour T l'application identité. Cette application n'est clairement pas continue mais son graphe est bel et bien fermé.

Nous verrons en TD plusieurs applications de ce résultat. A titre d'exemple, en voici une assez classique

Proposition II.38

Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E que l'on munit d'une autre norme $\|.\|_F$.
On suppose que $(F, \|.\|_F)$ est complet et que l'injection canonique de $(F, \|.\|_F)$ dans $(E, \|.\|_E)$ est continue.
Si $T : E \to E$ est une application linéaire continue telle que $T(F) \subset F$, alors $T : F \to F$ est également continue.

Preuve :

On va appliquer le théorème du graphe fermé dans F. Il s'agit de montrer que le graphe de T dans F, $G_F(T)$, est fermé dans $F \times F$. On se donne une suite $(x_n)_n$ qui converge vers un x dans F et telle que Tx_n converge vers y dans F. Il nous faut montrer que $y = Tx$.

Par hypothèse, nous avons également les convergences $x_n \to x$ dans E et $Tx_n \to y$ dans E. Mais comme T est continue sur E, nous en déduisons que $y = Tx$ et le résultat est bien démontré. ■

Chapitre III

Espaces de fonctions continues

I Densité d'espaces remarquables

Théorème III.1 (Weierstrass)

Soit $[a,b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. Pour toute fonction continue $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$, il existe une suite de fonctions **polynomiales** *$(f_n)_n$ qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$.*

Ce résultat a de nombreuses applications, on peut noter la suivante par exemple :

Corollaire III.2

Soit $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que

$$\forall n \geq 0, \quad \int_a^b f(x)x^n \, dx = 0,$$

alors f est la fonction nulle.

Preuve :

On considère une suite $(f_n)_n$ de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers f, d'après le théorème Weierstrass. L'hypothèse sur f, implique que

$$\forall n \geq 0, \quad \int_a^b f(x)f_n(x) \, dx = 0.$$

Mais la suite de fonctions $(ff_n)_n$ converge uniformément vers f^2 sur $[a,b]$. En effet, on a

$$\sup_{[a,b]} |f^2 - ff_n| \leq \left(\sup_{[a,b]} |f|\right)\left(\sup_{[a,b]} |f - f_n|\right),$$

ce dernier terme tendant vers 0 par hypothèse.

D'après le théorème de passage à la limite uniforme sous l'intégrale, on a

$$\int_a^b f^2(x) \, dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f(x)f_n(x) \, dx = 0.$$

Ainsi f^2 est une fonction continue, positive et dont l'intégrale est nulle, elle est donc nécessairement nulle. ∎

Ce résultat est par exemple utile pour démontrer le corollaire suivant (il permet de construire des familles de polynômes appelées **polynômes orthogonaux**) et qui sont très utile en analyse.

Corollaire III.3

L'ensemble $\mathbb{R}[X]$ (des fonctions polynômes), est dense dans $L^2(]a,b[)$. Comme cet ensemble admet une base dénombrable, il exite une base hilbertienne de $L^2(]a,b[)$ formée de polynômes.

On va maintenant démontrer le théorème de Weierstrass, par une preuve constructive qui donne explicitement une telle suite de fonctions polynomiales, que l'on appelle *polynômes de Bernstein*.

Pour cela, pour tout $\delta > 0$ on pose

$$\omega(f,\delta) = \sup_{\substack{x,y\in[a,b]\\|x-y|\leq\delta}} |f(x)-f(y)|.$$

Remarquons que cette fonction est bien définie par un argument de compacité. La fonction $\omega(f,.)$ ainsi définie, s'appelle le module de continuité de f. D'après le théorème de Heine, toute fonction continue f sur $[a,b]$ est uniformément continue. Ceci implique (est équivalent !) à la propriété

$$\lim_{\delta\to 0}\omega(f,\delta) = 0. \tag{III.1}$$

Preuve (du Théorème III.1):

— On observe tout d'abord qu'on peut se ramener au cas où $[a,b]=[0,1]$, en posant

$$\tilde{f}(t) = f(a+t(b-a)),\ \ \forall t\in[0,1].$$

Supposons donc maintenant que $[a,b]=[0,1]$.

— On introduit la suite $(f_n)_n$ définie de la façon suivante

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k(1-x)^{n-k},\ \ \forall x\in[0,1]. \tag{III.2}$$

La fonction f_n est bien un polynôme de degré au plus n.

Lemme III.4

On a les formules suivantes

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k(1-x)^{n-k} = 1,\ \ \forall x\in\mathbb{R}, \tag{III.3}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} C_n^k x^k(1-x)^{n-k} = x,\ \ \forall x\in\mathbb{R}, \tag{III.4}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 C_n^k x^k(1-x)^{n-k} = x^2 + \frac{x(1-x)}{n},\ \ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{III.5}$$

Preuve :

— La formule (III.3) est simplement la formule du Binôme de Newton appliqué à $1=(x+(1-x))^n$.

— Ecrivons :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} C_n^k x^k(1-x)^{n-k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\\
&= \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} x^k(1-x)^{(n-1)-(k-1)}\\
&= x\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} x^{k-1}(1-x)^{(n-1)-(k-1)}\\
&= x\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} x^{k}(1-x)^{n-1-k} = x,
\end{aligned}$$

en utilisant (III.3) au rang $n-1$.

— Cette fois-ci, on écrit (pour $n \geq 2$ sinon le calcul est immédiat)

$$\begin{aligned}
\frac{n}{n-1}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 C_n^k x^k(1-x)^{n-k} &= \frac{n}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2}{n(n-1)}\right) C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\\
&= \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{k(k-1)}{n(n-1)}\right) C_n^k x^k(1-x)^{n-k} + \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\\
&= x^2\sum_{k=2}^{n} C_{n-2}^{k-2} x^{k-2}(1-x)^{(n-2)-(k-2)} + \frac{x}{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^k(1-x)^{(n-1)-k}\\
&= x^2 + \frac{1}{n-1}x.
\end{aligned}$$

En multipliant la formule ainsi démontrée par $\frac{n-1}{n}$, on trouve bien le résultat annoncé.

■

Si on multiplie (III.3) par $f(x)$, on trouve

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x) C_n^k x^k(1-x)^{n-k}, \quad \forall x \in [0,1]. \tag{III.6}$$

Reprenons maintenant la démonstration de la convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers f sur $[0,1]$. Prenons $\delta > 0$. Cette valeur de δ étant fixée, on choisit un $x \in [0,1]$, on utilise (III.2) et (III.6), puis on effectue la majoration suivante, en séparant dans la somme, l'ensemble des indices k tels que $|x - k/n| \leq \delta$ et ceux tels que $|x - k/n| > \delta$:

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| \leq &\sum_{\substack{0\leq k\leq n\\ |x-k/n|\leq\delta}} |f(x) - f(k/n)| C_n^k x^k(1-x)^{n-k} + \sum_{\substack{0\leq k\leq n\\ |x-k/n|>\delta}} |f(x) - f(k/n)| C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\\
&\leq \omega(f,\delta)\sum_{\substack{0\leq k\leq n\\ |x-k/n|\leq\delta}} C_n^k x^k(1-x)^{n-k} + \omega(f,\delta)\sum_{\substack{0\leq k\leq n\\ |x-k/n|>\delta}}\left(1 + \frac{|x-k/n|}{\delta}\right) C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\\
&\leq 2\omega(f,\delta)\underbrace{\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k(1-x)^{n-k}}_{=1} + \frac{\omega(f,\delta)}{\delta^2}\sum_{\substack{0\leq k\leq n\\ |x-k/n|>\delta}} (x-k/n)^2 C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\\
&\leq 2\omega(f,\delta) + \frac{\omega(f,\delta)}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n}(x-k/n)^2 C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\\
&= 2\omega(f,\delta) + \frac{\omega(f,\delta)}{\delta^2}\left(x^2 - 2x^2 + x^2 + \frac{x(1-x)}{n}\right)\\
&= \omega(f,\delta)\left(2 + \frac{1}{4n\delta^2}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, si on choisit maintenant $\delta = \frac{1}{\sqrt{n}}$, on trouve l'estimation

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{9}{4}\omega\left(f, \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Cette dernière quantité tend bien vers 0 quand $n \to +\infty$ d'après (III.1).

■

La démonstration précédente donne un résultat relativement précis sur la convergence des polynômes de Bernstein en fonction du module de continuité de f. Il est possible d'estimer ce module de continuité en fonction de la régularité de la fonction. Ainsi, on peut montrer

— Si f est Lipschitzienne (en particulier si elle est $\mathcal{C}^1$), on a

$$\omega(f,\delta) \leq K\delta,$$

où K est la constante de Lipschitz de f.

— Si f est α-Hölderienne avec $\alpha \in]0,1[$, on trouve
$$\omega(f,\delta) \leq K\delta^\alpha.$$

Attention : On ne peut pas espérer beaucoup mieux que les estimations ci-dessus même pour des fonctions très régulières. En effet, on peut montrer que
$$\lim_{\delta\to 0} \frac{\omega(f,\delta)}{\delta} = 0 \implies f \equiv 0.$$

Dans le cas général, on peut caractériser les sous-algèbres denses de $\mathcal{C}^0(X,\mathbb{R})$:

Théorème III.5 (Stone-Weierstrass - cas reél)

Soit (X,d) un espace métrique compact et A une sous-algèbre de $\mathcal{C}^0(X,\mathbb{R})$ (i.e. un sous-espace vectoriel stable par la multiplication). On suppose que

1. *A sépare les points de X, i.e. $\forall x, y \in X$, $x \neq y$, il existe $f \in A$ telle que $f(x) \neq f(y)$.*
2. *Pour tout $x \in X$, il existe $f \in A$ telle que $f(x) \neq 0$.*

Alors A est dense dans $\mathcal{C}^0(X,\mathbb{R})$.

Preuve :

— On commence par vérifier que l'adhérence $\overline{A}$ de A est également une sous-algèbre (fermée !) de $\mathcal{C}^0(X,\mathbb{R})$.

— Soit $f \in \overline{A}$ et $(P_n)_n$ une suite de polynômes qui converge uniformément vers la fonction $\surd$ sur $[0, \|f\|_\infty^2]$ (ceci existe d'après Bernstein).En utilisant le fait que $|f| = \sqrt{f^2}$, nous avons
$$|f(x)| = \lim_{n\to\infty} P_n(f^2(x)), \text{ uniformément en } x \in X.$$
Pour tout n, la fonction $P_n(f^2)$ est un polynôme en f et donc un élément de $\overline{A}$.
On en déduit que $|f| \in \overline{A}$, autrement dit $\overline{A}$ est stable par $|.|$.

— Si maintenant $f, g \in \overline{A}$, nous avons
$$\max(f,g) = g + \frac{|f-g| + (f-g)}{2} \in \overline{A},$$
et de même $\min(f,g) \in \overline{A}$.

— Soient maintenant $x, y \in K$, $x \neq y$. Par hypothèse, il existe $g \in A$ telle que $g(x) \neq g(y)$ et $h \in A$ telle que $h(x) = 1$.
Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ quelconque, on pose maintenant
$$\psi(z) = \alpha h(z) + (\beta - \alpha h(y))\frac{g(z) - g(x)}{g(y) - g(x)}, \ \forall z \in X.$$
Cette fonction est bien dans A et vérifie
$$\psi(x) = \alpha, \psi(y) = \beta.$$

— Soit maintenant $f \in \mathcal{C}^0(X,\mathbb{R})$ quelconque et $\varepsilon > 0$ fixé.

  — Commençons par fixer $x \in X$.
  Pour tout $y \in X$, d'après ce qui précède, on peut trouver une fonction $\psi_x \in A$ telle que
  $$\psi_{x,y}(x) = f(x), \ \psi_{x,y}(y) = f(y).$$
  Par continuité de ψ_x, il existe un ouvert $U_{x,y} \subset X$ contenant y tel que
  $$\psi_{x,y}(z) \leq f(z) + \varepsilon, \ \forall z \in U_{x,y}.$$
  On a donc un recouvrement ouvert de X donné par
  $$X = \bigcup_{y\in X} U_{x,y},$$
  et par compacité on peut en extraire un sous-recouvrement fini
  $$X = \bigcup_{i=1}^n U_{x,y_i},$$

avec $y_1, ..., y_n \in X$.
On pose maintenant
$$\Phi_x = \min_{1 \leq i \leq n} \psi_{x,y_i}.$$
D'après les résultats précédents, on sait que $\overline{A}$ est stable par l'opération $\min$ et donc $\Phi_x \in \overline{A}$.
De plus, par construction, nous avons
$$\Phi_x(x) = f(x),$$
$$\Phi_x(z) \leq f(z) + \varepsilon, \ \ \forall z \in X.$$

— Comme pour tout $x \in X$, chaque Φ_x est continue et coincide avec f en x, on peut trouver un ouvert U_x contenant x tel que
$$\Phi_x(z) \geq f(z) - \varepsilon, \ \ \forall z \in U_x.$$
Encore une fois, on peut recouvrir X par les ouverts U_x puis en extraire un sous-recouvrement fini
$$X = \bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i},$$
puis définir
$$\Phi(z) = \max_{1 \leq i \leq m} \Phi_{x_i}(z).$$
Les résultats précédents montrent que $\Phi \in \overline{A}$ et par construction, nous avons
$$\Phi(z) \geq f(z) - \varepsilon, \ \ \forall z \in X,$$
mais nous avons aussi (d'après les propriétés de Φ_x)
$$\Phi(z) \leq f(z) + \varepsilon, \ \ \forall z \in X.$$

On a donc trouvé une fonction $\Phi \in \overline{A}$ telle que $\|f - \Phi\|_\infty \leq \varepsilon$. Comme $\overline{A}$ est fermé et que ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, cela établit bien que $f \in \overline{A}$ et le théorème est démontré.

■

Donnons quelques exemples :
— L'ensemble des fonctions polynômes à n indéterminées $\mathbb{R}[X_1, ..., X_N]$ est dense dans $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$ où K est un compact de $\mathbb{R}^N$.
— Soit K un compact de $\mathbb{R}^N$ et T l'ensemble des fonctions de K dans $\mathbb{R}$ sous forme tensorielle $(x_1, ..., x_N) \mapsto f_1(x_1) \times \cdots \times f_N(x_N)$. Alors $\mathrm{Vect}(T)$ est dense dans $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$.
— On considère l'ensemble $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions continues 2π-périodiques. Alors l'ensemble des polynômes trigonométriques
$$\mathrm{Vect}((x \mapsto \cos(nx))_n, (x \mapsto \sin(nx))_n),$$
est dense dans $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

II Compacité

II.1 Le théorème d'Ascoli et ses conséquences immédiates

On donne maintenant une version (pas la plus générale) du théorème d'Ascoli qui caractérise les sous-ensembles compacts de $\mathcal{C}^0(X, Y)$ où X est un compact.

Théorème III.6 (Ascoli)

Soit (X, d) un espace métrique compact et $(E, \|.\|)$ un espace de Banach. Une partie A de $\mathcal{C}^0(X, E)$ est relativement compacte *dans le Banach $\mathcal{C}^0(X, E)$ si et seulement si :*
1. *Pour tout $x \in X$, $A(x) = \{f(x), \ f \in A\}$ est une partie relativement compacte de E.*
2. *A vérifie la propriété d'équicontinuité*
$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in X, \exists \delta > 0, \forall f \in A, \ \ \forall y \in X, d(x, y) \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon.$$

Preuve :

Soit $(f_n)_n$ une suite d'éléments de A. On souhaite montrer qu'il existe une sous-suite qui converge uniformément sur X.

Comme X est compact, on peut utiliser la Proposition I.13 qui nous dit que X est séparable. Il existe donc une suite $(x_k)_k \subset X$ qui est dense dans X.

— La première étape consiste maintenant à trouver une sous-suite de $(f_n)_n$ qui converge (simplement) pour tout $x \in \{x_k\}_{k\geq 1}$.

  — On commence par considérer le cas $k = 1$ et donc considérer la suite $(f_n(x_1))_n$ qui est une suite d'éléments de $A(x_1)$. Par hypothèse, cet ensemble est relativement compact et donc on peut trouver $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que
$$(f_{\varphi_1(n)}(x_1))_n \text{ converge.}$$

  — On regarde maintenant le cas $k = 2$ mais en utilisant la première extraction obtenue précédemment. La suite $(f_{\varphi_1(n)}(x_2))_n$ est une suite de l'ensemble relativement compact $A(x_2)$ et on peut donc trouver $\varphi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que
$$(f_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)}(x_2))_n \text{ converge.}$$
On pose $\psi_2 = \varphi_1 \circ \varphi_2$.

  — Par récurrence sur k, on construit successivement des fonctions ψ_k de la forme $\psi_k = \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_k$ telles que
$$(f_{\psi_k(n)}(x_k))_n \text{ converge.}$$

  — La conclusion, qui constitue réellement le processus diagonal, consiste à poser maintenant
$$\Phi(n) = \psi_n(n).$$
On a bien une fonction strictement croissante (le vérifier !) et de plus $(\Phi(n))_n$ est une suite extraite de **toutes** les suites $(\psi_n(k))_n$, pour tout k.
Ainsi, nous avons
$$\text{Pour tout } k \geq 1, \ (f_{\Phi(n)}(x_k))_n, \ \text{ converge,}$$
qui est bien la propriété attendue.

— On va maintenant montrer que $(f_{\Phi(n)})_n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme. Pour simplifier les notations, on pose $g_n = f_{\Phi(n)}$.
Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'hypothèse d'équicontinuité de la famille A, pour tout $x \in X$, il existe un $\delta_x > 0$ tel que
$$\forall f \in A, \forall y \in X, \ \ d(y, x) \leq \delta_x \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon.$$
On a clairement
$$X = \bigcup_{x\in X} B(x, \delta_x),$$
et par compacité, on peut trouver une partie finie F de X telle que
$$X = \bigcup_{x\in F} B(x, \delta_x). \tag{III.7}$$
Comme la suite $(x_k)_k$ est dense dans X, pour tout $x \in F$, il existe un indice $k_x \geq 1$ tel que $x_{k_x} \in B(x, \delta_x)$.
Pour tout $x \in F$ (qui est fini), la suite $(g_n(x_{k_x}))_n$ est convergente et donc est de Cauchy. Ainsi, il existe $n_0 \geq 0$ tel que
$$\forall n \geq n_0, \ \forall p \geq 0, \ \forall x \in F, \ \ |g_n(x_{k_x}) - g_{n+p}(x_{k_x})| \leq \varepsilon. \tag{III.8}$$
Remarquons que le caractère fini de F (et donc la compacité de X) joue un rôle essentiel ici.
Soit $n \geq n_0$, $p \geq 0$ et $y \in X$ quelconque. D'après (III.7), il existe $x \in F$ tel que $d(y, x) < \delta_x$ et deplus nous avons $d(x_{k_x}, x) < \delta_x$.
On a donc
$$\|g_n(y) - g_{n+p}(y)\| \leq \|g_n(y) - g_n(x_{k_x})\| + \|g_n(x_{k_x}) - g_{n+p}(x_{k_x})\| + \|g_{n+p}(x_{k_x}) - g_{n+p}(y)\|.$$
Le premier et le troisième terme sont plus petits que 2ε d'après le choix de δ et la propriété d'équicontinuité car en effet
$$\|g_m(y) - g_m(x_{k_x})\| \leq \|g_m(y) - g_m(x)\| + \|g_m(x) - g_m(x_{k_x})\| \leq 2\varepsilon, \ \ \forall m \geq 1.$$
Le second terme est également plus petit que ε, par choix de n_0 (i.e. d'après (III.8)).
On obtient donc
$$\|g_n - g_{n+p}\|_\infty \leq 5\varepsilon,$$
et le théorème est prouvé.

■

En utilisant directement le théorème (et l'inégalité des accroissements finis), on obtient les résultats de compacité suivants

— Si (X, d) est un espace métrique compact, la boule unité fermée de $\mathrm{Lip}(X, \mathbb{R}^d)$ (muni de la norme $\|.\|_\infty + \mathrm{Lip}(.)$) est compacte dans $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{R}^d)$.

— Si X est un compact de $\mathbb{R}^d$, alors la boule unité de $\mathcal{C}^1(X, \mathbb{R})$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$. De même, la boule unité de $\mathcal{C}^{0,\alpha}(K)$, pour $\alpha \in]0, 1]$, est relativement compacte dans $\mathcal{C}^0(K)$.

II.2 Le théorème de Montel

Théorème III.7

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$. Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions holomorphes qui est uniformément bornée sur tout compact inclus dans Ω, alors on peut en trouver une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact dans Ω.

On a d'ailleurs un résultat similaire pour toutes les dérivées successives des fonctions $(f_n)_n$.

Preuve :

On considère une suite croissante exhaustive de compacts $(K_p)_p$ inclus dans Ω, i.e. qui vérifie

$$K_p \subset \overset{\circ}{K}_{p+1}, \quad \bigcup_{p \geq 1} K_p = \Omega.$$

Construire une telle suite de compacts est d'ailleurs un bon exercice. Pour tout $p \geq 1$, on définit $\delta_p > 0$ tel que

$$\bigcup_{x \in K_p} \overline{B}(x, \delta_p) \subset K_{p+1}.$$

On se convaincra qu'un tel δ_p existe bien.

Fixons maintenant un $p \geq 1$ et soit M_{p+1} une borne de $(f_n)_n$ sur le compact K_{p+1} (qui est d'ailleurs aussi une borne sur K_p). On va montrer que la suite $(f_n)_n$ vérifie l'hypothèse d'équicontinuité sur K_p.

Pour cela, on utilise que f_n est holomorphe et vérifie donc la formule de Cauchy. Pour tout $x \in K_p$ et pour tout $y \in K_p$ tel que $|x - y| < \delta_p/2$, on note C le cercle centré en x de rayon δ_p (dont le disque associé contient x et y), qui est bien inclus dans K_{p+1}, par le choix de δ_p.

La formule de Cauchy donne donc

$$f_n(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f_n(\xi)}{\xi - x}\, d\xi, \text{ et } f_n(y) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{f_n(\xi)}{\xi - y}\, d\xi,$$

et ainsi

$$f_n(x) - f_n(y) = \frac{1}{2i\pi} \int_C f_n(\xi) \left(\frac{1}{\xi - x} - \frac{1}{\xi - y} \right) d\xi = \frac{x - y}{2i\pi} \int_C f_n(\xi) \frac{1}{(\xi - x)(\xi - y)}\, d\xi.$$

Par construction de x, y, de C nous avons

$$\left| \frac{1}{(\xi - x)(\xi - y)} \right| \leq \frac{2}{\delta_p^2}, \quad \forall \xi \in C,$$

et donc, avec la borne M_{p+1} uniforme sur les f_n dans K_{p+1}, on trouve

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq |x - y| \frac{M_{p+1}}{\pi \delta_p^2}.$$

Ceci montre bien que $(f_n)_n$ vérifie le théorème d'Ascoli sur le compact K_p.

Pour tout p, on peut extraire une sous-suite de $(f_n)_n$ qui converge uniformément sur K_p. On conclut par le procédé diagonal qui permet d'extraire une unique sous-suite de $(f_n)_n$ qui converge uniformément sur tous les K_p. On se convainc aisément que cette suite ■

II.3 Le théorème de Kolmogoroff

Grâce au théorème d'Ascoli, nous pouvons caractériser les ensembles compacts dans $L^p(\Omega)$. Il s'agit du théorème de Kolmogoroff. Par simplicité, nous nous contentons du cas $p = 1, \Omega = \mathbb{R}^d$.

On utilise ici la notation $\tau_h : L^1(\mathbb{R}^d) \to L^1(\mathbb{R}^d)$ pour l'opérateur de translation

$$(\tau_h f)(x) = f(x + h), \;\; \forall h \in \mathbb{R}^d, \text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}^d.$$

On renvoie à l'exercice 8 du TD3 où ces opérateurs ont été définis et étudiés.

Théorème III.8 (Kolmogoroff)

Soit A une partie **bornée** *de $L^1(\mathbb{R}^d)$ vérifiant de plus les hypothèses suivantes :*

1. *Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $R > 0$ tel que*

$$\forall f \in A, \quad \int_{|x|>R} |f(x)|\, dx \leq \varepsilon.$$

2. *Si on définit, pour tout $h \in \mathbb{R}^d$, la quantité*

$$\omega(h) = \sup_{f\in A} \|\tau_h f - f\|_{L^1},$$

alors on suppose que

$$\lim_{h\to 0} \omega(h) = 0.$$

Alors A est relativement compacte dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ (c'est-à-dire que $\overline{A}$ est compacte dans $L^1(\mathbb{R}^d)$).

Remarque III.9

Le théorème reste vrai sans modification en remplaçant partout L^1 par L^p pour n'importe quel $p < +\infty$ mais pas dans L^∞, comme d'habitude.

Preuve :

Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, et $r > 0$ on définit l'opérateur de moyenne

$$M_r f(x) = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)\, dy = \frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} f(x + h)\, dh,$$

ou encore

$$M_r f = \frac{1}{|B(0,r)|} \int_{B(0,r)} \tau_h f\, dh.$$

Nous avons les propriétés suivantes

— On a les estimations

$$\|M_r f\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}, \;\; \forall f \in L^1, \forall r > 0.$$
$$\|M_r f\|_{L^\infty} \leq C_r \|f\|_{L^1}, \;\; \forall f \in L^1, \forall r > 0,$$

où $C_r = 1/|B(0,r)|$.

— Pour tout $r > 0$, l'ensemble $M_r A$ est équicontinu sur $\mathbb{R}^d$. En effet, on fixe $x \in \mathbb{R}^d$, et on écrit pour tout $f \in A$

$$M_r f(y) - M_r f(x) = M_r(\tau_{y-x} f - f)(x),$$

de sorte que

$$|M_r f(y) - M_r f(x)| \leq C_r \|\tau_{y-x} f - f\|_{L^1} \leq C_r \omega(y - x),$$

et, comme $\lim_{h\to 0} \omega(h) = 0$, on obtient bien le résultat d'équicontinuité.

— Pour tout $r, R > 0$, on définit l'espace $E_R = \mathcal{C}^0(\overline{B}(0,R), \mathbb{R})$ (muni de la norme infinie) puis le sous-espace

$$A_{r,R} = \left\{(M_r f)_{|\overline{B}(0,R)}, \;\; f \in A\right\} \subset E_R.$$

D'après ce qui précède, cet ensemble est équicontinu et de plus, pour tout $x \in \overline{B}(0,R)$, on a la borne $|M_r f(x)| \leq C_r \|f\|_{L^1} \leq C_{r,A}$. Ainsi on peut appliquer le théorème d'Ascoli à $A_{r,R}$ qui est donc un ensemble relativement compact dans E_R.

On fixe maintenant une valeur de $\varepsilon > 0$, et on choisit le $R > 0$ correspondant à la première hypothèse du théorème, puis un $r > 0$ tel que $\omega(h) \leq \varepsilon$ pour tout $|h| < r$ (ceci est possible grâce à la seconde hypothèse).

D'après tout ce qui précède, et avec ce choix des paramètres, on peut trouver un nombre fini de boules de rayon $\varepsilon/|B(0,R)|$ qui recouvrent $A_{r,R}$: il existe $f_1, ..., f_N \in E_R$ telles que

$$A_{r,R} \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_{\|.\|_\infty}(f_i, \varepsilon/|B(0,R)|).$$

Il s'ensuit que pour tout $f \in A$, il existe $i \in \{1, ..., N\}$ tel que

$$\|M_r f - f_i\|_{L^1(B(0,R))} \leq |B(0,R)| \|M_r f - f_i\|_\infty \leq \varepsilon.$$

De plus, par construction, on a

$$\|f - M_r f\|_{L^1(B(0,R))} \leq \omega(r).$$

Pour tout i, on note $\bar{f}_i$ le prolongement par 0 de f_i à l'espace $\mathbb{R}^d$ tout entier.

Il s'en suit que pour tout $f \in A$, nous avons

$$\begin{aligned}\|f - \bar{f}_i\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} &= \|f 1_{|.|>R}\|_{L^1} + \|f - f_i\|_{L^1(B(0,R))} \\ &\leq \varepsilon + \underbrace{\|f - M_r f\|_{L^1(B(0,R))}}_{\leq \omega(r) \leq \varepsilon} + \underbrace{\|M_r f - f_i\|_{L^1(B(0,R))}}_{\leq \varepsilon} \\ &\leq 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons montré que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_{L^1}(f_i, 3\varepsilon).$$

D'après le corollaire I.32, ceci montre que A est relativement compact dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ (qui est bien complet !). ■

II.4 Quelques applications importantes

Montrons maintenant quelques exemples d'utilisation de ces résultats.

Définition III.10 (Opérateurs compacts)

Soient E, F deux espaces vectoriels normés et $T : E \to F$ une application linéaire. On dit que T est compacte si l'image de tout borné B de E par T est relativement compacte dans F.
Ceci est équivalent à demander que

$$\overline{T(B_E(0,1))} \text{ est compact dans } F.$$

L'ensemble des opérateurs compacts de E dans F est noté $K(E, F)$.

Proposition III.11

Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés.

1. *Alors $K(E, F)$ est un sous-espace vectoriel fermé dans $L(E, F)$ qui contient les opérateurs de rang fini (i.e. les opérateurs dont l'image est de dimension finie).*
2. *Soient $T \in L(E, F)$ et $S \in L(F, G)$.*
   Si T est compact **ou** *si S est compact, alors $S \circ T$ est également compact.*

Remarquons que tout opérateur linéaire compact est continu. On vérifie par exemple que les injections canoniques suivantes sont compactes

$$\text{Lip}(X) \subset \mathcal{C}^0(X), \quad \text{pour } X \text{ compact},$$

$$\mathcal{C}^{0,\alpha}(K) \subset \mathcal{C}^0(K), \quad \text{pour } K \text{ compact de } \mathbb{R}^d,$$

$$W^{1,p}(]0,1[) \subset \mathcal{C}^0([0,1]), \quad \text{pour } p > 1.$$

Dans ce dernier cas, on renvoie à l'exercice 2 du TD5 pour la définition et les propriétés élémentaires des espaces de Sobolev $W^{1,p}(]0,1[)$.

Cette notion est cruciale dans la théorie spectrale des opérateurs, comme nous le verrons plus tard, en particulier grâce au résultat suivant.

Proposition III.12

Soit E un espace vectoriel normé et $T : E \to E$ un opérateur linéaire compact. Alors nous avons

$$\textit{Ker}\ (T - \lambda\,\mathrm{Id})\ \ \textit{est de dimension finie}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

Ce résultat stipule que, si λ est une valeur propre non nulle de T, elle ne peut avoir qu'un nombre fini de vecteurs propres linéairement indépendants. Notons que le cas des valeurs propres complexes se traite de façon tout à fait analogue.

Preuve :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On note $F = \text{Ker}\ (T - \lambda\,\mathrm{Id})$ et on remarque c'est un fermé de E.

On considère la boule unité fermée de F, notée $\bar{B}_F$. Comme F est fermé dans E, on en déduit que $\bar{B}_F$ est aussi un fermé de E.

Par définition, tous les éléments de F vérifient $Tx = \lambda x$ ou encore $x = \frac{1}{\lambda} Tx$. Ainsi, nous avons

$$\bar{B}_F = \frac{1}{\lambda} T\bar{B}_F \subset \frac{1}{\lambda} T\bar{B}_E.$$

Comme T est un opérateur compact, l'ensemble $T\bar{B}_E$ est relativement compact dans E et donc $\bar{B}_F$ est compacte (car fermée) dans E et donc aussi dans F.

D'après le théorème de Riesz (Théorème I.56), on en déduit que F est de dimension finie. ■

Voyons comment le théorème d'Ascoli permet de démontrer la compacité de certains opérateurs.

Proposition III.13 (Opérateur à noyau)

Soit $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On note $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et on définit l'opérateur $T : E \to E$ par la formule

$$T : f \in E \mapsto Tf = \left(x \in [0,1] \mapsto \int_0^1 k(x,y) f(y)\, dy \right).$$

L'opérateur T ainsi défini est compact.

Remarque III.14

On renvoie à l'exercice 7 du TD3 pour l'étude d'opérateurs similaires (sur les espaces L^p cette fois).

Preuve :

On commence par utiliser le théorème de Heine (Théorème I.20) pour obtenir que k est uniformément continue sur $[0,1] \times [0,1]$, c'est-à-dire que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \ \ \forall x, y, x', y,' \in [0,1], \ \ \|(x,y) - (x', y')\| \leq \delta \Rightarrow |k(x,y) - k(x',y')| \leq \varepsilon.$$

Soit B la boule unité fermée de E et $A = T(B)$. On veut montrer que A est relativement compacte dans E et pour cela on va utiliser le théorème d'Ascoli.

— Pour tout $f \in B$, Tf vérifie l'estimation

$$|Tf(x)| \leq \int_0^1 |k(x,y)||f(y)|\, dy \leq \|k\|_\infty \|f\|_\infty \leq \|k\|_\infty, \ \ \forall x \in [0,1],$$

et donc nous avons

$$\|Tf\|_\infty \leq \|k\|_\infty,$$

ce qui prouve que tous les ensembles $(Tf(x))_{f \in B}$ sont bornés et donc relativement compacts dans $\mathbb{R}$. La première hypothèse du théorème d'Ascoli est donc vérifiée.

— Montrons maintenant l'équicontinuité des éléments de A. On fixe $\varepsilon > 0$ et on considère le $\delta > 0$ donné par l'uniforme continuité de k.

On constate alors que pour tout couple $(x, x') \in [0,1]^2$ tel que $|x - x'| \leq \delta$, et pour tout $f \in B$, on a

$$|Tf(x) - Tf(x')| \leq \int_0^1 |k(x,y) - k(x',y)||f(y)|\, dy \leq \varepsilon \|f\|_\infty \leq \varepsilon,$$

ce qui montre bien le résultat attendu.

■

Un autre résultat important qui se démontre par compacité, c'est le théorème de Cauchy-Arzela-Peano sur l'existence de solutions de problèmes de Cauchy associé à une EDO à coefficients seulement continus. Nous allons en donner deux preuves.

La première utilise le théorème de Cauchy-Lipschitz et une technique très usuelle en analyse qui consiste à introduire une suite dde problèmes approchés plus faciles à résoudre (ou en tout cas que l'on sait résoudre) puis à démontrer que la suite de solutions associée vérifie de bonnes propriétés qui permettent d'en obtenir une limite (modulo sous-suite) et que celle-ci est solution du problème original.

La seconde ne suppose pas connue le théorème de Cauchy-Lipschitz (l'unicité dans le cas localement Lipschitzien pouvant s'obtenir par ailleurs par l'inégalité de Gronwall par exemple) et peut donc être considérée comme une nouvelle preuve de Cauchy-Lipschitz dans un cas un peu plus général. Cette preuve a également pour mérite de démontrer la convergence d'une méthode numérique très utilisée en pratique qui est la méthode d'Euler explicite. Conceptuellement, il s'agit également d'introduire un problème approché simple (= le schéma numérique) et de montrer la convergence de ses solutions vers la solution recherchée.

Théorème III.15 (Cauchy-Arzela-Peano)

Soit $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une fonction **continue** *et $y^0 \in \mathbb{R}^d$. Alors il existe au moins un intervalle I de la forme $[-T, T]$ et une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, $y : [-T, T] \to \mathbb{R}^d$, tels que*

$$y'(t) = F(t, y(t)), \ \ \forall t \in [-T, T], \ \ y(0) = y^0. \tag{III.9}$$

Preuve (à partir de Cauchy-Lipschitz):

— On considère le compact $K = [-1, 1] \times \bar{B}(y^0, 1)$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. Puis, on note ensuite

$$M = \sup_{(t,y)\in K} \|F(t, y)\|, \tag{III.10}$$

puis on définit $T = \min(1, 1/M)$.

Ce temps T est choisi de sorte que toute solution éventuelle du problème (III.9) définie sur $[-T, T]$ reste dans K. En effet, si $y : [-T, T] \to \mathbb{R}^d$ est une telle solution, on pose

$$S = \{s \in [0, T], \ \ y(t) \in \bar{B}(y_0, 1), \forall t \in [-s, s]\}.$$

Comme $y(0) = y_0$ et par continuité de y, il est clair qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon \in S$. On note $T^* = \sup S$.

Si on suppose que $T^* < T$, alors nous avons

$$y(t) = y_0 + \int_0^t F(s, y(s))\, ds, \ \ \forall t \in [-T^*, T^*],$$

et par définition, on a $(s, y(s)) \in K$ pour tout $s \in [-T^*, T^*]$. D'après (III.10), on a donc $\|F(s, y(s))\| \leq M$ pour tout $s \in [-T^*, T^*]$ et donc

$$\|y(t) - y_0\| \leq \left|\int_0^t \|F(s, y(s))\|\, ds\right| \leq Mt, \ \ \forall t \in [-T^*, T^*].$$

En particulier, on a donc

$$\|y(t) - y_0\| \leq MT^* \leq \frac{T^*}{T} < 1, \ \ \text{pour tout } t \in [-T^*, T^*].$$

Par continuité de y, cela montre qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $T^* + \varepsilon \in S$, ce qui contredit le fait que T^* est la borne supérieure de S.

Tout ceci montre que $T^* = T$ et donc que toute solution éventuelle y vérifie bien *in fine*

$$(t, y(t)) \in K, \ \ \forall t \in [-T, T].$$

— D'après le théorème de Stone Weierstrass (Théorème III.5), on peut trouver une suite de fonctions polynômes (composante par composante) $F_n : K \to \mathbb{R}^d$ qui converge uniformément sur K vers F. Quitte à changer la valeur de M (et donc la valeur de $T = \min(1, 1/M)$), on peut toujours supposer que

$$\sup_n \sup_{(t,y)\in K} \|F_n(t, y)\| \leq M.$$

De plus, chaque fonction F_n est Lipschitzienne (en fait de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur K. D'après le lemme de prolongement Lipschitzien II.15, on peut donc trouver des fonctions $\tilde{F}_n : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, qui soient globalement Lipschitziennes (en toutes les variables) et qui coincident avec F_n sur le compact K.

— A n fixé, on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz global avec la fonction $\tilde{F}_n$ et ainsi obtenir l'existence et l'unicité d'une solution y_n définie sur $\mathbb{R}$ tout entier du problème

$$\begin{cases} y_n'(t) = \tilde{F}_n(t, y_n(t)), \ \ \forall t \in \mathbb{R}, \\ y_n(0) = y^0. \end{cases}$$

Par la même méthode que ci-dessus, on montre que les solutions y_n ainsi obtenues vérifient, par définition de la borne M et du temps T, la propriété

$$(t, y_n(t)) \in K, \ \ \forall t \in [-T, T].$$

Autrement dit, sur l'intervalle de temps $[-T, T]$, on peut remplacer $\tilde{F}_n$ par F_n dans le problème de Cauchy vérifié par y_n qui devient donc

$$\begin{cases} y_n'(t) = F_n(t, y_n(t)), \ \ \forall t \in [-T, T], \\ y_n(0) = y^0. \end{cases} \tag{III.11}$$

— On dispose donc maintenant d'une famille de fonctions $(y_n)_n$ définies sur le même intervalle $[-T, T]$ et qui prennent leurs valeurs dans $\bar{B}(y_0, 1)$. Par définition de la borne M et en utilisant l'équation différentiell (III.11), nous avons

$$\|y_n'(t)| = \|F_n(t, y_n(t))\| \leq M, \ \ \forall t \in [-T, T].$$

Ainsi, la famille $(y_n)_n$ est bornée dans $\mathcal{C}^1([-T, T], \mathbb{R}^d)$ et le théorème d'Ascoli nous dit alors que $(y_n)_n$ est relativement compacte, c'est-à-dire qu'on peut en trouver une sous-suite $(y_{\varphi(n)})_n$ qui converge uniformément vers une fonction continue y sur $[-T, T]$. Pour simplifier les notations, on continue à noter $(y_n)_n$ cette sous-suite (ce qui ne change rien à l'affaire).

On va maintenant montrer que $t \mapsto F_n(t, y_n(t))$ converge uniformément vers $t \mapsto F(t, y(t))$ sur $[-T, T]$. Pour cela, on écrit

$$\|F_n(t, y_n(t)) - F(t, y_n(t))\| + \|F(t, y_n(t)) - F(t, y(t))\| \leq \|F - F_n\|_{L^\infty(K)} + \|F(t, y(y)) - F(t, y_n(t))\|.$$

Le premier terme tend vers 0 par convergence uniforme de F_n vers F sur K (on utilise à nouveau ici que $(t, y_n(t))$ est toujours dans K), alors que le second terme tend vers 0 par uniforme continuité de F et par convergence uniforme de $(y_n)_n$ vers y.

On peut donc maintenant, pour tout $t \in [-T, T]$, passer à la limite dans la formulation intégrale

$$y_n(t) = y^0 + \int_0^t F_n(s, y_n(s))\, ds,$$

et obtenir que y est solution du problème de Cauchy initial.

■

Preuve (via la méthode d'Euler):

Pour montrer l'existence d'une solution sous la seule hypothèse que F est continue, on va prouver que l'approximation obtenue par la méthode d'Euler converge. On pourra se référer, par exemple, à [5, page 133] bien que la preuve ci-dessous soit rédigée un peu différemment. De plus, par souci de simpliciter on va seulement travailler sur $[0, 1]$ et non sur l'intervalle centré en 0. On va également se contenter du cas où F ne dépend pas de t (la preuve ci-dessous pouvant être adaptée au cas plus général sans difficulté).

Soit M une borne de F sur le compact $K = \bar{B}(y_0, 1)$. On pose maintenant $T = \min(1, 1/M)$.

On fixe un nombre $N > 0$, on pose $\Delta t = T/N$, $t^n = n\Delta t$ pour $0 \leq n \leq N$, et on construit l'approximation d'Euler comme suit

$$\begin{cases} y^0 = y_0, \\ y^{n+1} = y^n + \Delta t F(y^n), \ \ \forall n \in \{0, ..., N-1\}. \end{cases}$$

— On vérifie aisément par récurrence que $y^n \in \bar{B}(y_0, 1)$ pour tout $n \in \{0, ..., N\}$ et ce grâce aux définitions de M et T.

— A l'aide de cette suite, on construit l'unique fonction continue affine par morceaux φ_N vérifiant (voir Figure III.1)

$$\varphi_N(t^n) = y^n, \ \ \forall n \in \{0, ..., N\},$$

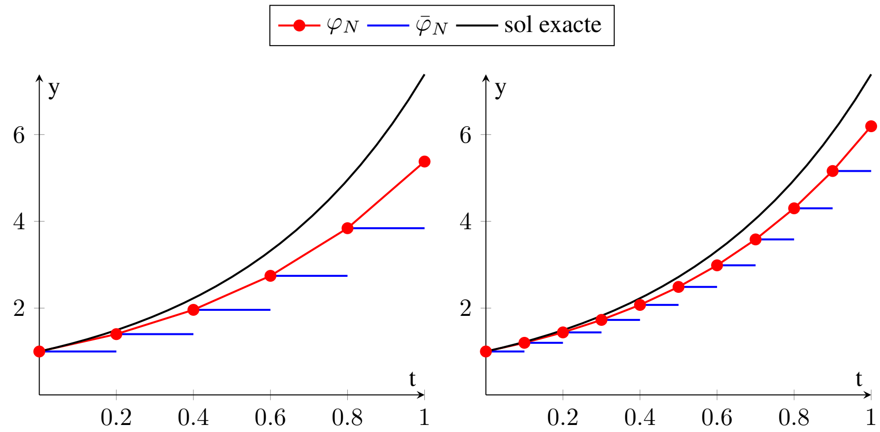
et l'unique fonction constante par morceaux $\bar{\varphi}_N$ définie par

$$\bar{\varphi}_N(t) = y^n, \ \ \forall t \in [t^n, t^{n+1}[.$$

On voit que φ_N est Lipschitzienne sur $[0, T]$ et que $\mathrm{Lip}(\varphi_N) \leq M$. De plus, les fonctions φ_N sont uniformément bornées sur $[0, T]$.

Par ailleurs, par construction, nous avons (en regardant ce qui se passe sur chaque intervalle de longueur Δt)

$$\|\varphi_N - \bar{\varphi}_N\|_\infty \leq M\Delta t = \frac{MT}{N} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0. \tag{III.12}$$



(a) $N = 5$ (b) $N = 10$

FIGURE III.1 – Illustration de la méthode d'Euler explicite pour l'équation $y' = 2y$

— La suite de fonctions $(\varphi_N)_N$ est donc bornée dans $\mathcal{C}^0([0,T],\mathbb{R}^d)$ et également équicontinue (grâce à la borne sur les constantes de Lipschitz). On peut donc appliquer le théorème d'Ascoli et obtenir l'existence d'une sous-suite $(\varphi_{N_k})_k$ qui converge uniformément vers une fonction continue $y : [0,T] \times \mathbb{R}^d$.

D'après (III.12), on a également la convergence uniforme de la suite $(\bar{\varphi}_{N_k})_k$ vers **la même limite** y. Observons également que y prend également toutes ses valeurs dans $\bar{B}(y_0, 1)$.

Constatons maintenant que, par contruction, φ_{N_k} et $\bar{\varphi}_{N_k}$ vérifient

$$\varphi_{N_k}(t) = y_0 + \int_0^t F(\bar{\varphi}_{N_k}(s))\,ds, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T]. \tag{III.13}$$

En effet, comme $\bar{phi}_{N_k}$ est constante sur chaque intervalle de la discrétisation, il en est de même de $F(\bar{\varphi}_{N_k})$ et donc la fonction dans le membre de droite de l'égalité est bien continue et affine sur chaque morceau de la discrétisation. Comme cette fonction coïncide avec φ_{N_k} en 0, par construction, il suffit de vérifier que les pentes des deux fonctions sur chaque intervalle de la discrétisation sont les mêmes ce qui est bien le cas par définition du schéma d'Euler.

On va chercher à passer à la limite dans (III.13) et ainsi prouver que la limite $\varphi \in \mathcal{C}^0([0,T],\mathbb{R}^d)$ est bien solution de l'équation recherchée.

On note ω le module d'uniforme continuité de F sur le compact $\bar{B}(y_0, 1)$. On a donc pour tout $s \in [0,T]$

$$\|F(\bar{\varphi}_{N_k}(s)) - F(y(s))\| \leq \omega(\|\bar{\varphi}_{N_k}(s) - y(s)\|) \leq \omega(\|\bar{\varphi}_{N_k} - y\|_\infty),$$

et donc

$$\|F \circ \bar{\varphi}_{N_k} - F \circ y\|_\infty \leq \omega(\|\bar{\varphi}_{N_k} - y\|_\infty) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0,$$

ce qui prouve que $F \circ \bar{\varphi}_{N_k}$ converge uniformément vers $F \circ y$. On peut donc, à bon droit passer à la limite dans (III.13) ce qui montre φ vérifie

$$\varphi(t) = y_0 + \int_0^t F(s, y(s))\,ds, \quad \forall t \in [0,T],$$

et donc elle est bien solution du problème de Cauchy souhaité.

∎

Chapitre IV

Analyse Hilbertienne

I Orthogonalité

Définition IV.1

Soit $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace de Hilbert.
- *On dit que deux vecteurs $u, v \in H$ sont orthogonaux si $\langle u, v\rangle = 0$ et on notera $u \perp v$.*
- *On dit que deux ensembles $A, B \subset H$ sont orthogonaux si tous les éléments de A sont orthogonaux à tous les éléments de B. On notera $A \perp B$.*
  Si A et B sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux, alors ils sont en somme directe et on notera $A \overset{\perp}{\oplus} B$ pour signifier que cette somme directe est orthogonale.
- *Pour tout ensemble $A \subset H$, on définit* **l'orthogonal de** *A de la façon suivante*

$$A^\perp = \{u \in H, \ \ u \perp A\}.$$

Proposition IV.2

Soit A une partie **quelconque** *de H, alors $A^\perp$ est un* **sous-espace vectoriel fermé** *de H.*

Preuve :

Pour tout $a \in A$, on introduit la forme linéaire $\varphi_a : u \in H \mapsto \langle a, u\rangle$. Cette forme linéaire est continue (inégalité de Cauchy-Schwarz). Ainsi Ker φ_a est un sous-espace vectoriel fermé de H. Il suffit alors de constater que, par définition, on a

$$A^\perp = \bigcap_{a\in A} \text{Ker } \varphi_a,$$

et donc $A^\perp$ est une intersection de sous-espaces vectoriels fermés, c'est donc également un sous-espace vectoriel fermé.
■

L'élément essentiel de l'analyse spécifique des espaces de Hilbert (voire préhilbertiens) est un résultat de notre tendre enfance.

Proposition IV.3 (Théorème de Pytaghore)

Soit $(H, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien et $u, v \in H$ deux éléments quelconques. On a alors

$$u \text{ et } v \text{ sont orthogonaux} \iff \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Preuve :

Il s'agit juste de développer le produit scalaire

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2.$$

■

Définition IV.4 (Familles orthogonales/orthonormales/totales. Bases hilbertiennes)

Soit H un espace de Hilbert et $(e_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de H.

- *La famille est dite orthogonale si*
$$e_i \perp e_j, \;\; \forall i \neq j.$$
Elle est dite orthonormale (ou orthonormée) si de plus on a $\|e_i\| = 1$, $\forall i \in I$.
- *La famille est dite totale si*
$$\overline{\mathrm{Vect}(e_i, i \in I)} = H,$$
autrement dit si l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de la famille est dense dans H.
- *On dit que la famille $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne de H si elle est à la fois totale et orthonormée.*

Remarque IV.5

- *Tout espace de Hilbert admet des bases hilbertiennes.*
- *Si H est de dimension finie (i.e. si on est dans un espace euclidien), on retrouve la notion usuelle de base orthonormée. Toute base hilbertienne est alors également une base algébrique de H (et le cardinal de ces bases est donc égal à la dimension de l'espace).*
- *Si H est de dimension infinie, une base Hilbertienne $(e_i)_{i\in I}$ ne peut* **en aucun cas** *être une base algébrique de H. Autrement dit on a nécessairement*
$$H \neq \mathrm{Vect}(e_i,\; i \in I).$$
Supposons en effet qu'on ait l'égalité $H = \mathrm{Vect}(e_i,\; i \in I)$. Ceci implique en particulier que I est infini. On peut donc en trouver un sous-ensemble dénombrable que l'on note (de façon légèrement abusive) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On considère maintenant la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} e_n$. Comme on a $\|e_n\| = 1$ pour tout n, cette série est absolument convergente et donc convergente d'après la proposition I.46 (car H est complet).
On note la somme de cette série
$$x = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} e_n.$$
Soit k fixé et $N \geq k$, nous avons par orthonormalité
$$\left\langle \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} e_n, e_k \right\rangle = \frac{1}{k^2},$$
et donc par passage à la limite quand $N \to \infty$ (le produit scalaire étant continu par rapport à ses deux variables) on obtient
$$\langle x, e_k \rangle = \frac{1}{k^2} \neq 0.$$
Ceci prouve que x ne peut appartenir à $\mathrm{Vect}(e_i,\; i \in I)$. Si c'était le cas x serait une combinaison linéaire finie des e_i et donc serait orthogonal à tous les e_i sauf un nombre fini d'entre eux, ce qui n'est pas le cas ici.
- *Si H est séparable, toute base Hilbertienne est de cardinal dénombrable, on notera alors $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
Dans ce cas, on peut retrouver le fait que ça ne peut être une base algébrique de l'espace H en utilisant le théorème de Baire. En effet, la Proposition II.22 dit qu'un espace vectoriel de dimension infinie dénombrable n'est jamais complet.

Proposition IV.6 (Processus d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)

Soit H un espace de Hilbert de dimension finie ou dénombrable et $(u_n)_{0\leq n\leq N}$ une famille totale et libre de H (avec éventuellement $N = +\infty$). Alors il existe une base hilbertienne $(e_n)_{0\leq n\leq N}$ de H vérifiant
$$\forall 0 \leq k \leq N, \;\; \mathrm{Vect}(u_0, ..., u_k) = \mathrm{Vect}(e_0, ..., e_k).$$
Cette base hilbertienne est unique si on impose de plus que $\langle u_n, e_n \rangle > 0$ pour tout n.

Preuve :

Il s'agit d'une simple construction par récurrence.

— Au premier cran, il suffit de normaliser le vecteur u_0 en posant
$$e_0 = \frac{u_0}{\|u_0\|}.$$

— Au second cran, on cherche $\tilde{e}_1$ sous la forme
$$\tilde{e}_1 = u_1 + \alpha_{1,0} e_0,$$
qui satisfasse $\langle \tilde{e}_1, e_0 \rangle = 0$, ce qui impose
$$\alpha_{1,0} = -\langle u_1, e_0 \rangle.$$
Il suffit ensuite de normaliser $\tilde{e}_1$ en posant
$$e_1 = \frac{\tilde{e}_1}{\|\tilde{e}_1\|}.$$

— Supposons avoir construit $e_0, ..., e_n$ satisfaisant les propriétés annoncées, on pose alors
$$\tilde{e}_{n+1} = u_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \alpha_{n+1,k} e_k.$$
Pour assurer l'orthogonalité de $\tilde{e}_{n+1}$ avec tous les $e_k, 0 \leq k \leq n$, il suffit de prendre
$$\alpha_{n+1,k} = -\langle u_{n+1}, e_k \rangle, \ \ \forall 0 \leq k \leq n.$$
Ensuite on normalise $\tilde{e}_{n+1}$ pour obtenir e_{n+1}.

Par construction, la famille obtenue est orthonormée et engendre le même espace vectoriel que $(u_n)_n$, elle est donc également totale. ■

Par soucis de simplicité, on va se contenter de travailler dans les espaces de Hilbert séparables, ce qui permet de se contenter de bases hilbertiennes au plus dénombrables, qui sont donc des suites. Dans le cas général, il faut travailler avec la notion de famille sommable que nous n'avons pas abordé dans ce cours.

On excluera également le cas des espaces de dimension finie (i.e. des espaces euclidiens) qui est beaucoup plus simple et déjà connu de tous.

Théorème IV.7

Soit H un espace de Hilbert séparable de dimension infinie et $(e_n)_n$ une base Hilbertienne de H.

1. **Inégalité de Bessel :** *Pour tout $N \geq 0$, et tout $u \in H$, on a*
$$\sum_{n=0}^{N} \langle u, e_n \rangle^2 \leq \|u\|^2,$$
avec égalité si et seulement si $u \in \mathrm{Vect}(e_0, ..., e_N)$.
2. **Identité de Parseval :** *Pour tout $u \in H$, la série numérique de terme général $\langle u, e_n \rangle^2$ est convergente et on a*
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \langle u, e_n \rangle^2 = \|u\|^2,$$
et de plus nous avons la décomposition suivante
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \langle u, e_n \rangle e_n = u,$$
la somme de la série étant entendu au sens de la convergence dans H.
3. *Réciproquement, si $(\alpha_n)_n \in l^2$, alors la série*
$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e_n,$$
est convergente dans H et sa limite notée u est l'unique élément de H vérifiant
$$\langle u, e_n \rangle = \alpha_n, \ \ \forall n \geq 0.$$

Remarque IV.8

Il est important de remarquer que, dans le troisième point du théorème, la série $\sum_{n\geq 0} \alpha_n e_n$ n'est en général pas absolument convergente !

Remarque IV.9

En résumé, on a montré que, dès lors qu'on a choisi une base hilbertienne de H, on dispose d'une isométrie canonique entre l^2 et H définie par

$$\Phi : \alpha = (\alpha_n)_n \in l^2 \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n e_n,$$

et dont l'application réciproque est l'application "coordonnées dans la base"

$$\Phi^{-1} : u \in H \mapsto \left(\langle u, e_n\rangle\right)_n \in l^2.$$

Preuve :

1. Soit $u \in H$ et $N \geq 0$. On pose $T_N(u) = \sum_{n=0}^{N} \langle u, e_n\rangle e_n \in H$. Comme les $(e_n)_n$ sont orthonormés, on peut appliquer le théorème de Pytaghore et obtenir
$$\|T_N(u)\|^2 = \sum_{n=0}^{N} \langle u, e_n\rangle^2.$$
Par construction, nous avons $(u - T_N(u)) \perp e_n$ pour tout $n = 0, ..., N$ et donc en particulier $(u - T_N(u)) \perp T_N(u)$, c'est-à-dire $\langle u - T_N(u), T_N(u)\rangle = 0$. On en déduit avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que
$$\|T_N(u)\|^2 = \langle u, T_N(u)\rangle \leq \|u\| \|T_N(u)\|,$$
ce qui donne
$$\|T_N(u)\|^2 \leq \|u\|^2,$$
et l'inégalité de Bessel est démontrée.
2. D'après l'inégalité de Bessel, les sommes partielles de cette série à termes positifs sont bornées, ce qui induit la convergence de la série.
De plus, nous avons
$$\|T_N(u) - T_{N+p}(u)\|^2 = \sum_{n=N+1}^{N+p} \langle u, e_n\rangle^2 \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \langle u, e_n\rangle^2.$$
Comme le membre de droite de cette inégalité est le reste d'une série convergente, on en déduit que la suite de sommes partielles $(T_N(u))_N$ est de Cauchy dans H et donc convergente. On note $T(u)$ sa limite. D'après les propriétés précédentes, $T; H \to H$ est clairement un opérateur linéaire et vérifie
$$\|T(u)\| \leq \|u\|, \ \ \forall u \in H,$$
et donc
$$\|T(u) - u\| \leq 2\|u\|, \ \ \forall u \in H.$$
On pose $E = \mathrm{Vect}(e_n, 0 \leq n < +\infty)$. Il est clair que pour tout $u \in E$, nous avons $T_N(u) = u$ pour tout N assez grand et en particulier $T(u) = u$.
L'opérateur $T - \mathrm{Id}$ est donc linéaire continu et identiquement nul sur le sous-espace dense E. Ceci prouve que $T - \mathrm{Id}$ ne peut qu'être identiquement nul sur H.
3. Comme précédemment, on montre par le théorème de Pytaghore, que la suite des sommes partielles $S_N = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n e_n$ est de Cauchy dans H, on note u sa limite. Si on fixe $n \geq 0$, nous avons
$$\alpha_n = \langle S_N, e_n\rangle, \ \ \text{dès que } N \geq n,$$
et donc par passage à la limite quand $N \to \infty$, à n fixé, on trouve bien que
$$\alpha_n = \langle u, e_n\rangle.$$
D'après l'identité de Parseval, ceci caractérise complètement u.

■

Les séries de Fourier forment évidemment l'exemple le plus standard de bases Hilbertiennes. Le résultat précis (voir l'exercice 3 de la feuille de TD6) est le suivant.

Proposition IV.10 (Séries de Fourier)

On définit les fonctions suivantes

$$c_0(x) = 1,$$
$$c_n(x) = \sqrt{2}\cos(2\pi nx), \;\; \forall n \geq 1,$$
$$s_n(x) = \sqrt{2}\sin(2\pi nx), \;\; \forall n \geq 1.$$

Alors la famille $\{c_n, n \geq 0\} \cup \{s_n, n \geq 1\}$ *est une base hilbertienne de* $L^2(]0,1[)$.
De même, les fonctions $S_n : x \mapsto \sqrt{2}\sin(\pi nx)$ *forment également une base hilbertienne de* $L^2(]0,1[)$.

Cette écriture permet par exemple de résoudre l'équation de la chaleur. Ainsi pour tout $u_0 \in L^2(]0,1[)$ dont les coordonnées dans la base $(S_n)_n$ sont notées $u_{0,n}$, alors on peut montrer (exercice 4 de la feuille de TD 6) que l'unique solution du problème suivant

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u, \;\; \forall t > 0, x \in]0,1[,$$
$$u(0,x) = u_0(x), \;\; \text{presque partout sur }]0,1[,$$
$$u(t,0) = u(t,1) = 0, \;\text{pour tout } t > 0,$$

est donnée par

$$u(t,x) = \sum_{n\geq 0} e^{-n^2\pi^2 t} u_{0,n} S_n(x).$$

Il faut noter que cela fonctionne bien car les fonctions S_n sont des fonctions propres de l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ associé aux conditions aux limites souhaitées. Plus précisément, nous avons

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}S_n = -n^2\pi^2 S_n(x), \;\; \text{et} \;\; S_n(0) = S_n(1) = 0.$$

Ceci va motiver la dernière partie du chapitre, ou on essaiera de diagonaliser des opérateurs en dimension infinie.

II Projection orthogonale

Théorème IV.11 (Projection sur un convexe fermé)

Soit H un espace de Hilbert et K un ensemble convexe et fermé dans H.
Pour tout point $x \in H$, il existe un unique point dans K noté $P_K(x)$ qui réalise l'infimum

$$\|x - P_K(x)\| = \inf_{y\in K} \|x - y\|.$$

On l'appelle le projeté orthogonal, ou projection orthogonale, de x sur K.
Ce point est aussi l'unique élément de K qui satisfasse les relations suivantes

$$\langle x - P_K(x), y - P_K(x)\rangle \leq 0, \;\; \forall y \in K. \tag{IV.1}$$

Remarque IV.12

Dans le cas où K est un sous-espace vectoriel fermé *de H, les relations* (IV.1) *deviennent*

$$\langle x - P_K(x), y\rangle = 0, \;\; \forall y \in K, \tag{IV.2}$$

c'est-à-dire que $x - P_K(x) \perp K$, conformément aux constructions géométriques de notre enfance.

Preuve :

— Il va de soi que l'infimum considéré dans l'énoncé est fini (et même minoré par 0), on note sa valeur

$$I = \inf_{y\in K} \|x-y\|.$$

On peut donc trouver une suite minimisante associée à ce problème de minimisation, c'est-à-dire une suite $(y_n)_n$ de points de K tels que

$$\|x-y_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} I.$$

On utilise maintenant l'identité du parallèlogramme (voir Exercice 12 du TD1) avec les vecteurs $(x-y_n)/2$ et $(x-y_{n+p})/2$ pour obtenir

$$\left\|x-\frac{y_n+y_{n+p}}{2}\right\|^2 + \frac{1}{4}\|y_n-y_{n+p}\|^2 = \frac{1}{2}\|x-y_n\|^2 + \frac{1}{2}\|x-y_{n+p}\|^2.$$

Comme K est convexe, le point $(y_n+y_{n+p})/2$ est dans K et donc, par définition de I, on a

$$\left\|x-\frac{y_n+y_{n+p}}{2}\right\|^2 \geq I^2.$$

On a donc obtenu

$$\|y_n-y_{n+p}\|^2 \leq (2\|x-y_n\|^2 + 2\|x-y_{n+p}\|^2 - 4I).$$

Par définition de la suite $(y_n)_n$, on voit que le second membre de cette inégalité peut être rendu petit pour tout n assez grand et tout $p \geq 0$.

Tout ceci montre que $(y_n)_n$ est une suite de Cauchy dans H qui est un espace complet et donc cette suite converge vers une limite notée y.

L'ensemble K étant fermé, la limite y obtenue précédemment appartient aussi à K et par continuité de la norme, nous avons

$$\|x-y_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \|x-y\|,$$

et donc

$$\|x-y\| = I,$$

ce qui montre l'existence d'une solution au problème étudié.

— Concernant l'unicité, si $y_1, y_2 \in K$ vérifient

$$\|x-y_1\| = \|x-y_2\| = I,$$

on peut à nouveau utiliser le fait que $(y_1+y_2)/2 \in K$ et l'identité du parallèlogramme et obtenir

$$I^2 \leq \|x-\frac{y_1+y_2}{2}\|^2 = \frac{1}{2}\|x-y_1\|^2 + \frac{1}{2}\|x-y_2\|^2 - \frac{1}{4}\|y_1-y_2\|^2 = I^2 - \frac{1}{4}\|y_1-y_2\|^2,$$

d'où on tire

$$\|y_1-y_2\|^2 \leq 0,$$

et donc $y_1 = y_2$.

— Montrons que $P_K(x)$ vérifie les inégalités (IV.1). Soit donc $y \in K$ quelconque. Par convexité de K, pour tout $t \in [0,1]$ nous avons $(1-t)P_K(x) + ty \in K$ et donc la définition de $P_K(x)$ donne

$$\varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \|x-((1-t)P_K(x)+ty)\|^2 \geq \|x-P_K(x)\|^2 = \varphi(0), \quad \forall t \in [0,1].$$

Ceci prouve que φ (qui est un polynôme de degré 2 en t) atteint son infimum sur $[0,1]$ en $t=0$ et donc la dérivée de φ en 0 se doit d'être négative.

Un petit calcul montre que

$$\varphi'(t) = 2\langle x-((1-t)P_K(x)+ty), P_K(x)-y\rangle,$$

et donc

$$\varphi'(0) = 2\langle x-P_K(x), P_K(x)-y\rangle,$$

et le résultat est prouvé.

— Il reste à montrer que ces inégalités caractérisent le projeté orthogonal. Autrement dit si $z \in K$ est un point de K qui vérifie
$$\langle x - z, y - z\rangle \leq 0, \ \ \forall y \in K,$$
alors $z = P_K(x)$.
Pour cela, on applique les inégalités ci-dessus avec $y = P_K(x)$ et (IV.1) avec $y = z$. Il vient
$$\langle x - z, P_K(x) - z\rangle \leq 0, \quad \langle x - P_K(x), z - P_K(x)\rangle \leq 0.$$
La deuxième inégalité peut aussi s'écrire $\langle P_K(x)-x, P_K(x)-z\rangle \leq 0$ ce qui donne par sommation avec la première inégalité
$$\langle P_k(x) - z, P_K(x) - z\rangle \leq 0,$$
c'est-à-dire $\|P_K(x) - z\|^2 \leq 0$ et donc $z = P_K(x)$.

■

Il est parfois utile de remarquer que l'on utilise dans la preuve seulement la complétude de K. Autrement dit, le résultat persiste si H est un espace pré-hilbertien et K un convexe complet de H. Un exemple typique est de prendre pour H un espace de fonctions continues sur un compact de $\mathbb{R}^d$ muni du produit scalaire L^2 et pour K un sous-espace de dimension finie.

Proposition IV.13

L'application $P_K : H \to H$ est 1-Lipschitzienne (et en particulier continue). Elle est linéaire si et seulement si K est un sous-espace vectoriel.

Preuve :

Si K est un sous-espace vectoriel, la caractérisation (IV.2), permet immédiatement de montrer la linéarité de l'application P_K. Réciproquement, si P_K est linéaire, on a immédiatement $K = \mathrm{Im} P_K$ et donc K est bien un sous-espace vectoriel de H.

Pour montrer le caractère Lipschitzien de P_K, on prend $x_1, x_2 \in H$ quelconques et on applique les inégalités qui caractérisent $P_K(x_1)$ avec $y = P_K(x_2)$ puis les inégalités qui caractérisent $P_K(x_2)$ avec $y = P_K(x_1)$. On trouve respectivement
$$\langle x_1 - P_K(x_1), P_K(x_2) - P_K(x_1)\rangle \leq 0,$$
$$\langle x_2 - P_K(x_2), P_K(x_1) - P_K(x_2)\rangle \leq 0.$$
Par sommation, on trouve
$$\langle (P_K(x_2) - P_K(x_1)) - (x_2 - x_1), P_K(x_2) - P_K(x_1)\rangle \leq 0,$$
ou encore
$$\|P_K(x_2) - P_K(x_1)\|^2 \leq \langle x_2 - x_1, P_K(x_2) - P_K(x_1)\rangle,$$
ce qui, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne bien
$$\|P_K(x_2) - P_K(x_1)\| \leq \|x_2 - x_2\|.$$

■

Proposition IV.14

Soit H un espace de Hilbert. Si E est un sous-espace vectoriel fermé de H, alors nous avons
$$H = E \overset{\perp}{\oplus} E^{\perp}. \tag{IV.3}$$
Pour toute partie $A \subset H$, l'ensemble $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel fermé de H, de plus nous avons
$$(A^{\perp})^{\perp} = \overline{\mathrm{Vect}(A)}. \tag{IV.4}$$

Preuve :

— Nous avons toujours $E \cap E^{\perp} = \{0\}$, de sorte que les espaces E et $E^{\perp}$ sont bien en somme directe. Comme E est supposée fermée, on peut utiliser la projection orthogonale sur E et ainsi écrire tout élément u de H sous la forme
$$u = P_E u + (u - P_E u).$$
Par construction, $P_E u \in E$ et $u - P_E u \in E^{\perp}$ (voir la remarque IV.12).

— En utilisant les définitions, on voit immédiatement que $A \subset (A^\perp)^\perp$. Comme le membre de droite de cette inclusion est un sous-espace vectoriel fermé de H, on obtient l'inclusion

$$\overline{\text{Vect}(A)} \subset (A^\perp)^\perp.$$

On pose $E = \overline{\text{Vect}(A)}$, qui est un sous-espace fermé, de même que $\tilde{H} = (A^\perp)^\perp$ qui est donc un espace de Hilbert. Si on suppose que l'inclusion $E \subset \tilde{H}$ est stricte. Il existe un sous-espace vectoriel fermé $F \neq \{0\}$ qui vérifie

$$E \overset{\perp}{\oplus} F = \tilde{H}.$$

Il suffit en effet de prendre pour F l'orthogonal de E dans le Hilbert $\tilde{H}$.
Soit u un élément non nul de F. Par contruction, nous avons $u \perp E$ et donc $u \in A^\perp$, mais on a aussi $u \in (A^\perp)^\perp$ et donc $u \perp u = 0$, ce qui signifie que $\|u\|^2 = 0$ et donc que $u = 0$. C'est une contradiction.

■

Remarque IV.15

Soit E un sous-espace vectoriel quelconque de H. D'après la proposition IV.2, $E^\perp$ est toujours un sous-espace fermé et on peut donc appliquer (IV.3) *à l'espace $E^\perp$, ce qui donne*

$$H = E^\perp \overset{\perp}{\oplus} (E^\perp)^\perp,$$

ou encore avec (IV.4)

$$H = E^\perp \overset{\perp}{\oplus} \overline{E}.$$

On déduit les propriétés utiles suivantes

$$\text{(IV.3) est vraie} \iff E \text{ est fermé},$$

$$E^\perp = \{0\} \iff E \text{ est dense}.$$

III Théorème de représentation et applications

Théorème IV.16 (de représentation de Riesz)

Soit H un espace de Hilbert. Pour toute forme linéaire continue L sur H (i.e. un élément du dual H'), il existe un unique élément $l \in H$ tel que

$$L(x) = \langle l, x\rangle, \quad \forall x \in H.$$

De plus, on a $\|L\|_{H'} = \|l\|_H$.

Preuve :

Si L est identiquement nulle, on voit que $l = 0$ convient.

Supposons donc que $L \neq 0$. On définit $K = \text{Ker}\, L$ qui est un sous-espace vectoriel fermé (car L est continue). D'après la proposition IV.14 on peut écrire

$$H = K \overset{\perp}{\oplus} K^\perp.$$

Comme L n'est pas nulle, on ne peut avoir $K = H$ et donc $K^\perp$ est non trivial. De plus, pour tout $u \in K^\perp \setminus \{0\}$ on a $L(u) \neq 0$.

Ceci implique que $K^\perp$ est de dimension 1. En effet, si u_1, u_2 sont deux éléments non nuls dans $K^\perp$, et si on pose $v = L(u_2)u_1 - L(u_2)u_1$, on a $v \in K^\perp$ et $L(v) = 0$, ce qui implique que $v = 0$ et donc u_1 et u_2 sont liés.

On choisit maintenant $x_0 \in K^\perp$ tel que $L(x_0) = 1$ et on pose $l = \frac{x_0}{\|x_0\|^2}$. Vérifions que ce l convient. Pour cela, on écrit tout élément x de H sous la forme

$$x = P_K(x) + \underbrace{\alpha x_0}_{\in K^\perp}.$$

On calcule alors

$$L(x) = L(P_K(x)) + \alpha L(x_0) = \alpha,$$

car L est nulle sur K, et

$$\langle l, x\rangle = \langle l, P_K(x)\rangle + \alpha\langle l, x_0\rangle = \alpha \left\langle \frac{x_0}{\|x_0\|^2}, x_0 \right\rangle = \alpha.$$

D'où le résultat. ■

Proposition IV.17 (Opérateur adjoint)

Soient $(H_1, \langle ., . \rangle_1)$ et $(H_2, \langle ., . \rangle_2)$ deux espaces de Hilbert et $T : H_1 \to H_2$ un opérateur linéaire continu. Il existe alors un unique opérateur linéaire continu noté $T^* : H_2 \to H_1$ tel que

$$\langle Tu_1, u_2 \rangle_2 = \langle u_1, T^* u_2 \rangle_1, \ \ \forall u_1 \in H_1, \forall u_2 \in H_2.$$

De plus, nous avons les propriétés suivantes :

1. $(T^*)^* = T$.
2. $\|T\|_{L(H_1,H_2)} = \|T^*\|_{L(H_2,H_1)}$.
3. *T est compact si et seulement si T^* est compact.*

On rappelle l'exercice 15 du TD4 qui dit que le simple fait qu'un opérateur adjoint existe implique la continuité de T.

Preuve :

— Pour tout $u_2 \in H_2$, l'application
$$u_1 \in H_1 \mapsto \langle Tu_1, u_2 \rangle_2,$$
est la composée de la forme linéaire continue sur H_2 notée $\langle ., u_2 \rangle_2$ avec l'opérateur linéaire continu T. Il s'agit donc d'une forme linéaire continue sur H_1.
D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe donc un unique élément de H_1 que l'on note $T^* u_2$ qui vérifie
$$\langle Tu_1, u_2 \rangle_2 = \langle u_1, T^* u_2 \rangle_1, \ \ \forall u_1 \in H_1.$$

— En utilisant la linéarité de T et la bilinéarité des produits scalaires, on vérifie très aisément que T^* est bien linéaire. Il reste à montrer la continuité de T^*. Il suffit pour cela de prendre $u_1 = T^* u_2$ dans l'égalité ci-dessus ce qui donne avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la continuité de T
$$\|T^* u_2\|_1^2 = \langle TT^* u_2, u_2 \rangle_2 \leq \|TT^* u_2\|_2 \|u_2\|_2 \leq \|T\|_{L(H_1,H_2)} \|T^* u_2\|_1 \|u_2\|_2,$$
ce qui fournit
$$\|T^* u_2\|_1 \leq \|T\|_{L(H_1,H_2)} \|u_2\|_2, \ \ \forall u_2 \in H_2.$$
Ceci prouve la continuité de T^* et l'inégalité
$$\|T^*\|_{L(H_2,H_1)} \leq \|T\|_{L(H_1,H_2)}.$$

— Le fait que $(T^*)^* = T$ est évident en regardant la définition et l'égalité des normes provient de l'inégalité ci-dessus que l'on applique en remplaçant T par T^*.

— Il suffit maintenant de montrer que si T est compact alors T^* est compact, l'autre implication s'en suivra grâce au fait que $(T^*)^* = T$. Supposons donc que T est compact. Soit B_1 la boule unité fermée de H_1 et B_2 la boule unité fermée de H_2.
On veut montrer que $T^*(B_2)$ est relativement compact dans H_1. Soit donc $(v_n)_n$ une suite d'éléments dans B_2. On veut montrer qu'il existe une sous-suite telle que $(T^* v_{\psi(n)})_n$ converge dans H_1.
Par hypothèse $K = \overline{T(B_1)}$ est un compact de H_2 contenu dans $\|T\| B_2$. Pour tout n, on construit la fonction
$$f_n = \langle v_n, . \rangle_2,$$
qui est linéaire et continue sur H_2 et donc en particulier continue sur le compact K. Par ailleurs, en tant qu'élément de $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{R})$ nous avons
$$\|v_n\|_{L^\infty(K)} \leq \|f_n\|_{L^\infty(\|T\| B_2)} \leq \|T\| \|v_n\|_2 \leq \|T\|, \ \ \text{car } v_n \in B_2 \text{ pour tout } n.$$
La suite $(f_n)_n$ est donc uniformément bornée sur K. En fait, on a même mieux par linéarité du produit scalaire, pour tout $x, y \in K$,
$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq |\langle v_n, x - y \rangle_2| \leq \|v_n\|_2 \|x - y\|_2 \leq \|x - y\|_2,$$
ce qui montre que f_n est Lipschitzienne sur K avec $\text{Lip}(f_n) \leq 1$.
Ainsi la suite de fonctions continues $(f_n)_n$ sur le compact K est uniformément bornée et équicontinue. D'après le théorème d'Ascoli, on peut en extraire une sous-suite (toujours notée $(f_n)_n$ pour simplifier les notations) qui converge uniformément vers une certaine fonction continue $f : K \to \mathbb{R}$.

Par définition de K, cela signifie que

$$\forall u_1 \in B_1, \ \ \langle v_n, Tu_1\rangle_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} f(Tu_1). \tag{IV.5}$$

Ceci implique en réalité que $\langle v_n, Tu_1\rangle_2$ converge pour tout $u_2 \in H_2$ (par homogénéité, il suffit d'appliquer (IV.5) à $u_1/\|u_1\|_1$ qui est bien dans la boule B_1.
En résumé, on a montré que la suite d'applications linéaires

$$u_1 \in H_1 \mapsto \langle v_n, Tu_1\rangle_2,$$

converge simplement, et même uniformément sur B_1. On en déduit tout d'abord que la limite est nécessairement une application linéaire (évident) et continue en 0 (par convergence uniforme au voisinage de 0, ou par le théorème de Banach-Steinhaus) donc continue sur tout l'espace H_1. Par le théorème de représentation de Riesz, il existe donc un $l \in H_1$ tel que

$$\langle T^* v_n, u_1\rangle_1 = \langle v_n, Tu_1\rangle_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle l, u_1\rangle_1, \ \ \text{uniformément pour } u_1 \in B_1.$$

Ceci montre que

$$\sup_{u_1\in B_1} |\langle T^* v_n - l, u_1\rangle_1| \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

et donc finalement que

$$\|T^* v_n - l\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

On a bien montré la compacité de $\overline{T^* B_2}$, c'est-à-dire la compacité de l'opérateur T^*.

■

Définition IV.18

On dit qu'un opérateur linéaire continu $T : H \to H$, H espace de Hilbert, est autoadjoint si on a

$$T = T^*.$$

Le théorème suivant est fondamental dans la résolution de certains problèmes (dits variationnels). Il permet de donner des conditions suffisantes à l'inversibilité d'un opérateur linéaire continu dans un espace de Hilbert. A noter, que ces conditions ne sont pas nécessaires et donc que certains problèmes ne peuvent être résolus par application directe de ce théorème.

Théorème IV.19 (de Lax-Milgram)

Soit H un espace de Hilbert, $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire et $L : H \to \mathbb{R}$ une forme linéaire. On suppose que :

— *La forme bilinéaire a est continue*

$$|a(u, v)| \leq \|a\|\|u\|\|v\|, \ \ \forall u, v \in H.$$

— *La forme bilinéaire a est coercive, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$a(u, u) \geq \alpha\|u\|^2, \ \ \forall u \in H.$$

— *La forme linéaire L est continue*

$$|L(v)| \leq \|L\|\|v\|, \ \ \forall v \in H.$$

Alors il existe une unique solution $u \in H$ au problème suivant

$$a(u, v) = L(v), \ \ \forall v \in H.$$

Preuve :

— On commence par le cas où a est une forme bilinéaire symétrique qui est le plus facile.
En effet, dans ce cas et vu l'hypothèse de coercivité, $a(.,.)$ est un produit scalaire sur H. De plus, en combinant l'hypothèse de continuité et de coercivité, nous avons

$$\alpha\|u\|^2 \leq a(u, u) \leq \|a\|\|u\|^2, \ \ \forall u \in H.$$

Ceci prouve que la norme définie par a est équivalente à la norme initiale de H. En particulier, $(H, a(.,.))$ est un espace de Hilbert et la forme linéaire L est continue pour la norme définie par a.

On peut donc appliquer le théorème de représentation de Riesz dans ce nouvel espace de Hilbert et obtenir ainsi qu'il existe un unique $u \in H$ tel que

$$a(u, v) = L(v), \;\; \forall v \in H.$$

— Dans le cas non symétrique, on commence par utiliser le théorème de Riesz et la linéarité parrapport à v de a pour montrer l'existence d'une application $A : H \to H$ qui vérifie

$$a(u, v) = \langle Au, v\rangle, \;\; \forall v \in H.$$

De même, on utilise le théorème de Riesz pour représenter L par un élément $l \in H$ de la façon suivante

$$L(v) = \langle l, v\rangle, \;\; \forall v \in H.$$

Pour montrer le théorème, il s'agit de montrer que l'équation $Au = l$ admet une unique solution.

Comme a est linéaire par rapport à u, on vérifie que A est lui-même un opérateur linéaire. De plus, nous avons pour tout $u \in H$, l'inégalité

$$\|Au\|^2 = \langle Au, Au\rangle = a(u, Au) \leq \|a\|\|u\|\|Au\|,$$

et donc

$$\|Au\| \leq \|a\|\|u\|, \;\; \forall u \in H,$$

ce qui montre que A est continu.

Pour $\rho > 0$ qui sera choisi par la suite, on écrit l'équation $Au = l$ de façon équivalente sous la forme

$$u = u + \rho(l - Au),$$

et on est maintenant ramenés à un problème de point-fixe pour l'application

$$F_\rho : u \mapsto u + \rho(l - Au).$$

On veut utiliser le théorème du poin-fixe de Banach et pour cela on doit choisir ρ pour que cette application soit contractante. Calculons

$$\begin{aligned}\|F_\rho u_1 - F_\rho u_2\|^2 = \|(u_1 - u_2) - \rho A(u_1 - u_2)\|^2 &= \|u_1 - u_2\|^2 - 2\rho\langle u_1 - u_2, A(u_1 - u_2)\rangle + \rho^2\|A(u_1 - u_2)\|^2 \\ &\|u_1 - u_2\|^2 - 2\rho\alpha\|u_1 - u_2\|^2 + \rho^2\|a\|^2\|u_1 - u_2\|^2 \\ &(1 - 2\rho\alpha + \rho^2\|a\|^2)\|u_1 - u_2\|^2\end{aligned}$$

On constate que pour $\rho = \alpha/\|a\|^2$, on a

$$\|F_\rho u_1 - F_\rho u_2\|^2 \leq \left(1 - \frac{\alpha^2}{\|a\|^2}\right)\|u_1 - u_2\|^2,$$

et donc l'application F_ρ est bien contractante ce qui conclut la preuve.

■

IV Compacité faible dans les Hilbert

On rappelle que dans les espaces de dimension infinie, la boule unité fermée n'est jamais compacte (Théorème I.56). Ceci signifie concrètement que, si on dispose d'une suite d'éléments bornée dans l'espace en question, on ne peut en général pas en extraire une sous-suite convergente. Pour remédier à ce problème, il s'avère qu'une bonne stratégie consiste à affaiblir la notion de convergence utilisée (on parle de convergence faible). On peut alors retrouver un résultat de compacité des suites bornées. Bien entendu, la convergence faible n'est pas aussi puissante que la convergence forte et il peut être nécessaire de travailler davantage pour tirer profit de ces propriétés. C'est notamment l'objet des opérateurs compacts qui ont pour propriété de transformer des suites faiblement convergentes en des suites fortement convergentes.

On retrouve dans ce paragraphe la plupart des concepts étudiés dans le chapitre II, dans le cadre de l'espace de suites l^2. Ceci n'est d'ailleurs pas surprenant d'après la remarque IV.9.

Définition IV.20 (Convergence faible dans un Hilbert)

Soit H un espace de Hilbert. On dit qu'une suite $(u_n)_n$ converge **faiblement** *vers $u \in H$ si elle vérifie*

$$\langle u_n, v\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle u, v\rangle, \ \ \forall v \in H.$$

On notera

$$u_n \xrightharpoonup[n\to\infty]{} u.$$

Par opposition, la convergence usuelle (au sens de la norme de H) est dite **forte**.

Proposition IV.21 (Propriétés élémentaires de la convergence faible)

Soit H un espace de Hilbert et $(u_n)_n$ une suite d'éléments de H.

— *Une limite faible de $(u_n)_n$, si elle existe, est nécessairement unique.*

— *Si $(u_n)_n$ converge fortement vers u, alors elle converge aussi faiblement vers u.*
De plus, si H est de dimension finie la réciproque est vraie (dans ce cas, les deux notions de convergence coïncident).

— *Si $(u_n)_n$ converge faiblement vers u, alors $(u_n)_n$ est bornée et on a*

$$\|u\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|.$$

— *Si $(u_n)_n$ converge faiblement vers u et si deplus on a*

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\| = \|u\|,$$

alors $(u_n)_n$ converge fortement vers u.

Soit H_2 un autre espace de Hilbert et $T : H \to H_2$ un opérateur linéaire continu.

— *Si $(u_n)_n$ converge faiblement vers u dans H, alors $(Tu_n)_n$ converge faiblement vers Tu dans H_2.*

— *On suppose de plus que T est compact. Si $(u_n)_n$ converge faiblement vers u dans H, alors $(Tu_n)_n$ converge* **fortement** *vers Tu dans H_2.*

Preuve :

— Si u et u' sont deux limites faibles d'une même suite, nous avons $\langle u - u', v\rangle = 0$ pour tout $v \in H$ et donc $u = u'$.

— Comme, à $v \in H$ fixé, la forme linéaire $u \mapsto \langle u, v\rangle$ est continue pour la topologie de H, il est clair que la convergence forte de $(u_n)_n$ vers u implique la convergence forte.
Si H est de dimension finie et que $e_1, ..., e_d$ est une base de H, on peut vérifier que la formule

$$\|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} \langle u, e_i\rangle^2},$$

définit une norme sur H (donc équivalente à la norme initiale par le théorème d'équivalence des normes en dimension finie). Si $(u_n)_n$ converge faiblement vers u, nous avons

$$\|u_n - u\|^2 = \sum_{i=1}^{d} \langle u_n - u, e_i\rangle^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

car chacun des termes tend vers 0. Ceci prouve la convergence forte.

— Il s'agit d'une application immédiate du théorème de Banach-Steinhaus appliqué à la suite de formes linéaires continues définies par $u \mapsto \langle u_n, u\rangle$.

— Supposons que $(u_n)_n$ converge faiblement vers u et la convergence des normes. On peut alors développer la quantité suivante

$$\|u_n - u\|^2 = \|u_n\|^2 - 2\langle u, u_n\rangle + \|u\|^2,$$

dont on voit que le premier terme tend vers $\|u\|^2$ par hypothèse et le second converge par convergence faible. In fine, on trouve

$$\|u_n - u\|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

— Soit $v \in H_2$, nous avons par définition de l'adjoint et par convergence faible de $(u_n)_n$ dans H

$$\langle Tu_n, v\rangle_2 = \langle u_n, T^*v\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle u, T^*v\rangle = \langle Tu, v\rangle.$$

Supposons T compact. Comme $(u_n)_n$ est bornée, nous savons que la suite $(Tu_n)_n$ vit dans un compact **fort** de H_2. Mais par ailleurs, $(Tu_n)_n$ converge faiblement vers Tu. Ainsi, la seule valeur d'adhérence **forte** possible pour cette suite n'est autre que Tu. D'après la Proposition I.22, ceci implique la convergence forte de toute la suite $(Tu_n)_n$ vers Tu.

■

En général, il n'est pas vrai que si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent faiblement vers u et v respectivement, alors le produit scalaire $\langle u_n, v_n\rangle$ converge vers $\langle u, v\rangle$. C'est typiquement le cas si $v_n = u_n$ et que $(u_n)_n$ est une suite qui converge faiblement mais pas fortement.

En revanche, si l'une des deux convergences est forte, le résultat est vrai.

Proposition IV.22 (Convergence fort-faible)

Soit H un espace de Hilbert et $(u_n)_n, (v_n)_n$ deux suites d'éléments de H. On suppose que $(u_n)_n$ converge faiblement vers u et que $(v_n)_n$ converge fortement vers v.
Alors on a

$$\langle u_n, v_n\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle u, v\rangle.$$

Preuve :

Calculons

$$\begin{aligned}|\langle u_n, v_n\rangle - \langle u, v\rangle| &\leq |\langle u_n, v_n - v\rangle| + |\langle u - u_n, v\rangle| \\ &\leq \|u_n\|\|v_n - v\| + |\langle u - u_n, v\rangle|.\end{aligned}$$

Le premier terme tend vers 0 car $(u_n)_n$ est bornée et $(v_n)_n$ converge fortement. Le second terme tend vers zéro par convergence faible de $(u_n)_n$ vers u. ■

Le théorème suivant est absolument essentiel en analyse fonctionnelle. Il admet un équivalent dans les espaces de Banach que nous ne verrons pas dans ce cours.

Théorème IV.23 (Compacité faible dans les Hilbert)

Soit H un espace de Hilbert. Si $(u_n)_n$ est une suite bornée dans H, il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_n$ qui converge **faiblement** *dans H.*

On rappelle que le théorème de Riesz interdit à ce résultat d'être vrai pour la convergence forte sauf dans le cas particulier de la dimension finie.

Preuve :

Soit M une borne de $(u_n)_n$.

On note $E = \overline{\text{Vect}(u_n, n \geq 0)}$, l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par les éléments de la suite. On vérifie sans peine que cet espace est séparable (considérer l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients rationnels des u_n ...). Soit donc $(x_k)_k$ une suite d'élements de E, dense dans E.

Pour tout $k \geq 1$, la suite de nombres réels $(\langle u_n, x_k\rangle)_n$ est bornée (par $M\|x_k\|$) et donc on peut en extraire une sous-suite convergente. Par le procédé diagonal de Cantor maintenant usuel pour le lecteur, on peut finalement trouver $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$\forall k \geq 1, \ \ (\langle u_{\varphi(n)}, x_k\rangle)_n \text{ converge.} \tag{IV.6}$$

Soit maintenant $x \in E$ quelconque, on va montrer que la suite $(\langle u_{\varphi(n)}, x\rangle)_n$ est de Cauchy (et donc converge). Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Par densité de la suite $(x_k)_k$ dans E, il existe k_0 tel que

$$\|x - x_{k_0}\| \leq \frac{\varepsilon}{M}.$$

On a alors pour tout n, p

$$\begin{aligned}|\langle u_{\varphi(n)}, x\rangle - \langle u_{\varphi(n+p)}, x\rangle| &= |\langle u_{\varphi(n)} - u_{\varphi(n+p)}, x\rangle| \\ &\leq |\langle u_{\varphi(n)} - u_{\varphi(n+p)}, x_{k_0}\rangle| + |\langle u_{\varphi(n)} - u_{\varphi(n+p)}, x - x_{k_0}\rangle| \\ &\leq |\langle u_{\varphi(n)} - u_{\varphi(n+p)}, x_{k_0}\rangle| + \underbrace{2M\|x - x_{k_0}\|}_{\leq 2\varepsilon}.\end{aligned}$$

Par (IV.6), k_0 étant fixé, on peut rendre le premier terme plus petit que ε pour tout $p \geq 0$ et tout $n \geq n_0$. On a donc bien montré que la suite $(\langle u_{\varphi(n)}, x\rangle)_n$ est convergente pour tout $x \in E$.

En réalité comme $(u_n)_n \subset E$, pour $x \in H$ quelconque nous avons

$$\langle u_{\varphi(n)}, x\rangle = \langle u_{\varphi(n)}, P_E(x)\rangle,$$

et donc la suite $(\langle u_{\varphi(n)}, x\rangle)_n$ converge pour tout $x \in H$.

Par le théorème de Banach-Steinhaus, on sait que la limite simple de ces formes linéaires continues est nécessairement linéaire continue, c'est-à-dire, par le théorème de représentation de Riesz, de la forme $x \mapsto \langle u, x\rangle$ pour un certain $u \in H$. On a donc bien montré la convergence faible de $(u_{\varphi(n)})_n$ vers u. ■

La convergence faible définie plus haut est en fait une notion liée à celle de *topologie faible* (et valable des espaces vectoriels normés quelconques) que je ne souhaite pas détailler plus avant dans ce cours (voir les références, par exemple [1]). On peut quand même retenir des propriétés topologiques faibles importantes comme par exemple celle qui suit que nous détaillerons dans l'exercice 7 du TD6.

Proposition IV.24 (Convexes fermés faibles)

Soit H un espace de Hilbert. On dit qu'un ensemble $A \subset H$ est faiblement fermé si, pour toute suite $(u_n)_n$ d'éléments de A qui converge faiblement vers un $u \in H$, on a $u \in A$.

On a alors la propriété suivante

$$A \textit{ est un convexe fermé fort} \iff A \textit{ est un convexe fermé faible}.$$

Si A n'est pas convexe, il peut être fermé fort sans être fermé faible.

V Théorie spectrale des opérateurs compacts autoadjoints

Dans ce paragraphe, on souhaite voir si on peut établir une théorie de la "diagonalisation" des opérateurs dans des espaces de dimension infinie. Nous n'allons pas traiter le cas général qui relèverait d'un cours entier mais plutôt illustrer les difficultés sur des exemples puis détailler le cas des opérateurs autoadjoints compacts dans les Hilbert qui permet de répondre positivement à la question dans ce cas.

Considérons pour commencer l'exemple suivant. On prend $H = L^2(]0,1[)$ et on définit

$$T : f \in H \mapsto (x \mapsto xf(x)) \in H.$$

Il s'agit clairement d'un opérateur linéaire continu de norme égale à 1.

Cherchons si T admet des valeurs propres, c'est-à-dire un nombre $\lambda \in \mathbb{R}$ et un élément non nul f de H tels que

$$Tf = \lambda f.$$

Cette égalité s'écrit

$$(x - \lambda)f(x) = 0, \quad \text{pour presque tout } x \in]0,1[,$$

et on voit donc que $f(x)$ doit être nul pour presque tout x, quelque soit la valeur de λ. Ainsi l'opérateur T ne possède aucune valeur propre. On pourrait également montrer qu'il n'admet pas de valeur propre complexe.

On vient de voir que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'opérateur $T - \lambda\,\mathrm{Id}$ est injectif. Mais comme nous sommes en dimension infinie il est possible que cet opérateur ne soit pas surjectif.

— Supposons que $\lambda \notin [0,1]$. Pour tout $g \in L^2(]0,1[)$ on peut poser

$$f(x) = (x - \lambda)^{-1} g(x),$$

qui est bien un élément de $L^2(]0,1[)$ (car par hypothèse sur λ, $x \mapsto (x-\lambda)^{-1}$ est bornée sur $[0,1]$). De plus, on vérifie que, par construction, on a

$$(T - \lambda I)f = g.$$

Ceci montre que $(T - \lambda I)$ est surjectif (donc bijectif d'après la discussion ci-dessus sur l'injectivité). En conséquence, il est bijectif et d'inverse continu (théorème d'isomorphisme de Banach). On peut même calculer

$$\|(T - \lambda I)^{-1}\| = \|(x - \lambda)^{-1}\|_{L^\infty} = \frac{1}{d(\lambda, [0,1])}.$$

— Supposons maintenant que $\lambda \in [0,1]$, on va montrer que $(T - \lambda \operatorname{Id})$ n'est pas surjectif. Pour cela, on pose

$$g(x) = 1, \ \ \forall x \in]0,1[.$$

Cette fonction est bien dans $L^2(]0,1[)$. Si elle était dans l'image de $(T - \lambda \operatorname{Id})$, son image réciproque serait nécessairement donnée par

$$f(x) = (x-\lambda)^{-1} g(x) = (x-\lambda)^{-1},$$

mais alors

$$|f(x)|^2 = |x-\lambda|^{-2},$$

qui n'est pas intégrable sur $]0,1[$, donc f ne peut appartenir à $L^2(]0,1[)$.
Ainsi, on a établi

$$\text{Im } (T - \lambda \operatorname{Id}) \neq H, \ \ \forall \lambda \in [0,1].$$

Par contre, on peut vérifier par les mêmes arguments que précédemment, que l'ensemble

$$A_\lambda = \{g \in L^2(]0,1[), \ \text{ t.q. } g = 0 \text{ au voisinage de } \lambda\},$$

est contenu dans l'image de $T - \lambda \operatorname{Id}$. Par ailleurs, A_λ est un sous-ensemble dense de $L^2(]0,1[)$, on a donc établi

$$\overline{\text{Im } (T - \lambda \operatorname{Id})} = H, \ \ \forall \lambda \in [0,1].$$

On voit bien que la situation est plus complexe qu'en dimension finie. En plus de l'existence éventuelle de valeurs propres d'un opérateur, on peut avoir des valeurs λ qui ne sont pas valeurs propres mais pour lesquelles $T - \lambda \operatorname{Id}$ n'est pas inversible.

Définition IV.25 (Spectre. Valeurs propres)

Soit H un espace de Hilbert et $T : H \to H$ un opérateur linéaire continu. On appelle spectre de T, l'ensemble

$$\operatorname{Sp}(T) = \{\lambda \in \mathbb{R}, \ \textit{t.q. } T - \lambda \operatorname{Id} \textit{ n'est pas inversible}\}.$$

On note également

$$VP(T) = \{\lambda \in \mathbb{R}, \ \ \textit{t.q. Ker } (T - \lambda \operatorname{Id}) \neq \{0\}\},$$

l'ensemble des valeurs propres de T. On a bien sûr l'inclusion $VP(T) \subset \operatorname{Sp}(T)$ qui peut en général être stricte.

Remarque IV.26

Si $\lambda \notin \operatorname{Sp}(T)$ alors $(T - \lambda I)^{-1}$ est continue d'après le théorème d'isomorphisme de Banach.

Proposition IV.27

Soit $T : H \to H$ linéaire continu, alors $\operatorname{Sp}(T)$ est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}$ contenu dans l'intervalle $[-\|T\|, \|T\|]$.

Preuve :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $|\lambda| > \|T\|$, alors l'opérateur $\frac{1}{\lambda}T$ est contractant sa norme (qui est aussi sa constante de Lipschitz) est égale à $\|T\|/|\lambda| < 1$.

D'après la proposition II.6 (qui est une conséquence du théorème du point fixe de Banach !), l'application $\lambda \operatorname{Id} - T = \lambda \left(\operatorname{Id} - \frac{1}{\lambda} T \right)$ est donc bijective et ainsi $\lambda \notin \operatorname{Sp}(T)$, ce qu'il fallait démontrer.

Par ailleurs, $\operatorname{Sp}(T)$ est un fermé car son complémentaire est l'image réciproque de $GL(E)$ (qui est un ouvert de $L(E)$ d'après le corollaire I.48)) par l'application continue

$$\lambda \in \mathbb{R} \mapsto \lambda \operatorname{Id} - T \in L(E).$$

. ■

Comme pour les matrices à coefficients réels, il est souvent utile de considérer des spectres/valeurs propres complexes mais nous ne le ferons pas ici.

Le principal résultat de cette section est le suivant. Il montre que pour un opérateur compact et auto-adjoint dans un Hilbert, la situation est très proche de celle des matrices symétriques réelles en dimension finie.

Théorème IV.28

Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie séparable et $T : H \to H$ un opérateur linéaire compact autoadjoint. Alors, on a $0 \in \mathrm{Sp}(T)$ et il existe une suite $(\lambda_n)_n$ de nombres réels non nuls et des éléments $(u_n)_n$ de H tels que

— $\mathrm{Sp}(T) \setminus \{0\} = VP(T) \setminus \{0\} = \{\lambda_n\}_n$.

— *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$Tu_n = \lambda_n u_n.$$

Autrement dit u_n est un vecteur propre associé à la valeur propre λ_n.

— *La famille $(u_n)_n$ est orthonormée.*

— *On a $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. En particulier, une même valeur propre non nulle ne peut apparaître qu'un nombre fini de fois dans la suite $(\lambda_n)_n$.*

— *Il existe une base Hilbertienne B de Ker T telle que $B \cup \bigcup_{n\geq 0}\{u_n\}$ soit une base Hilbertienne de H. Autrement dit, il existe une base Hilbertienne de H composée de vecteurs propres de T.*

La démonstration fait appel à quelques lemmes que nous allons montrer successivement.

Lemme IV.29

Soit H un espace de Hilbert et T un opérateur autoadjoint. Si λ, μ sont deux valeurs propres distinctes de T et u, v des vecteurs propres associés, alors on a $u \perp v$.

Preuve (du lemme):

Par hypothèse, on a $Tu = \lambda u$ et $Tv = \mu v$, de sorte que

$$\lambda\langle u, v\rangle = \langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle = \mu\langle u, v\rangle,$$

où on a utilisé le caractère auto-adjoint de T dans la seconde égalité. Ceci donne

$$(\lambda - \mu)\langle u, v\rangle = 0,$$

et donc $u \perp v$ vu que $\lambda \neq \mu$. ■

Lemme IV.30

Soit H un hilbert et $T : H \to H$ un opérateur compact autoadjoint, alors $VP(T) \setminus \{0\}$ est un ensemble discret, c'est-à-dire que chacun de ces points est isolé.
Cela signifie que si $(\lambda_k)_k$ est une suite de valeurs propres et distinctes deux-à-deux qui converge vers une autre valeur propre λ, alors $\lambda = 0$.

Preuve (du Lemme):

On va raisonner par l'absurde et supposer que $\lambda \neq 0$. On peut alors supposer que tous les λ_k sont non nuls et tous distincts de λ. Pour chaque k, on se donne un vecteur propre normalisé u_k. D'après le lemme précédent les $(u_k)_k$ forment une famille orthonormale.

Pour tout $N \geq 1$, on pose

$$U_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} u_k.$$

Comme les u_k sont orthogonaux deux à deux, nous avons

$$\|U_N\|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \|u_k\|^2 = 1.$$

Comme T est compact, on peut extraire une sous-suite $(TU_{\varphi(N)})_N$ qui converge vers un certain V.

De plus, nous avons

$$\begin{aligned}\|TU_N - \lambda U_N\|^2 &= \left\| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N (\lambda_k - \lambda) u_k \right\|^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |\lambda_k - \lambda|^2 \|u_k\|^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |\lambda_k - \lambda|^2,\end{aligned}$$

et comme $(\lambda_k)_k$ converge vers λ, cette quantité tend vers 0 (Lemme de Cesaro).

On utilise maintenant que $\lambda \neq 0$, pour déduire de tout ce qui précède que la suite $(U_{\varphi(N)})_N$ converge vers $U = \frac{1}{\lambda}V$, qui est donc de norme 1. De plus, en passant à la limite dans l'inégalité précédente, on a obtenu

$$TU = \lambda U.$$

Donc U est un vecteur propre de T pour la valeur propre λ. D'après le lemme d'orthogonalité, U est donc orthogonal à tous les u_k. Ainsi, nous avons

$$\langle U, U_{\varphi(N)} \rangle = 0, \quad \forall N \geq 1,$$

et par passage à la limite on déduit $\|U\|^2 = 0$, ce qui contredit le fait que U est de norme 1. ■

Lemme IV.31 (Alternative de Fredholm, cas Hilbertien)

Soit H un Hilbert, $T : H \to H$ un opérateur compact et $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Alors on a

$$\textit{Im}\,(T - \lambda \operatorname{Id}) = (\textit{Ker}\,(T^* - \lambda \operatorname{Id}))^{\perp}.$$

En particulier, Im $(T - \lambda \operatorname{Id})$ est toujours fermée et on a l'équivalence

$$\textit{Ker}\,(T^* - \lambda \operatorname{Id}) = \{0\} \Leftrightarrow T - \lambda \operatorname{Id} \textit{ est surjectif.}$$

Preuve (du Lemme):

— L'inclusion de Im $(T - \lambda \operatorname{Id})$ dans $(\text{Ker}\,(T^* - \lambda \operatorname{Id}))^{\perp}$ est claire car si $Tu - \lambda u$ est un élément de l'image et $v \in \text{Ker}\,(T^* - \lambda \operatorname{Id})$, on a

$$\langle Tu - \lambda u, v \rangle = \langle u, T^* v - \lambda v \rangle = 0.$$

Remarquons que si H est de dimension finie, cela suffit à prouver le résultat pour des raisons d'égalité des dimensions de ces deux espaces (on utilise le théorème du rang et le fait que le rang d'une matrice et de sa transposée sont égaux).

— Montrons que l'image Im $(T - \lambda \operatorname{Id})$ est fermée. Soit $(Tu_n - \lambda u_n)_n$ une suite d'éléments de cet ensemble qui converge vers un $v \in H$.

Soit $K = \text{Ker}\,(T - \lambda \operatorname{Id})$. On rappelle que, comme K est un sous-espace fermé (c'est le noyau d'une application continue), nous avons $H = K \overset{\perp}{\oplus} K^{\perp}$ (Proposition IV.14). Quitte à remplacer u_n par la projection orthogonale de u_n sur $K^{\perp}$ (ce qui revient à rajouter à u_n un élément de K et ne change donc pas la valeur de $Tu_n - \lambda u_n$), on peut supposer que $u_n \in K^{\perp}$.

On va maintenant montrer que $(u_n)_n$ est une suite bornée. En effet, si ce n'est pas le cas, il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_n$ telle que $\|u_{\varphi(n)}\| \to \infty$, de sorte que si on pose

$$\tilde{u}_{\varphi(n)} = \frac{u_{\varphi(n)}}{\|u_{\varphi(n)}\|},$$

on a

$$T\tilde{u}_{\varphi(n)} - \lambda \tilde{u}_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0. \tag{IV.7}$$

Comme $(\tilde{u}_{\varphi(n)})$ est une suite bornée et que T est compacte, on peut trouver une nouvelle sous-suite telle que $(T\tilde{u}_{\varphi(\psi(n))})_n$ converge, mais comme $\lambda \neq 0$, (IV.7) nous montre que la suite $(\tilde{u}_{\varphi(\psi(n))})_n$ est elle-même convergente et que la limite u vérifie $\|u\| = 1$ et $Tu = \lambda u$, ce qui montre que $u \in \text{Ker}\,(T - \lambda \operatorname{Id}) = K$. Mais nous avions initialement supposé que $u_n \in K^{\perp}$ et donc la limite u est également dans $K^{\perp}$, ce qui montre que $u = 0$ et constitue une contradiction manifeste avec le fait que $\|u\| = 1$.

On peut désormais conclure. Comme $(u_n)_n$ est bornée et T compact, on peut extraire une sous-suite telle que $(Tu_{\varphi(n)})_n$ soit convergente. Comme λ est non nul et que $v_n = Tu_n - \lambda u_n$ est convergente, on en déduit que la suite $(u_{\varphi(n)})_n$ est elle-même convergente. Si on note u la limite de cette suite, nous pouvons passer à la limite et obtenir $v = Tu - \lambda u$, ce qui montre bien que $v \in \text{Im}\,(T - \lambda\,\text{Id})$.

— On peut maintenant considérer le supplémentaire orthogonal de $\text{Im}\,(T - \lambda\,\text{Id})$ dans l'espace fermé $(\text{Ker}\,(T^* - \lambda\,\text{Id}))^{\perp}$, c'est-à-dire un espace fermé F tel que

$$(\text{Ker}\,(T^* - \lambda\,\text{Id}))^{\perp} = \text{Im}\,(T - \lambda\,\text{Id}) \overset{\perp}{\oplus} F.$$

On va montrer que $F = \{0\}$ ce qui conclura la preuve. Soit $x \in F$. Par définition cet élément est orthogonal à l'image de $T - \lambda\,\text{Id}$, ce qui donne

$$\langle Tu - \lambda u, x\rangle = 0, \ \ \forall u \in H,$$

et donc

$$\langle u, T^*x - \lambda x\rangle = 0, \ \ \forall u \in H,$$

ce qui fournit $T^*x = \lambda x$. Donc x est dans le noyau de $T^* - \lambda I$ mais par construction il est également dans l'orthogonal de ce même noyau et donc finalement $x = 0$.

■

Lemme IV.32

Soit H un espace de Hilbert et $T : H \to H$ un opérateur compact auto-adjoint. Si $\text{Sp}(T) = \{0\}$, alors $T = 0$.

Preuve (du Lemme):

On définit

$$M = \sup_{\|u\|\leq 1} \langle Tu, u\rangle.$$

On considère une suite maximisante pour ce problème, c'est-à-dire une suite $(u_n)_n$ telle que

$$\|u_n\| \leq 1, \ \forall n,$$

$$\langle Tu_n, u_n\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} M.$$

Comme $(u_n)_n$ est bornée, d'après le Théorème IV.23, on peut en extraire une sous-suite faiblement convergente

$$u_{\varphi(n)} \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} u.$$

De plus, d'après la Proposition IV.21, on a $\|u\| \leq 1$ et comme T est compact on a la convergence forte

$$Tu_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} Tu.$$

Par produit de convergence fort-faible (Proposition IV.22), nous avons

$$M = \lim_{n\to\infty} \langle Tu_{\varphi(n)}, u_{\varphi(n)}\rangle = \langle Tu, u\rangle.$$

Par ailleurs, nous avons $\|u\| = 1$ car si on avait $\|u\| < 1$, alors $\bar{u} = u/\|u\|$ serait de norme 1 et vérifierait $\langle T\bar{u}, \bar{u}\rangle > M$, ce qui est exclu par définition de M. Ainsi, on a montré l'existence d'un u de norme 1 tel que

$$\langle (T - M\,\text{Id})u, u\rangle = 0. \tag{IV.8}$$

La forme bilinéaire symétrique $a(w, w) = \langle (M\,\text{Id} - T)w, v\rangle$ est positive par définition de M, elle vérifie donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\langle (M\,\text{Id} - T)w, v\rangle| \leq (\langle (M\,\text{Id} - T)w, w\rangle)^{\frac{1}{2}} \, (\langle (M\,\text{Id} - T)v, v\rangle)^{\frac{1}{2}}\,.$$

Et donc, si on prend $w = u$ dans cette inégalité, en utilisant (IV.8), on trouve

$$|\langle (M\,\text{Id} - T)u, v\rangle| = 0, \ \forall v \in H,$$

ou encore

$$Tu = Mu,$$

ce qui montre que M est une valeur propre de T, en particulier un élément du spectre de T. Par hypothèse, on a donc $M = 0$.

De la même manière, on montre que

$$\inf_{\|u\|\leq 1} \langle Tu, u\rangle = 0.$$

En conclusion, on a montré que pour tout $u \in H$, $\langle Tu, u\rangle = 0$. Ainsi, en utilisant que T est auto-adjoint, on obtient que pour tout $u, v \in H$

$$0 = \langle T(u+v), u+v\rangle = \underbrace{\langle Tu, u\rangle}_{=0} + 2\langle Tu, v\rangle + \underbrace{\langle Tv, v\rangle}_{=0},$$

et donc

$$\langle Tu, v\rangle = 0, \ \ \forall u, v \in H,$$

ce qui montre bien que T est l'opérateur nul. ∎

On va maintenant utiliser les lemmes précédents pour démontrer le résultat principal de décomposition spectrale des opérateurs compacts auto-adjoints.

Preuve (du Théorème IV.28):

— Tout d'abord, $0 \in \mathrm{Sp}(T)$ car sinon, T serait inversible (et d'inverse continu, d'après le théorème d'isomorphisme de Banach) et donc $\mathrm{Id} = T^{-1} \circ T$ serait un opérateur compact (Proposition III.11). Ceci impliquerait que la boule unité fermée de H (qui est l'image d'elle-même par l'identité !) serait compacte et d'après le théorème de Riesz, ceci n'est possible que si H est de dimension finie, ce qui est exclu ici.

— L'inclusion $VP(T) \subset \mathrm{Sp}(T)$ est toujours vraie. Soit maintenant $\lambda \in \mathrm{Sp}(T) \setminus \{0\}$. D'après le Lemme IV.31, en utilisant que $T^* = T$, on observe que $\mathrm{Ker}\,(T - \lambda\,\mathrm{Id})$ ne peut être réduit à zéro. Donc $\lambda \in VP(T)$. D'après la Proposition III.12, on sait de plus que la dimension de l'espace propre considéré est fini.

Enfin, le lemme IV.30, nous dit que l'ensemble des valeurs propres non nulles de T est discret. On peut donc bien ranger les valeurs propres non nulles, comptées avec leur multiplicité, sous la forme d'une suite $(\lambda_n)_n$.

Pour chacune de ces valeurs propres, on choisit un vecteur propre normalisé u_n, en s'arrangeant pour que les vecteurs propres associés à une même valeur propre soient orthogonaux entre eux (on rappelle que les espaces propres en question sont de dimension finie et on peut utiliser à bon droit le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt vu à la Proposition IV.6 à l'intérieur de chacun de ces espaces).

— D'après le lemme IV.29, les vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes sont bien orthogonaux.

— La suite $(\lambda_n)_n$ est contenue dans le compact $[-\|T\|, \|T\|]$ (proposition IV.27) et d'après le lemme IV.30, l'unique valeur d'adhérence de cette suite ne peut être que 0, ce qui montre bien que $\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (voir la Proposition I.22).

— Comme $\mathrm{Ker}\, T$ est fermé, c'est un espace de Hilbert séparable (car H est séparable, il suffit de prendre les projections sur $\mathrm{Ker}\, T$ des éléments d'une partie dénombrable dense dans H). On peut donc en trouver une base hilbertienne B. Par ailleurs, $\mathrm{Ker}\, T$ est orthogonal à tous les u_n (Lemme IV.29) et donc nous avons bien au total une famille orthonormale.

On note $F = \mathrm{Vect}(B \cup \bigcup_n \{u_n\})$. Il s'agit de montrer que F est dense dans H. Par construction F est stable par T car les éléments de B et les u_n sont stables par T.

Comme $T = T^*$, on en déduit que $T(F^\perp) \subset F^\perp$. En effet, si $u \in F^\perp$ et $v \in F$, nous avons

$$\langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle = 0, \ \text{car } Tv \in F,$$

ce qui montre bien que $Tu \in F^\perp$.

L'espace $F^\perp$ est fermé, c'est donc un espace de Hilbert. La restriction $\tilde{T}$ de T à $F^\perp$ définit donc un opérateur compact autoadjoint dans $F^\perp$. Cet opérateur $\tilde{T}$ ne peut avoir de valeur propre non nulle, car si c'était pas le cas, le vecteur propre associé serait aussi un vecteur propre de T, appartenant à $F^\perp$. Comme F contient, par construction, tous les sous-espaces propres de T, cela n'est pas possible.

En utilisant les propriétés établies au début du théorème mais appliquées à $\tilde{T}$ nous déduisons que $\mathrm{Sp}(\tilde{T}) = \{0\}$ (en effet le spectre de $\tilde{T}$ est nécessairement non vide et ne peut contenir aucun nombre non nul). D'après le lemme IV.32, on déduit que $\tilde{T} = 0$, ce qui prouve que T est nul sur $F^\perp$. Ceci n'est possible que si $F^\perp = \{0\}$ car le noyau de T est, par définition, contenu dans F.

On a donc montré que $F^\perp = \{0\}$ et donc d'après la Proposition IV.14

$$\overline{F} = (F^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = H.$$

Le théorème est démontré.

∎

VI Un exemple détaillé : le problème de Dirichlet 1D et l'équation parabolique associée

VI.1 Problème de Dirichlet 1D

Soit $\Omega =]0,1[$ et $k \in \mathcal{C}^1([0,1])$ une fonction vérifiant $\inf_{[0,1]} k > 0$. On posera $h = 1/k$. Etant donnée une fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$, on cherche à trouver toutes les fonctions $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ solutions du problème au bord suivant

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = f(x) \ \text{ pour tout } x \in \Omega, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{IV.9}$$

Ce problème est central dans beaucoup de modèles concrets issus de la physique, de la biologie, de la chimie, ... Bien entendu, c'est plutôt sa version multi-dimensionnelle (i.e. sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$) qui est utile mais cela fera l'objet des cours d'EDP du second semestre et du M2.

Bien que les solutions de ce problème ne dépendent que d'une seule variable x, il faut bien prendre garde au fait que nous n'avons pas ici affaire à un problème de Cauchy pour une équation différentielle ordinaire car les conditions imposées à la solution sont de type "conditions au bord" ($u(0) = u(1) = 0$) et non pas "conditions initiales" (qui pourraient ressembler à $u(0) = u'(0) = 0$). C'est la raison pour laquelle ce problème relève plutôt de la théorie des équations aux dérivées partielles (même s'il n'y a qu'une variable !).

Proposition IV.33 (Unicité)

Si f et k sont fixées, alors le problème (IV.9) *admet* **au plus** *une solution $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$.*

Preuve :

Il s'agit simplement de faire une intégration par parties. Supposons en effet que u_1 et u_2 soient deux solutions du problème. Par soustraction, on constate que la différence $u = u_1 - u_2$ vérifie l'équation

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \ \ \forall x \in [0,1],$$

ainsi que les conditions aux limites $u(0) = u(1) = 0$.

On multiplie alors l'équation ci-dessus en tout point x par $u(x)$ lui-même et on intègre le résultat sur l'intervalle $[0,1]$. On obtient

$$0 = \int_0^1 -\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) u(x)\,dx.$$

On procède alors à une intégration par parties en remarquant que les termes de bord vont s'annuler grâce aux conditions aux limites $u(0) = u(1) = 0$. On obtient

$$0 = \int_0^1 k(x)\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x)\right|^2 dx.$$

Comme la fonction k est strictement positive, on conclut que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x) = 0, \ \ \forall x \in [0,1],$$

donc que u est une fonction constante sur $[0,1]$ qui ne peut être que la fonction nulle au vu des conditions au bord $u(0) = u(1) = 0$.

On a donc bien montré $u_1 = u_2$ et donc l'unicité de l'éventuelle solution de (IV.9). ■

Proposition IV.34 (Existence et fonction de Green)

Pour tout $(x,y) \in [0,1]\times[0,1]$, on définit la fonction suivante

$$G(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\int_0^1 h}\left(\displaystyle\int_0^y h\right)\left(\displaystyle\int_x^1 h\right), & \text{si } y \leq x, \\ \dfrac{1}{\int_0^1 h}\left(\displaystyle\int_y^1 h\right)\left(\displaystyle\int_0^x h\right), & \text{si } x \leq y. \end{cases}$$

1. *G est continue, positive et symétrique sur $[0,1]\times[0,1]$ et elle est de classe $\mathcal{C}^2$ en dehors de la diagonale $\Delta = \{(x,x),\ x \in [0,1]\}$.*
2. *Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$, la formule*

$$u(x) = \int_0^1 G(x,y)f(y)\,dy, \quad \forall x \in [0,1],$$

définit bien une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ qui est solution du problème (IV.9).

Preuve :

1. La continuité, la positivité et la symétrie de G sont évidentes en utilisant la formule et les propriétés de la fonction k (et donc de $h = 1/k$). De plus, en dehors de la diagonale, elle s'exprime en fonction de primitives de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, elle est donc de classe $\mathcal{C}^2$.
2. On va commencer par calculer $k(x)\frac{\partial G}{\partial x}(x,y)$ en dehors de la diagonale :
   — Si $x < y$: on a
   $$\frac{\partial G}{\partial x}(x,y) = h(x)\frac{1}{\int_0^1 h}\int_y^1 h,$$
   et donc
   $$k(x)\frac{\partial G}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{\int_0^1 h}\int_y^1 h. \tag{IV.10}$$
   — Si $x > y$: on a
   $$\frac{\partial G}{\partial x}(x,y) = -h(x)\frac{1}{\int_0^1 h}\int_0^y h,$$
   et donc
   $$k(x)\frac{\partial G}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{\int_0^1 h}\int_0^y h. \tag{IV.11}$$

   On remarque en particulier que $\left|k(x)\frac{\partial G}{\partial x}(x,y)\right| \leq 1$.

   On va maintenant dériver par rapport à x dans la formule qui définit u. Ceci est parfaitement justifié par la borne précédente sur la dérivée de G et par le théorème de dérivation de Lebesgue (remarquez que G n'est pas dérivable quand $y = x$ mais que cela est sans importance). On obtient
   $$k(x)\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\int_0^1 h}\left[-\int_0^x f(y)\left(\int_0^y h\right)dy + \int_x^1 f(y)\left(\int_y^1 h\right)dy\right].$$
   Sous cette forme, on voit bien que cette fonction s'exprime à l'aide de primitives de fonctions continues, elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ (et donc, par division par k, on voit que u est de classe $\mathcal{C}^2$). De plus on trouve
   $$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{1}{\int_0^1 h}\left[-f(x)\left(\int_0^x h\right) - f(x)\left(\int_x^1 h\right)\right] = -f(x).$$
   On a bien montré que u vérifie l'équation voulue.

   De plus, on constate que $G(0,y) = G(1,y) = 0$ pour tout y et donc, par construction on a bien $u(0) = u(1) = 0$.

■

La fonction G définie ci-dessus est appelée la **fonction de Green** associée au problème (IV.9). La présentation proposée ici peut sembler *miraculeuse* mais en réalité l'existence d'une fonction de Green est une propriété très générale du type de problème considéré. Par ailleurs, il peut être instructif d'essayer de comprendre comment la formule de G a été obtenue (par exemple en essayant de traiter le cas le plus simple où $k(x) = 1$ pour tout x).

Pour pouvoir utiliser l'analyse hilbertienne développée dans ce chapitre il est nécessaire d'étendre les calculs précédents à l'espace $L^2(\Omega)$.

Théorème IV.35 (Opérateur résolvant)

On travaille dans l'espace de Hilbert $H = L^2(\Omega)$ et on définit l'opérateur $T : H \mapsto H$ par la formule

$$T : f \in H \mapsto \left(x \in]0,1[\mapsto \int_0^1 G(x,y)f(y)\,dy\right) \in H.$$

L'opérateur ainsi obtenu est linéaire, auto-adjoint, compact et injectif. De plus, l'image de T est constituée de fonctions continues sur $[0,1]$, nulles en $x = 0$ et $x = 1$.
Il est appelé : opérateur résolvant *associé au problème* (IV.9).

Preuve :

— La linéarité est claire. Le caractère auto-adjoint est une conséquence de la symétrie de la fonction de Green G et du théorème de Fubini. En effet, si $f, g \in H$, nous avons

$$\begin{aligned}
\langle Tf, g\rangle &= \int_0^1 (Tf)(x)g(x)\,dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 G(x,y)f(y)g(x)\,dy\right) dx \\
&= \int_0^1 f(y)\left(\int_0^1 G(x,y)g(x)\,dx\right) dy \\
&= \int_0^1 f(y)\left(\int_0^1 G(y,x)g(x)\,dx\right) dy \\
&= \langle f, Tg\rangle.
\end{aligned}$$

Le théorème de Fubini est justifié ici grâce à la majoration

$$|G(x,y)f(y)g(x)| \leq \frac{\|h\|_\infty}{\int_0^1 h}|f(y)||g(x)|, \quad \text{pour presque tous } x, y,$$

et par le fait que le produit $(x,y) \mapsto |f(y)||g(x)|$ est intégrable sur $]0,1[^2$ (théorème de Tonnelli).

— Dans la Proposition III.13, on a montré que l'opérateur T était compact en tant qu'opérateur de $E = \mathcal{C}^0([0,1])$ dans lui-même. En réalité, la preuve est strictement identique pour montrer que T est compact en tant qu'opérateur de H dans E. En effet, si B est maintenant la boule unité de H, on peut immédiatement voir (avec les notations de la proposition citée plus haut) que

$$|Tf(x)| \leq \|G\|_\infty \|f\|_{L^1} \leq \|G\|_\infty \|f\|_{L^2} \leq \|G\|_\infty, \ \forall x \in [0,1],$$

$$|Tf(x) - Tf(x')| \leq \sup_y |G(x,y) - G(x',y)|\|f\|_{L^1} \leq \sup_y |G(x,y) - G(x',y)|,$$

cette quantité tendant vers 0 quand $x' \to x$ par le théorème de Heine. Ainsi, on peut appliquer le théorème d'Ascoli à l'ensemble $T(B)$ est montrer qu'il est relativement compact dans E. (On montre au passage que l'image de T est constituée de fonctions continues ...)

Par ailleurs, l'application identité de E dans H est continue d'après l'inégalité immédiate

$$\|f\|_{L^2} \leq \|f\|_\infty, \ \forall f \in E = \mathcal{C}^0([0,1]).$$

Ainsi, on peut écrire

$$T_{H\to H} = \mathrm{Id}_{E\to H} \circ T_{H\to E},$$

ce qui prouve que $T_{H\to H}$ est compact d'après la Proposition III.11.

— Comme $G(0, y) = G(1, y) = 0$ pour tout y, on a bien

$$(Tf)(0) = (Tf)(1) = 0, \ \ \forall f \in H.$$

— On veut montrer que $\operatorname{Ker} T = \{0\}$. Pour cela, on utilise un résultat général qui dit que, pour n'importe quel opérateur continu on a

$$\operatorname{Ker} T \subset (\operatorname{Im} T^*)^\perp.$$

Rappelons la démonstration de ce fait : si $x \in \operatorname{Ker} T$ et $y \in \operatorname{Im} T^*$, alors on peut écrire $y = T^* z$ et donc

$$\langle x, y\rangle = \langle x, T^* z\rangle = \langle Tx, z\rangle = 0,$$

car $Tx = 0$.

Dans le cas qui nous occupe, T est auto-adjoint donc $T = T^*$, on aura donc montré le résultat si on montre que $(\operatorname{Im} T)^\perp = \{0\}$, ce qui est équivalent à montrer que $\operatorname{Im} T$ est dense dans H (voir la remarque IV.15).

Pour montrer ceci, il suffit de montrer que l'image de T contient un sous-espace dont on sait qu'il est dense. On va montrer par exemple que $\operatorname{Im} T$ contient l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^2_c(]0, 1[)$. Soit donc $u \in \mathcal{C}^2_c(]0, 1[)$ et posons $f = -\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ qui est une fonction continue à support compact dans $]0, 1[$. Par ailleurs par construction nous avons $u(0) = u(1) = 0$ et donc u est l'unique solution du problème (IV.9) pour le second membre f (qui est bien dans H). Nous avons vu plus haut dans la Proposition IV.34 que cela implique que

$$Tf = u,$$

et donc en particulier que $u \in \operatorname{Im} T$.

En conclusion, l'image de T contient l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ et à support compact. Cet ensemble étant dense dans L^2, on en déduit la densité de $\operatorname{Im} T$ dans H et donc l'injectivité de T.

■

On peut dès lors utiliser la théorie spectrale pour en déduire les propriétés suivantes.

Théorème IV.36 (Fonctions propres du problème (IV.9))

Il existe une suite $(\mu_n)_{n\geq 1}$ de nombres strictement positifs, croissante, telle que $\lim_{n\to\infty} \mu_n = +\infty$ et une suite de fonctions $(e_n)_{n\geq 1}$ de classe $\mathcal{C}^2([0, 1])$ vérifiant

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\dfrac{\partial e_n}{\partial x}\right) = \mu_n e_n(x) \ \ \textit{pour tout } x \in]0, 1[, \\ e_n(0) = e_n(1) = 0, \end{cases} \tag{IV.12}$$

et telle que $(e_n)_{n\geq 1}$ est une base hilbertienne de $L^2(]0, 1[)$.

Preuve (du Théorème):

On applique le théorème spectral à l'opérateur T (dont on rappelle que le noyau est réduit à 0) de sorte qu'il existe une suite $(\lambda_n)_n$ de valeurs propres non nulles, qui tendent vers 0 et une base hilbertienne $(e_n)_n$ formée de vecteurs propres de T. On a donc

$$Te_n = \lambda_n e_n.$$

Comme $\lambda_n \neq 0$, on en déduit en particulier que $e_n \in \operatorname{Im} T$ et donc que $e_n \in \mathcal{C}^0([0, 1])$. On peut donc appliquer la proposition IV.34 et en déduire que $\lambda_n e_n$ est l'unique solution du problème (IV.9) avec le second membre e_n. En particulier, e_n est de classe $\mathcal{C}^2$ et nulle au bord. De plus, si on pose $\mu_n = \frac{1}{\lambda_n}$ alors on a bien l'équation (IV.12) qui est vérifiée.

Multiplions cette équation par e_n et intégrons le résultat sur $]0, 1[$. Après intégration par parties (dont les termes de bord sont nuls grâce aux conditions aux limites vérifiées par e_n) on trouve

$$\int_0^1 k(x) \left|\frac{\partial e_n}{\partial x}\right|^2 dx = \mu_n \int_0^1 |e_n|^2 \, dx = \mu_n, \tag{IV.13}$$

ce qui prouve que $\mu_n > 0$ pour tout n. De plus, comme $(\lambda_n)_n$ tend vers 0, on en déduit que $(\mu_n)_n$ tend vers l'infini et on peut donc les ranger dans l'ordre croissant (on rappelle que les multiplicités des valeurs propres sont finies). ∎

Corollaire IV.37 (Résolution du problème de Dirichlet dans la base de fonctions propres)

Si $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$, alors l'unique solution u du problème (IV.9) peut s'exprimer sous la forme

$$u = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\mu_n}\langle f, e_n\rangle e_n,$$

la convergence de cette série de fonctions étant réalisée dans L^2 et également dans $\mathcal{C}^0([0,1])$.

Preuve :

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1]) \subset H$. On développe f en série dans la base hilbertienne $(e_n)_n$, ce qui donne

$$f = \sum_{n\geq 1}\langle f, e_n\rangle e_n.$$

D'après la proposition IV.34, la solution du problème (IV.9) avec second membre f est exactement donnée par $u = Tf$, de sorte qu'il suffit d'appliquer l'opérateur T à la formule précédente (noter que l'on peut passer T sous la série car cet opérateur est continu !)

$$u = Tf = \sum_{n\geq 1}\langle f, e_n\rangle Te_n,$$

puis on utilise le fait que e_n est vecteur propre de T pour la valeur propre $\lambda_n = 1/\mu_n$ ce qui donne le résultat attendu.

Pour montrer la convergence uniforme (et pas normale !), il faut normalement utiliser la théorie des espaces de Sobolev esquissée par exemple dans l'exercice 2 de la feuille de TD numero 5). On commence par introduire un nouveau produit scalaire sur l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ nulles au bord (vérifier que ça en est bien un !) défini par

$$[f,g] \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 k(x)\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x}\,dx, \quad \forall f, g.$$

Maintenant on calcule, en intégrant par parties et en utilisant (IV.12)

$$\begin{aligned}
[e_n, e_m] &= \int_0^1 k(x)\frac{\partial e_n}{\partial x}\frac{\partial e_m}{\partial x}\,dx,\\
&= -\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial e_n}{\partial x}\right)e_m\,dx\\
&= \mu_n \int_0^1 e_n e_m\,dx\\
&= \mu_n\langle e_n, e_m\rangle\\
&= \mu_n \delta_{n,m}.
\end{aligned}$$

Autrement dit, la famille $(e_n)_n$ est orthogonale pour ce nouveau produit scalaire $[\cdot,\cdot]$. On va maintenant montrer que la suite des sommes partielles

$$S_N = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\mu_n}\langle f, e_n\rangle e_n,$$

est de Cauchy dans cet espace préhilbertien (la norme est noté $|\cdot|$). On utilise le théorème de Pythagore

$$\begin{aligned}
|S_N - S_{N+p}|^2 &= \sum_{n=N+1}^{N+p}\frac{1}{\mu_n^2}\langle f, e_n\rangle^2 |e_n|^2\\
&= \sum_{n=N+1}^{N+p}\frac{1}{\mu_n}\langle f, e_n\rangle^2\\
&\leq \frac{1}{\mu_{N+1}}\sum_{n=N+1}^{N+p}\langle f, e_n\rangle^2\\
&\leq \frac{1}{\mu_{N+1}}\|f\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Dans la théorie des espaces de Sobolev, ceci implique que la série converge dans $W^{1,2}(]0,1[)$ mais nous allons nous passer de cette théorie ici en se contentant de remarquer que si $g \in \mathcal{C}^1([0,1])$ et nulle au bord, alors nous avons avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|g(y)| \leq \left| \int_0^y \frac{\partial g}{\partial x}\, dx \right| \leq \sqrt{y} \left\| \frac{\partial g}{\partial x} \right\|_{L^2} \leq \frac{1}{\sqrt{\inf k}} |g|, \ \ \forall y \in [0,1],$$

et donc

$$\|g\|_{L^\infty} \leq C_k |g|.$$

En appliquant ceci à $g = S_N - S_{N+p}$, nous déduisons donc

$$\|S_N - S_{N+p}\|_\infty \leq \frac{C_k}{\sqrt{\mu_{N+1}}} \|f\|_{L^2},$$

et la suite $(S_N)_N$ converge donc uniformément sur $[0,1]$. Sa limite ne peut être que u (par unicité de la limite dans L^2). ■

Dans le cas où le coefficient k est constant égal à 1, on peut vérifier que les éléments propres sont donnés par

$$e_n(x) = \sqrt{2}\sin(n\pi x),$$

$$\mu_n = n^2\pi^2,$$

et on retrouve donc la théorie de Fourier dans ce contexte.

VI.2 Le problème de la chaleur associé

En s'inspirant de l'exercice 4 du TD6, on peut ainsi proposer une méthode pour résoudre, dans le cas d'un coefficient k général, le problème d'évolution en temps (la solution dépend de deux variables) suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right), \ \ \forall t > 0, \forall x \in]0,1[, \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, \ \ \forall t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x), \ \ \text{pour presque tout } x \in]0,1[. \end{cases}$$

Pour ce faire, on prend la base hilbertienne $(e_n)_n$ construite au paragraphe précédent et, pour toute donnée initiale $u_0 \in L^2(]0,1[)$ (ou continue si on veut ...) on écrit la décomposition

$$u_0 = \sum_{n\geq 1} \langle u_0, e_n\rangle e_n,$$

puis on définit pour tout $t > 0$

$$u(t) = \sum_{n\geq 1} e^{-\mu_n t} \langle u_0, e_n\rangle e_n.$$

On vérifie que, pour tout $t > 0$, la série proposée est convergente dans L^2 et dans $\mathcal{C}^0([0,1])$, et donc que, $u(t)$ est une fonction continue de la variable x qui, de surcroît, vérifie

$$u(t,0) = u(t,1) = 0.$$

De plus, on montre que

$$\|u(t) - u_0\|_{L^2} \xrightarrow[t\to 0]{} 0.$$

On applique ensuite le théorème de dérivation par rapport au paramètre t des séries de fonctions pour établir que la fonction u est dérivable par rapport à t et que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = -\sum_{n\geq 1} \mu_n e^{-\mu_n t} \langle u_0, e_n\rangle e_n(x),$$

la convergence étant uniforme sur $]0,1[$, à $t > 0$ fixé.

Ceci montre finalement que, pour tout $t > 0$, on a

$$T\left(\frac{\partial u}{\partial t}(t)\right) = u(t),$$

ce qui signifie exactement que u est solution de l'équation aux dérivées partielles proposée.

Bibliographie

[1] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications].

[2] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011.

[3] Antoine Chambert-Loir and Stéphane Fermigier. *Exercices de Mathématiques pour l'agrégation. Analyse 3*. Masson, 1996.

[4] Philippe G. Ciarlet. *Linear and nonlinear functional analysis with applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 2013.

[5] Jean-Pierre Demailly. *Analyse Numérique et équations différentielles*. Collection Grenoble Sciences. Presses Universitaires de Grenoble, 1991.

[6] S. Gonnord and N. Tosel. *Thèmes d'Analyse pour l'Agrégation, Tome 1 : Topologie et Analyse fonctionnelle*. Ellipses, 1996.

[7] Xavier Gourdon. *Les maths en tête, mathématiques pour M', Analyse*. Ellipses, 1994. 416 pages.

[8] Walter Rudin. *Analyse fonctionnelle*. Édiscience international, 1995.

[9] C. Zuily and H. Queffélec. *Eléments d'analyse pour l'agrégation*. Agrégation de Mathématiques. Masson, Paris, 1995.