Contrôle Continu
HAX705X

10 novembre 2021

Il sera tenu compte de la clarté et de la précision de la rédaction.

Durée : 1h30

1. Questions isolées (10 points)

a. Soit (X, d) un espace métrique compact. Montrer qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X est convergente si et seulement si elle ne possède qu'une seule valeur d'adhérence. Montrer que cette propriété n'est plus valable sans l'hypothèse de compacité.

b. On désigne par $X \subset \ell_\infty$ le sous-ensemble formé des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant $|u_k| \le \frac{1}{k+1}, \forall k \in \mathbb{N}$. Montrer que X est une partie compacte de l'espace de Banach ℓ_∞.

c. Soit $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes qui converge uniformément vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[0, 1]$. Construire une suite de polynômes qui converge uniformément vers la fonction $x \mapsto |x|$ sur l'intervalle $[-2, 2]$.

d. Montrer que la suite de fonctions continues

$$g_n(x) = n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(xt)}{1+nt}dt, \quad x \in [0, 1], \quad n \in \mathbb{N}.$$

admet une sous suite uniformément convergente dans $C([0, 1])$. *On utilisera le théorème d'Ascoli.*

2. Exercice 1 (6 points)

(1) Soit $f \in C([0, \pi])$ telle que $\int_0^\pi f(t)\cos(nt)dt = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$. Montrer que f est identiquement nulle.

(2) Soit $V \subset C([-\pi, \pi])$ le sous-espace vectoriel formé des fonctions satisfaisant les relations : $\int_{-\pi}^\pi f(t)\cos(nt)dt = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$. Soit $W \subset C([-\pi, \pi])$, le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions $t \mapsto \cos(nt), n \in \mathbb{N}$.

— Déterminer l'adhérence de W dans $(C([-\pi, \pi]), \| - \|_\infty)$.

— Déterminer V.

3. Exercice 2 (6 points)

Soit ℓ_∞ l'espace vectoriel des suites réelles bornées. On considère sur ℓ_∞ les normes suivantes : $\|u\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |u_k|$, $N_1(u) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^k}|u_k|$ et $N_2(u) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^k}|u_k|$.

(1) Est-ce que les normes N_1 et N_2 sont équivalentes sur ℓ_∞ ?

(2) Est-ce que les normes N_1 et $\| - \|_\infty$ sont équivalentes sur ℓ_∞ ?

(3) Est-ce que (ℓ_∞, N_1) est un espace de Banach ? *On pourra utiliser le théorème de l'application ouverte.*