HAX705X

Correction du CC du 10 novembre 2021

1. Questions isolées

a. Soit (X, d) un espace métrique compact. Montrer qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X est convergente si et seulement si elle ne possède qu'une seule valeur d'adhérence. Montrer que cette propriété n'est plus valable sans l'hypothèse de compacité.

Voir la correction de l'exercice 16.a.

b. On désigne par $X \subset \ell_\infty$ le sous-ensemble formé des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant $|u_k| \le \frac{1}{k+1}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Montrer que X est une partie compacte de l'espace de Banach ℓ_∞.

Soit $(U^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X. Posons $U^n = (U^n_k)_{k\in\mathbb{N}}$:

$$|U^n_k| \le \tfrac{1}{k+1}, \quad \forall k, n \in \mathbb{N}.$$

On va utiliser le procédé diagonal de Cantor :

(1) Pour $k = 0$, la suite $(U^n_0)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à l'intervalle $[-1, 1]$. Alors il existe une sous suite $(U^{\varphi_0(n)}_0)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers $U^\infty_0 \in [-1, 1]$.

(2) Pour $k = 1$, la suite $(U^{\varphi_0(n)}_1)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Alors il existe une sous suite $(U^{\varphi_0\circ\varphi_1(n)}_1)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers $U^\infty_1 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

(3) $\cdots$

(4) Supposons donnés $\varphi_0, \dots, \varphi_m$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} U^{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_m(n)}_j = U^\infty_j \in [-\tfrac{1}{j+1}, \tfrac{1}{j+1}]$$

pour tout $j \in \{0, \dots, m\}$. La suite $(U^{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_m(m)}_{m+1})_{m\in\mathbb{N}}$ appartient à l'intervalle $[-\frac{1}{m+2}, \frac{1}{m+2}]$. Alors il existe une sous suite $(U^{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_m\circ\varphi_{m+1}(n)}_{m+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers $U^\infty_{m+1} \in [-\frac{1}{m+2}, \frac{1}{m+2}]$.

On considère alors l'application strictement croissante $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par la relation

$$\psi(n) = \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(n).$$

On voit que

$$\lim_{n\to\infty} U^{\psi(n)}_j = U^\infty_j \in [-\tfrac{1}{j+1}, \tfrac{1}{j+1}]$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$. D'autre part $|U^{\psi(n)}_j - U^\infty_j| \le \frac{2}{j+1}$, $\forall n, j \in \mathbb{N}$. Cela permet de voir que la suite $(U^{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $U^\infty = (U^\infty_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dans ℓ_∞.

c. Soit $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes qui converge uniformément vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[0, 1]$. Construire une suite de polynômes qui converge uniformément vers la fonction $x \mapsto |x|$ sur l'intervalle $[-2, 2]$.

Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$|P_n(x) - \sqrt{x}| \le \epsilon, \quad \forall n \ge N,\ \forall x \in [0, 1].$$

Posons $x = t^2$ avec $t \in [-1, 1]$. Alors

$$|P_n(t^2) - |t|| \le \epsilon, \quad \forall n \ge N,\ \forall t \in [-1, 1].$$

Posons $t = \frac{s}{2}$ avec $s \in [-2,2]$. Alors

$$|2P_n(\tfrac{s^2}{4}) - |s|| \leq 2\epsilon, \quad \forall n \geq N,\ \forall s \in [-2,2].$$

Conclusion : la suite de polynômes $(2P_n(\frac{x^2}{4}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $x \mapsto |x|$ sur l'intervalle $[-2,2]$.

d. Montrer que la suite de fonctions continues

$$g_n(x) = n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(xt)}{1+nt}dt, \quad x \in [0,1], \quad n \in \mathbb{N}.$$

admet une sous suite uniformément convergente dans $C([0,1])$.

Nous allons utiliser le critère donné par le théorème d'Ascoli : d'une part il faut s'assurer que pour tout $x \in [0,1]$, la suite $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$, et d'autre part il faut vérifier que la famille $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue sur $[0,1]$.

Pour tout $(t,x) \in [0,\frac{\pi}{2}] \times [0,1]$, on a $\sin(xt) \geq 0$. Ainsi

$$0 \leq n\frac{\sin(xt)}{1+nt} \leq \frac{\sin(xt)}{t}$$

pour tout $(t,x) \in [0,\frac{\pi}{2}] \times [0,1]$. Après intégration on obtient :

$$0 \leq g_n(x) \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(xt)}{t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}x} \frac{\sin(t)}{t}dt, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [0,1].$$

Le premier point a été vérifié.

Le théorème des valeurs intermédiaire nous assure que $|\sin(xt) - sin(yt)| \leq t|x-y|, \forall t \geq 0, \forall x,y \in \mathbb{R}$. Cela donne

$$|g_n(x) - g_n(y)| \leq n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(xt) - \sin(yt)|}{1+nt}dt \leq |x-y|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{nt}{1+nt}dt \leq \frac{\pi}{2}|x-y|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Cette dernière inégalité nous permet de conclure que la famille $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue sur $[0,1]$.

2. Exercice 1

(1) Soit $f \in C([0,\pi])$ telle que $\int_0^\pi f(t)\cos(nt)dt = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Montrer que f est identiquement nulle.

(2) Soit $V \subset C([-\pi,\pi])$ le sous-espace vectoriel formé des fonctions satisfaisant les relations : $\int_{-\pi}^\pi f(t)\cos(nt)dt = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Soit $W \subset C([-\pi,\pi])$, le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions $t \mapsto \cos(nt), n \in \mathbb{N}$.

— Déterminer l'adhérence de W dans $(C([-\pi,\pi]), \|-\|_\infty)$.

— Déterminer V.

(1) Soit $A \subset C([0,\pi])$ le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions $t \mapsto \cos(nt), n \in \mathbb{N}$. Le sous-espace vectoriel A est stable par rapport à la multiplication de fonctions et il contient la fonction constante égale à 1 : A est une sous-algèbre unitaire de $C([0,\pi])$. Comme $t \mapsto \cos(t)$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[0,\pi]$, on voit que A est séparante. D'après le théorème de Stone-Weierstrass on peut conclure que A est dense dans $(C([0,\pi]), \|-\|_\infty)$.

Les relations $\int_0^\pi f(t)\cos(nt)dt = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ entrainent que $\int_0^\pi f(t)g(t)dt = 0$ pour tout $g \in A$. Considérons une suite (g_n) de A convergente uniformément vers f. Alors $\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi f(t)g_n(t)dt = \int_0^\pi f(t)^2dt$. Comme $\int_0^\pi f(t)g_n(t)dt = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, on obtient $\int_0^\pi f(t)^2dt = 0$ et donc $f = 0$ (car f est continue).

(2) Soit $E \subset C([-\pi,\pi])$ le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions $t \mapsto \cos(nt), n \geq 0$ et $t \mapsto \sin(nt), n \geq 1$. On sait que l'adhérence de E dans $C([-\pi,\pi])$ est égal au sous espace vectoriel $\bar{E} := \{f \in C([-\pi,\pi]), f(\pi) = f(-\pi)\}$.

On remarque que pour tout $g \in E$, la fonction $\mathcal{P}(g)(x) = \frac{1}{2}(g(x)+g(-x))$ appartient à $W = \mathrm{vect}\{cos(nt), n \geq 0\}$. D'autre part si $(g_n) \in E$ converge uniformément vers $g \in C([-\pi,\pi])$ alors $\mathcal{P}(g_n) \in W$ va converger uniformément vers $\mathcal{P}(g)$ (qui est une fonction paire). On voit alors que l'adhérence de W dans $(C([-\pi,\pi]), \|-\|_\infty)$ est égale à

$$\mathcal{P}(\bar{E}) = \{f \in C([-\pi,\pi]), f(-x) = f(x), \forall x\}.$$

Soit $f \in V$: on a $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ ce qui implique $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt = 0,\ \forall g \in W$ et ensuite par densité

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt = 0,\ \forall g \text{ fonction paire.}$$

Cette dernière relation est équivalente à demander que f soit impaire.

Conclusion : $V = \{f \in C([-\pi,\pi]), f(-x) = -f(x), \forall x\}$.

3. Exercice 2

Soit ℓ_∞ l'espace vectoriel des suites réelles bornées. On considère sur ℓ_∞ les normes suivantes : $\|u\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |u_k|$, $N_1(u) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^k}|u_k|$ et $N_2(u) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^k}|u_k|$.

(1) Est-ce que les normes N_1 et N_2 sont équivalentes sur ℓ_∞ ?

(2) Est-ce que les normes N_1 et $\|-\|_\infty$ sont équivalentes sur ℓ_∞ ?

(3) Est-ce que (ℓ_∞, N_1) est un espace de Banach ? *On pourra utiliser le théorème de l'application ouverte.*

(1) et (2). On voit tout de suite que

$$(\star) \qquad N_2(u) \leq N_1(u) \leq 2\|u\|_\infty, \qquad \forall u \in \ell_\infty.$$

On montre qu'aucune de ces normes ne sont équivalentes en considérant les suites suivantes $U^n = (U^n_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$: $U^n_k = 2^k$ si $k \leq n$ et $U^n_k = 0$ si $k > n$.

Un calcul direct donne $\|U^n\|_\infty = 2^n$, $N_1(U^n) = n+1$ et $N_2(U^n) = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cela permet de voir que

a) $\sup_{U\neq 0} \frac{N_1(U)}{N_2(U)} = +\infty$: N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.

b) $\sup_{U\neq 0} \frac{\|U\|_\infty}{N_1(U)} = +\infty$: $\|-\|_\infty$ et N_1 ne sont pas équivalentes.

(3) Considérons l'application linéaire bijective $Id : (\ell_\infty, \|-\|_\infty) \to (\ell, N_1), x \mapsto x$. L'inégalité de droite dans $(\star)$ montre que Id est continue. Si (ℓ_∞, N_1) était un espace de Banach, on pourrait appliquer le théorème de l'application ouverte et conclure que l'application réciproque $Id^{-1} : (\ell_\infty, N_1) \to (\ell, \|-\|_\infty), x \mapsto x$ est continue. Cela entrainerait que $\|Id^{-1}\| = \sup_{U\neq 0} \frac{\|U\|_\infty}{N_1(U)}$ est fini, ce qui est faux.

Conclusion : (ℓ_∞, N_1) n'est pas complet.