HA8301 : Math pour PEIP
Planche TD 3 : Séries

Exercice 1 (*cos* et *sin*, exercice complexe) Soit θ un nombre réel,

1. Montrer que la série $\sum \frac{e^{in\theta}}{2^n}$ converge et calculer sa somme
2. En déduire la nature et, si convergence, la somme des séries de termes généraux $\frac{cos(n\theta)}{2^n}$ et $\frac{sin(n\theta)}{2^n}$.

Exercice 2 (Limite par calcul explicite) On considére la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que $\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{a}{2n+1} + \frac{b}{2n+3}$.
2. On pose $u_n = 1/(2n+1)$, montrer que $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2}(u_0 - u_{N+1})$.
3. En déduire la convergence et la valeur de $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$.

Exercice 3 (Critère de négligeabilité, comparaison avec les séries de Riemman)

1. Soit u_n une suite positive tel que il existe A, B avec $u_n \leq An^B$, montrer que la série de terme géneral $e^{-n}u_n$ converge.
2. En fonction de β réel, discuter la nature de la série de terme général

$$(n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^\beta}$$

Exercice 4 (Séries de Bertrand) On s'intéresse à la convergence des séries $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha ln(n)^\beta}$.

1. On suppose $\alpha < 1$, montrer qu'il existe $\delta < 1$ tel que $\frac{1}{n^\delta} = o(\frac{1}{n^\alpha ln^\beta(n)})$. En déduire que la série diverge.
2. On suppose $\alpha > 1$, montrer qu'il existe $\delta > 1$ tel que $\frac{1}{n^\alpha ln^\beta(n)} = o(1/n^\delta)$. En déduire que la série converge.
3. On suppose que $\alpha = 1$, montrer, en comparant avec une intégrale, que la série converge si et seulement si $\beta \geq 1$.

Exercice 5 (Bète et méchant) Nature des séries de terme général u_n dans les cas suivants :

1. $u_n = \frac{\sqrt{n}}{1+n^2}$

2. $u_n = \frac{cosh(n)}{cosh(2n)}$
3. $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$
4. $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

Exercice 6 (Cauchy, D'Alembert...) Déterminer la nature des séries de terme général u_n lorsque :

1. $u_n = \frac{n!}{2^n+1}$
2. $u_n = \frac{(n+1)^2}{n^n}$
3. $u_n = \frac{n^{ln(n)}}{n!}$
4. $u_n = \frac{(n!)^2}{2n!}$

Exercice 7 ("Séries entières" for dummies) Soit v_n une suite strictement positive telle que $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ tende vers l et soit a un réel positif, on pose $u_n = a^n v_n$.

1. Déterminer la limite en $+\infty$ de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.
2. En déduire que si $l \neq 0$, la série $\sum u_n = \sum a^n v_n$ converge pour tout $a < 1/l$. Montrer que c'est aussi le cas si $l = 0$.
3. Soit z un nombre complexe, on suppose que $l \neq 0$ et que $|z| < 1/l$, montrer que $\sum v_n z^n$ converge. (Gardez ce résultat en mémoire, on y reviendra......)

Exercice 8 (Un contre exemple (à quoi ?)) Soit $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

1. Montrer que u_n et v_n sont équivalentes au voisinage de l'infini.
2. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.
3. On pose $w_n = v_{2n} + v_{2n+1}$, $S_n = \sum_{p=0}^{n} v_n$ et $T_n = \sum_{p=0}^{n} w_n$,
   (a) Exprimer T_n en fonction de S_n.
   (b) En déduire que si S_n converge, T_n converge.
   (c) Donner un équivalent en $+\infty$ de w_n.
   (d) En déduire la nature des séries $\sum w_n$ et $\sum v_n$.
4. Avez vous un commentaire ....?

Exercice 9 (For Beginners) Montrer que les séries de terme général u_n convergent lorsque

1. $u_n = cos(n)e^{-n}$.
2. $u_n = \frac{(-1)^{5n^2+3}}{n^2}$.
3. $u_n = \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 1$.
4. $u_n = \frac{f(n)}{n} ln(1 + 1/n)$ où f est une fonction bornée de $[0, \infty[$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 10 (Convergence absolue...ou pas) Soit $\alpha > 0$, déterminer les nombres complexes non nuls z tels que la série de terme général $u_n = \frac{n^\alpha}{z^n}$ converge. En déduire que la série de terme géneral $u_n = \frac{n^2}{(1+i)^n}$ converge. Que se passe-t-il si $\alpha \leq 0$?

Exercice 11 (Séries alternées) Etudier la convergence des séries de terme général u_n lorsque :

1. $u_n = \frac{(-1)^n}{ln(n)}$
2. $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+n}$
3. $u_n = (-1)^n e^{-n}$
4. $u_n = (-1)^n cos(n)$

Exercice 12 (Série alternée "cachée") Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \sin((1/n+n)\pi)$

Exercice 13 (La fonction ζ alternée) Déterminer l'ensemble des réels α pour lesquels la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.

Exercice 14 (Application du critère d'Abel) Soit u_n une suite complexe telle que $\sum u_n$ converge et $\sum |u_{n+1} - u_n|$ converge, montrer que $\sum u_n^2$ converge. Montrer que si u_n est positive, on peut se passer de la condition $\sum |u_{n+1} - u_n|$ converge. Donner un exemple d'une suite u_n telle que $\sum u_n$ converge et $\sum u_n^2$ diverge.