Université Montpellier - L2 - HA8301
Planche TD 2 : Suites

Exercice 1 (Utilisation de la définition) Dans chacun des cas suivants, démontrer que (u_n) tend vers l :

1. $u_n = 1/n$, $l = 0$.
2. $u_n = 1/ln(n) + 1$, $l = 1$.
3. $u_n = e^{-n} - 1$, $l = -1$.

Exercice 2 (Limite et continuité) Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue et (u_n) une suite à valeur dans I qui converge vers $l \in I$. Montrer que $f(u_n)$ converge vers $f(l)$. *La réciproque, plus difficile, est vraie*

Exercice 3 (Calcul de limites) Calculer les limites de la suite (u_n) dans les cas suivants :

1. $u_n = \frac{an+b}{cn+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.
2. $u_n = \frac{n-1}{n^2+1}$.
3. $u_n = e^{\frac{n-1}{n+1}}$.
4. $u_n = ln(1 + 1/n)$.

Exercice 4 (Nombres réels et nombres rationnels) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $u_n = \frac{E(10^n \alpha)}{10^n}$, où E est la fonction partie entière.

1. Montrer que $\lim u_n = \alpha$.
2. En déduire que tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels.

Exercice 5 (Limite et récurrence) Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to I \subset \mathbb{R}$ une application continue et u_n la suite définie par $u_0 = \alpha \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On suppose que u_n converge vers $l \in I$, montrer que $l = f(l)$.
2. On suppose que $f(x) = \sqrt{x}$ définie sur $I = [0, 1]$, et $\alpha = 1/2$.
   (a) Montrer que (u_n) est croissante. En déduire que (u_n) converge.
   (b) Déterminer $\lim u_n$.

Exercice 6 (Suites extraites et convergence) Soit (u_n) une suite

1. Soit ϕ_1 et ϕ_2 deux applications strictement croissantes de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que $\phi_1(\mathbb{N}) \cup \phi_2(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, montrer que u_n tend vers l si et seulement les suites extraites $u_{\phi_1(n)}$ et $u_{\phi_2(n)}$ convergent vers l. Généraliser au cas de p suites extraites.
2. Montrer que la suite $u_n = (-1)^n$ diverge (i.e. ne converge pas).
3. On dit qu'une suite u_n est périodique si il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout n, $u_{n+p} = u_n$. Montrer que u_n converge si et seulement si u_n est constante. Déterminer les entiers p, q tels que $e^{i\frac{p\pi}{q}n}$ converge.

Exercice 7 ($cos(n)$) On s'intéresse à la suite $u_n = cos(n)$

1. Exprimer $(cos(n+1) + cos(n))^2$ en fonction de $cos(2n+1)$ et $cos(n)^2$ en fonction de $cos(2n)$.
2. Montrer que la suite $u_n = cos(n)$ diverge.
3. Montrer que la suite $cos(n)$ possède une sous-suite convergente (Question subsidiaire infaisable: Trouver explicitement une telle sous-suite)

Exercice 8 (La série harmonique) On considére la suite $u_n = \sum_{i=1}^{n} 1/i = 1 + 1/2 + \ldots + 1/n$ définie pour $n \geq 1$.

1. Montrer que $u_{2n} - u_n \geq 1/2$.
2. En déduire que u_n diverge.

Exercice 9 (Le théorème du point fixe) Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to I$ une fonction telle qu'il existe $k < 1$ tel que pour tout $x, y \in I$, $|f(y) - f(x)| \leq k|x - y|$ et $\alpha \in I$. On définit (u_n) par $u_0 = \alpha$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer, par exemple par récurrence, que $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$.
2. Calculer $\sum_{i=0}^{p-1} u_{n+i+1} - u_{n+i}$. En déduire que $|u_{n+p} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0| \sum_{i=0}^{p-1} k^i$.
3. Calculer $\sum_{i=0}^{p-1} k^i$.
4. Montrer que $|u_{n+p} - u_n| \leq \frac{k^n}{1-k} |u_1 - u_0|$.
5. Montrer que (u_n) converge, on notera l sa limite.
6. Montrer que f est continue.
7. Montrer que l'équation $f(x) = x$ a une solution.