Université Montpellier II - L2 - HA8301
Feuille TD 1

Exercice 1 Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide et majorée, montrer que $S = sup(A)$ si et seulement si

1. Pour tout $x \in A$, $x \leq S$.
2. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in A$ tel que $S - \varepsilon < x \leq S$.

Exercice 2 Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$ telles pour tous $x \in A$, $y \in B$, $x \leq y$. Montrer que $sup(A) \leq inf(B)$. On rappelle que $inf(B) = -sup(-B)$ est le plus grand des minorants de B.

Exercice 3 Déterminer $sup(A)$ dans les cas suivants :

1. A est un intervalle (a, b) (ouvert ou fermé en a et b).
2. $A = \{1 - 1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$.
3. $A = \{\frac{E(n\alpha)}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$ où α est un réel quelconque.

Exercice 4

1. Montrer que le produit de deux fonctions en escalier est une fonction en escalier ; ind : s'inspirer de la preuve pour la somme.
2. Donner un exemple de deux fonctions en escalier positives f, g telles que $\int_0^1 f(t)g(t)dt \neq \int_0^1 f(t)dt \int_0^1 g(t)dt$.

Exercice 5 La fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(0) = 1$ et $f(x) = n$ si $x \in]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ est-elle en escalier sur $[0,1]$? Même question avec la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(0) = 1$ et $f(x) = 1$ si $x \in]1/(n+1), 1/n]$.

Exercice 6 Soient f, g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$ telles que l'ensemble $\{f \neq g\}$ soit fini, montrer que $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b g(t)dt$.

Exercice 7 Montrer que la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ (resp. $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$) n'est pas intégrable sur $[0,1]$.

Exercice 8 Montrer que la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$, $f(x) = 1/q$ si $x = p/q \in \mathbb{Q}$ avec p et q premiers entre eux est intégrable et calculer $\int_0^1 f(t)dt$; ind : on pourra utiliser l'exercice 6.

Exercice 9 Pour $n > 0$ entier, considère la fonction $h_n = 2n\mathbb{1}_{[-1/n,1/n]}$ définie sur $[-1,1]$.

1. Montrer que h_n est en escalier et calculer $\int_{-1}^1 h_n(t)dt$.
2. Pour f continue sur $[-1,1]$, on pose $I_n = \int_{-1}^1 f(h)h_n(t)dt$, montrer que I_n tend vers $f(0)$.

Exercice 9 Déterminer les primitives des fonctions f suivantes sur les domaines où elles existent :

$f(x) = 1/x$; $f(x) = ln(x)$; $f(x) = lx(x)/x$; $f() = 1/(1-x^2)$; $f(x) = 1/(x-a)$; $f(x) = 1/(x^2+ax+b)$ avec $a^2-4b<0$.

Exercice 10

1. Soit $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$ avec P polynôme, montrer que les primitives de f sont de la forme $Q(x)e^{\alpha x} + C$ avec Q polynôme tel que $deg(Q) = deg(P)$.
2. Soit $f(x) = P(e^{\alpha x})/Q(e^{\alpha x})$, montrer que $\int f(t)dt = \int \frac{P(u)}{\alpha Q(u)u}du$.

Exercice 11 Pour f, g intégrables sur $[0, 2\pi]$ (à valeurs complexes), on pose $H(f,g) = \frac{1}{2\pi}\int f(t)\overline{g}(t)dt$.

1. Montrer que, pour f, g, h intégrables et $\lambda \in \mathbb{C}$, $H(f,g) = \overline{H(g,f)}$, que $H(f+\lambda g, h) = H(f,h) + \lambda H(g,h)$, $H(f, g+\lambda h) = H(f,g) + \overline{\lambda}H(f,h)$.
2. Montrer $H(h,h) \geq 0$ et que, si f est continue, $H(f,f) = 0$ si et seulement si $f = 0$.
3. Montrer que $Re(H(f,g)) = 0$ si et seulement si $H(f+g, f+g) = H(f,f) + H(g,g)$.
4. Calculer $H(e_p, e_q)$ où $e_p(t) = e^{ipt}$.
5. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose $c_n = H(f, e_n)$ et $P_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k$
   (a) Calculer $H(P_n, P_n)$.
   (b) Calculer $H(f, P_n)$, puis $H(f - P_n.P_n)$.
   (c) En déduire que pour tout n, $\sum_{-n}^{n} |c_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$ (inégalité de Bessel).

Exercice 12

1. Montrer que la fonction $h = \mathbb{1}_{[0,\infty[}$ n'admet pas de primitive. De manière génerale, montrer que si f est une fonction sur $[a,b]$ telle que il existe $x_0 \in]a,b[$ avec
$$lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq lim_{x \to x_0^+} f(x)$$
alors f n'a pas de primitive.
2. Montrer que la fonction définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = 2xsin(1/x) - cos(1/x)$ pour $x \neq 0$ n'est pas continue en 0, mais que $F(x) = x^2 sin(1/x)$ est une primitive de f.