$$\theta = \int_0^1 e^{-x} \sin^2(x)\, dx$$

1

1) $\widehat{\theta}_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} e^{-X_i} \sin^2(X_i)$

où $X_1, \ldots, X_N \overset{iid}{\sim} U_{[0,1]}$

$\widehat{\theta}_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{[0,1]}(X_i) \sin^2(X_i)$

où $X_1, \ldots, X_N \overset{iid}{\sim} Exp(1)$

2) $\mathbb{E}(\widehat{\theta}_1) = \mathbb{E}(\widehat{\theta}_2) = \theta$

$\mathbb{V}(\widehat{\theta}_1) = \frac{1}{N}\left(\mathbb{E}_{U_{[0,1]}}\left[e^{-2X} \sin^4(X)\right] - \theta^2 \right)$

$\mathbb{V}(\widehat{\theta}_2) = \frac{1}{N}\left(\mathbb{E}_{Exp(1)}\left(\mathbb{1}_{[0,1]}(X) \sin^4(X)\right) - \theta^2 \right)$

(2)

Il s'agit de comparer

$a = \int_0^1 e^{-2x} \sin^4(x)\,dx$ et

$b = \int_0^1 e^{-x} \sin^4(x)\,dx$

Clairement, $a < b$ et donc

$\mathbb{V}(\hat{\theta}_1) \leq \mathbb{V}(\hat{\theta}_2)$.

3) On prend $\hat{\theta}_1$.

On cherche la plus petite valeur de N telle que

$$\mathbb{P}\left(\frac{|\hat{\theta}_1 - \theta|}{|\theta|} \leq 0.01\right) \geq 0.99$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebyshev nous avons

$$\mathbb{P}\left(\frac{|\hat{\theta}_1 - \theta|}{|\theta|} \leq 10^{-2} \right) \geq 1 - \frac{\mathbb{V}(\hat{\theta}_1)}{\theta^2 10^{-4}}$$

Et

$$1 - \frac{\mathbb{V}(\hat{\theta}_1)}{\theta^2 10^{-4}} \geq 1 - 10^{-2}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\mathbb{V}(\hat{\theta}_1)}{\theta^2} \leq 10^{-6}$$

$$\Longleftrightarrow N \geq 10^6 \left[\frac{\int_0^1 e^{-2x} \sin^4(x)\, dx}{\theta^2} - 1 \right]$$

$$\theta = \int_0^1 e^{-x} \sin^2(x)\, dx \quad \forall \varepsilon > 0 \text{ et } \varepsilon < 1$$

$$> \int_\varepsilon^1 e^{-x} \sin^2(x)\, dx > \sin^2(\varepsilon)\left[e^{-\varepsilon} - e^{-1}\right]$$

On pourrait optimiser en ε mais on prend $\varepsilon = \frac{1}{2}$ qui est une valeur raisonnable (voir contre)

Finalement,

$$\frac{1}{\theta^2} < \sin^{-4}\left(\frac{1}{2}\right)\left(e^{-\frac{1}{2}} - e^{-1}\right)^{-2}$$

Et,

$$\left(\frac{\int_0^1 \sin^4(x)\, e^{-2x}\, dx}{\theta^2} - 1\right)$$

$$\leq \left(\frac{1}{2}\right)\left(1 - e^{-2}\right)\sin^{-4}\left(\frac{1}{2}\right)\left(e^{-\frac{1}{2}} - e^{-1}\right)^{-2} - 1$$

$$\# \; 142,68$$

$$\boxed{N \geq 10^6 \times 143}$$