1. Exercice 17.b

On considère les sous-ensembles $A = \operatorname{vect}\{\cos(kx), \sin(kx), k \in \mathbb{N}\}$, $B = \operatorname{vect}\{\cos(kx), k \in \mathbb{N}\}$ et $C = \operatorname{vect}\left\{\cos(x)^k, \sin(kx), k \in \mathbb{N}\right\}$.

Déterminer l'adhérence de A, B, C dans $(C([-\pi,\pi]), \|-\|_\infty)$ et dans $(C([0,\pi]), \|-\|_\infty)$

On remarque tout d'abord que $B = C$, donc ne doit étudier que les adhérences de A et B. D'autre part , on voit que $B = A \cap \mathcal{P}(\mathbb{R})$ où $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ désigne les fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

L'espace vectoriel $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ des fonctions continues 2π-périodiques s'identifie naturellement avec le sous espace vectoriel fermé

$$V = \left\{f \in C([-\pi,\pi]),\ f(\pi) = f(-\pi)\right\} \subset C([-\pi,\pi]).$$

L'intersection $C_{2\pi}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{P}(\mathbb{R})$ s'identifie lui au sous-espace vectoriel

$$W = \left\{f \in C([-\pi,\pi]),\ f(x) = f(-x)\ \forall x \in [0,\pi]\right\} \subset C([-\pi,\pi]).$$

D'après le théorème de Stone-Weiertrass, A est dense dans $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ (pour la norme $\|-\|_\infty$). Cela permet de voir que l'adhérence de A dans $C([-\pi,\pi])$, est égale à V. Cela entraine que l'adhérence de $B = A \cap \mathcal{P}(\mathbb{R})$ dans $C([-\pi,\pi])$, est égale à $W = V \cap \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

A et B sont des sous-algèbres unitaires de $C([0,\pi])$ qui séparent les points de $[0,\pi]$. Ainsi, d'après le théorème de Stone-Weiertrass, on sait que A et B sont tous les deux denses dans $C([0,\pi])$ pour la norme $\|-\|_\infty$.

Déterminer l'adhérence de A, B, C dans $(C([-\pi,\pi]), \|-\|_2)$ et dans $(C([0,\pi]), \|-\|_2)$

On remarque tout d'abord que V est un sous-espace vectoriel dense de $C([-\pi,\pi])$ pour la norme $\|-\|_2$. Comme $\|f\|_2 \leq \sqrt{2\pi}\|f\|_\infty, \forall f \in C([-\pi,\pi])$, et sachant que A est dense dans V pour la norme $\|-\|_\infty$, on peut conclure que A est dense dans $(C([-\pi,\pi]), \|-\|_2)$.

W est un sous-espace vectoriel fermé de $C([-\pi,\pi])$ pour la norme $\|-\|_2$ car W est égal à l'orthogonal (pour le produit scalaire) de $E = \left\{f \in C([-\pi,\pi]),\ f(-x) = -f(x)\ \forall x \in [0,\pi]\right\}$. Comme B est dense dans W pour la norme $\|-\|_\infty$, cela entraine que l'adhérence de B dans $(C([-\pi,\pi]), \|-\|_2)$ est égal à W.

Comme A et B sont tous les deux denses dans $C([0,\pi])$ pour la norme $\|-\|_\infty$, ils sont aussi denses dans $C([0,\pi])$ pour la norme $\|-\|_2$.

2. Exercice 18.b

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\{x\} = d(x,\mathbb{Z})$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{2^n x\}}{2^n}.$$

Montrer que f est une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$.

Les fonctions $f_n(x) = \frac{\{2^n x\}}{2^n}$ sont continues, 1-périodiques et $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{2^n}$. Comme $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty < +\infty$ on en déduit que $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est une fonction continue et périodique.

Calculer $f(2^{-p})$ pour $p \in \mathbb{N}$. Est-ce que f est dérivable en 0 ?

On remarque que $\frac{\{2^n 2^{-p}\}}{2^n}$ est nul si $n \neq p$, et vaut 2^{-p} si $n \leq p-1$. Ainsi $f(2^{-p}) = p2^{-p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et donc $\lim_{p\to\infty} \frac{f(2^{-p})-f(0)}{2^{-p}} = +\infty$. La fonction f n'est pas dérivable en 0.

Montrer que f est nulle part dérivable.

Comme f est 1-périodique, il suffit de montrer que f est nulle part dérivable sur $]0,1[$. Soit $x \in]0,1[$ et $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon_k}{2^k}$ son écriture diadique : $\epsilon_k \in \{0,1\}$, $\forall k \geq 1$ et de plus le sous-ensemble $I := \{k \geq 1, \epsilon_k = 0\}$ est infini [1].

On considère la fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\varphi(\mathbb{N}) = I$. On considère les suites

$$x_n = \sum_{k=1}^{\varphi(n)} \frac{\epsilon_k}{2^k} \quad \text{et} \quad y_n = x_n + \frac{1}{2^{\varphi(n)}}.$$

On remarque que $0 \leq x_n \leq x \leq y_n \leq 1$ pour tout $n \geq 1$. Nous avons

$$\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\{2^j y_n\} - \{2^j x_n\}}{2^{j-\varphi(n)}} = \sum_{j=1}^{\varphi(n)-1} \frac{\{2^j y_n\} - \{2^j x_n\}}{2^{j-\varphi(n)}}$$

car $2^j y_n$ et $2^j x_n$ sont des entiers naturels si $j \geq \varphi(n)$.

De plus $2^j x_n = \sum_{k=j+1}^{\varphi(n)} \frac{\epsilon_k}{2^{k-j}} + N_{j,n}$ avec $N_{j,n} \in \mathbb{N}$. Finalement, pour $j \leq \varphi(n) - 1$.

$$\frac{\{2^j y_n\} - \{2^j x_n\}}{2^{j-\varphi(n)}} = 2^{\varphi(n)-j} \left(\left\{ \sum_{k=j+1}^{\varphi(n)-1} \frac{\epsilon_k}{2^{k-j}} + \frac{1}{2^{\varphi(n)-j}} \right\} - \left\{ \sum_{k=j+1}^{\varphi(n)-1} \frac{\epsilon_k}{2^{k-j}} \right\} \right)$$

On vérifie que le terme de droite vaut 1 si $\epsilon_{j+1} = 0$ et -1 si $\epsilon_{j+1} = 1$.

On a montré que $\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n} = \sum_{j=1}^{\varphi(n)-1} (-1)^{\epsilon_{j+1}} = \sum_{j=2}^{\varphi(n)} (-1)^{\epsilon_j}$. Cela montre que la suite $\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}$ n'est pas convergente. Comme les suites (x_n) et (y_n) convergent vers x, tout en encadrant x, on aurait

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(x)$$

si f est dérivable en x. Conclusion : f n'est pas dérivable en x.

1. Cette condition assure l'unicité de l'écriture diadique. Par exemple, $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon_k}{2^k}$ avec $\epsilon_1 = 1$ et $\epsilon_k = 0, \forall k \geq 2$.