Correction de l'exercice 13, "Fonctions Höldériennes"

Soit $\alpha \in]0,1]$. On dit qu'une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est α-Höldérienne si il existe $K > 0$ pour lequel on a

$$(\star) \qquad |f(x) - f(y)| \le K|x-y|^\alpha, \quad \forall x, y \in [0,1].$$

La plus petite constante K vérifiant cette propriété est notée $|f|_\alpha$.

a. Montrer que toute fonction α-Höldérienne est uniformément continue.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction α-Höldérienne. Soit $\epsilon > 0$. On pose $\eta = (\frac{\epsilon}{K})^{1/\alpha}$ où la constante $K > 0$ est celle de $(\star)$. On voit alors que $\forall x, y \in [0,1], |x-y| \le \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \le \epsilon$. La fonction f est donc uniformément continue.

b. Montrer que $x \in [0,1] \mapsto \sqrt{x}$ est $\frac{1}{2}$-Höldérienne.

On voit que $\forall a, b \ge 0$, $\sqrt{a+b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Cela entraine que $\forall x, y \ge 0, |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \le \sqrt{|x-y|}$.

c. Soit $E_\alpha \subset C([0,1])$ le sous-espace vectoriel des fonctions α-Höldériennes. Montrer que $N_\alpha(f) = |f(0)| + |f|_\alpha$ détermine une norme sur E_α.

On voit tout d'abord que $N_\alpha(\lambda f) = |\lambda| N_\alpha(f)$ pour tout $(\lambda, f) \in \mathbb{R} \times E_\alpha$.

D'autre part, $N_\alpha(f) = 0$ implique que $f(0) = 0$ et que $|f|_\alpha = 0$. Cette dernière relation signifie que f est constante d'après $(\star)$. Ainsi $N_\alpha(f) = 0$ implique que $f = 0$.

L'inégalité triangulaire pour N_α découle des relations $|(f+g)(0)| \le |f(0)| + |g(0)|$ et $|f+g|_\alpha \le |f|_\alpha + |g|_\alpha$, valables pout tout $f, g \in E_\alpha$.

d. Montrer que (E_α, N_α) est un espace de Banach.

Soit (f_n) une suite de Cauchy de (E_α, N_α) : $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}$,

$$(1) \qquad p, q \ge N \Longrightarrow |f_p(0) - f_q(0)| \le \epsilon$$

et

$$(2) \qquad p, q \ge N \Longrightarrow |(f_p - f_q)(x) - (f_p - f_q)(y)| \le \epsilon |x-y|^\alpha, \quad \forall x, y \in [0,1].$$

L'implication (1) signifie que $(f_n(0))$ est une suite de Cauchy de réels. Notons $f(0)$ sa limite. Utilisons maintenant (2) avec $y = 0$: pour tout $x \in [0,1]$ on a

$$(3) \qquad p, q \ge N \Longrightarrow |f_p(x) - f_q(x)| \le |f_p(0) - f_q(0)| + \epsilon |x|^\alpha \le 2\epsilon.$$

L'implication (3) signifie que pour tout $x \in [0,1]$, $(f_n(x))$ une suite de Cauchy de réels. Notons $f(x)$ sa limite. A ce stade nous avons montré que (f_n) converge simplement vers une fonction f.

Maintenant nous faisons tendre q vers $+\infty$ dans (1) et (2). On obtient : $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}$,

$$p \ge N \Longrightarrow |f_p(0) - f(0)| \le \epsilon \quad \text{et} \quad |(f_p - f)(x) - (f_p - f)(y)| \le \epsilon |x-y|^\alpha, \quad \forall x, y \in [0,1].$$

La dernière implication entraine d'une part que $N_\alpha(f_p - f) \le 2\epsilon$ pour tout $p \ge N$, et d'autre part

$$|f(x) - f(y)| \le (\epsilon + N_\alpha(f_p))|x-y|^\alpha, \quad \forall x, y \in [0,1],$$

pour tout $p \ge N$. On a donc montré que (f_n) converge vers $f \in E_\alpha$.

e. Montrer que la boule unité de E_α est relativement compacte dans l'espace de Banach $C([0,1])$.

Notons $B = \{f \in E_\alpha, N_\alpha(f) \le 1\}$. Par définition nous avons

$$(4) \qquad |f(x) - f(y)| \le |x-y|^\alpha, \quad \forall x, y \in [0,1], \forall f \in B.$$

et

$$(5) \qquad |f(0)| \le 1, \quad \forall f \in B.$$

La relation (4) montre que B est une partie équicontinue de $C([0, 1])$. Ensuite (4) et (5) donnent

$$|f(x) \leq |f(0)| + |x|^{\alpha} \leq 2, \quad \forall x \in [0, 1], \forall f \in B.$$

Ainsi $\mathrm{ev}_x(B) = \{f(x), f \in B\} \subset \mathbb{R}$ est un sous-ensemble borné pour tout $x \in [0, 1]$.

D'après le Théorème d'Ascoli, on peut conclure que B est une partie relativement compacte de $C([0, 1])$.

Correction de l'exercice 16. a.

f. Soient X un espace métrique compact et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $C(X)$ qui converge simplement vers $f \in C(X)$. Montrer que la convergence est uniforme si et seulement si le sous-ensemble $\{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinu dans $C(X)$.

On commence avec la propriété suivante (qui est intéressante pour elle même).

Proposition : Soit K un compact d'un espace métrique Y. Une suite (f_n) d'éléments de K est convergente si et seulement si elle ne possède qu'une seule valeur d'adhérence.

Preuve : Un sens est immédiat : si (f_n) est convergente, elle ne possède qu'une seule valeur d'adhérence. Considérons maintenant une suite (f_n) d'éléments de K qui n'est pas convergente. Comme K est compact, il existe une sous-suite $(f_{\varphi(n)})$ convergente : posons $\ell = \lim_{n\to+\infty} f_{\varphi(n)}$. D'après notre hypothèse, la suite (f_n) ne converge pas vers ℓ : cela signifie qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $E := \{n \in \mathbb{N}, d(f_n, \ell) \geq \epsilon\}$ est une partie infinie de $\mathbb{N}$. Considérons l'application strictement croissante $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $E = \psi(\mathbb{N})$. Les termes de la sous-suite $(f_{\psi(n)})$ appartiennent au compact $K' = K \cap \{y \in Y, d(y, \ell) \geq \epsilon\}$. Ainsi, il existe une sous-suite $(f_{\psi\circ g(n)})$ de $(f_{\psi(n)})$ qui converge vers $\ell' \in K'$. On vient de montrer que la suite (f_n) admet deux valeurs d'adhérences distinctes ℓ et ℓ'. $\square$

Nous revenons maintenant à la preuve de l'exercice **16. a.**

Supposons tout d'abord que (f_n) converge uniformément vers f. Cela implique que f est continue. Comme X est compact, on sait d'après le théorème de Heine que f est uniformément continue : $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in X$,

$$(1) \qquad d(x, y) \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon.$$

La convergence uniforme permet d'affirmer que $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$,

$$(2) \qquad |f_p(x) - f(x)| \leq \epsilon, \quad \forall x \in X, \quad \forall p \geq N.$$

En utilisant la majoration

$$|f_p(x) - f_p(y)| \leq |f_p(x) - f(x)| + |f(x) - f(y)| + |f(y) - f_p(y)|$$

on voit que (1) et (2) impliquent que

$$d(x, y) \leq \eta \Longrightarrow |f_p(x) - f_p(y)| \leq 3\epsilon, \forall p \geq N.$$

Sachant que les fonctions $f_0, \cdots, f_{N-1}$ sont uniformément continues, il existe $\eta' > 0$ vérifiant

$$d(x, y) \leq \eta' \Longrightarrow |f_p(x) - f_p(y)| \leq 3\epsilon, \forall p \in \{0, \cdots, N-1\}.$$

On a finalement montré que $\forall \epsilon > 0, \exists \eta'' = \inf\{\eta, \eta''\} > 0, \forall x, y \in X$,

$$d(x, y) \leq \eta'' \Longrightarrow |f_p(x) - f_p(y)| \leq 3\epsilon, \ \forall p \in \mathbb{N}.$$

Conclusion : le sous-ensemble $\{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinu dans $C(X)$.

Montrons la réciproque. Supposons que (f_n) converge simplement vers $f \in C([0, 1])$ et que le sous-ensemble $A = \{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinu dans $C(X)$.

La convergence simple nous permet de voir que $\mathrm{ev}_x(A) = \{f_n(x),\ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ est bornée pour tout $x \in X$. On peut donc utiliser le Théorème d'Ascoli : le sous-ensemble $A = \{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact dans $C(X)$.

On va maintenant utiliser la proposition précédente : la suite (f_n) évolue dans le compact $\bar{A}$, ainsi elle est convergente dans $(C(X), \|-\|_\infty)$ si et seulement si elle possède une unique valeur d'adhérence.

Considérons deux sous-suites $(f_{\varphi_1(n)})$ et $(f_{\varphi_2(n)})$ qui converge dans $(C(X), \|-\|_\infty)$. Comme (f_n) converge simplement vers f, les deux sous-suites $(f_{\varphi_1(n)})$ et $(f_{\varphi_2(n)})$ convergent aussi simplement vers f. Cela implique que les limites de $(f_{\varphi_1(n)})$ et $(f_{\varphi_2(n)})$ sont égales.

Conclusion : (f_n) converge uniformément vers f.