EXERCICES POUR LE MODULE
"ANALYSE FONCTIONNELLE"

ANNÉE 2021/2022

FACULTÉ DES SCIENCES MONTPELLIER

1. Topologie non-métrisable

On munit $E = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ de la topologie τ_E définie de la manière suivante. A toutes parties *finies* $A \subset B \subset \mathbb{R}$ on associe le sous-ensemble $U_{A,B} = \mathcal{P}(\mathbb{R} \setminus B) \cup A$ de E. Les $U_{A,B}$ sont les ouverts fondamentaux de τ_E et un ouvert de τ_E est une réunion d'ouverts fondamentaux.

a. Vérifier que τ_E est une topologie séparée.

Supposons que $\emptyset \in E$ admette une base de voisinages ouverts dénombrable $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on considère le sous-ensemble $X_n := \{B \subset \mathbb{R} \text{ fini},\ V_n \subset U_{\emptyset,B}\}$.

b. Montrer que chaque X_n est fini.

c. Expliquer pourquoi le résultat précédent est contradictoire.

d. Expliquer pourquoi la topologie τ_E n'est pas métrisable.

2. Boules unités convexes

Soit E un espace vectoriel et $N : E \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ une application satisfaisant les deux propriétés suivantes : pour tout $x \in E$

- $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Montrer que N est une norme sur E si et seulement si le sous-ensemble $B := \{x \in E \,|\, N(x) \leq 1\}$ est convexe.

3. Les normes $\|\cdot\|_p$

Soit $p > 0$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}, \quad \|x\|_\infty = \sup_{1\leq i\leq n} |x_i|.$$

a. On suppose que $p \geq 1$. Montrer que $x \mapsto (\|x\|_p)^p$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}^n$ (on pourra commencer avec $n = 1$). En déduire que $\|\cdot\|_p$ est une norme.

b. On suppose que $p \in]0, 1[$. Montrer que $\|\cdot\|_p$ n'est pas une norme.

c. Soit $p, q \geq 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer l'inégalité de Young : $|xy| \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q}$. En déduire l'inégalité de Hölder : $\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \, \|y\|_q$.

4. Topologie produit

Soit $(X_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'espace métrique. Soit $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ l'espace topologique produit. On se propose de montrer que X est métrisable. Soit

$$D(x, y) := \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}, \quad x, y \in X.$$

a. Montrer que D définit une distance sur X et que les projections $p_n : (X, D) \to (X_n, d_n)$ sont continues.

b. Soit $B(x,r)$ une boule ouverte de (X,D) et $y \in B(x,r)$. Construire un ouvert U_y de la topologie produit tel que $y \in U_y \subset B(x,r)$.

c. Conclure.

5. Topologies quotients

a. On considère la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$ suivante : $x \sim y \iff x-y \in \mathbb{Z}$. On note $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes d'équivalences de $\sim$, et on note $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ la projection canonique. La topologie quotient sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est définie de la manière suivante : $U \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est ouvert si $q^{-1}(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

(1) Est-ce que la topologie quotient est séparée ?

(2) Vérifier que q est une application *ouverte* (l'image d'un ouvert par q est un ouvert de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$).

(3) Montrer que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est homéomorphe à $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{R}^2,\ |z| = 1\}$.

b. Soit $a \in \mathbb{C}$ non-nul. On considère la relation d'équivalence sur $\mathbb{C}$ suivante : $x \sim_a y \iff x = a^k y$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Soient $X_a := \mathbb{C}/\sim_a$ l'ensemble des classes d'équivalences de $\sim_a$, et $q_a : \mathbb{C} \to X_a$ la projection canonique. La topologie quotient sur X_a est définie de la manière suivante : $U \subset X_a$ est ouvert si $q_a^{-1}(U)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.

(1) Montrer que la topologie quotient sur X_a n'est pas séparée si $|a| \neq 1$.

(2) Montrer que la topologie quotient sur X_a est séparée si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $a^N = 1$.

6. Compactifié d'Alexandroff

On considère $\widehat{\mathbb{R}^n} := \mathbb{R}^n \cup \{\omega\}$ muni de la topologie $\tau := \tau_n \cup \tau'$ où τ_n désigne l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et

$$\tau' = \{(\mathbb{R}^n \setminus K) \cup \{\omega\} \mid K \text{ compact de } \mathbb{R}^n\}.$$

a. Montrer que $(\widehat{\mathbb{R}^n}, \tau)$ est un espace topologique compact.

b. Montrer que $(\widehat{\mathbb{R}^n}, \tau)$ est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}^n := \{z \in \mathbb{R}^{n+1},\ \|z\|^2 = 1\}$. *On pourra utiliser la projection stéréographique.*

7. Distance à un fermé

Soit (X,d) un espace métrique et $Y \subset X$ un sous-ensemble fermé. On définit la fonction $d(-,Y) : X \to \mathbb{R}$ en posant $d(x,Y) = \inf_{y\in Y} d(x,y)$.

a. Montrer que $d(-,Y)$ est continue.

b. Soit K un compact de X tel que $Y \cap K = \emptyset$. Montrer qu'il existe deux ouverts U, V tels que $K \subset U$, $Y \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$. *On pourra considérer* $\inf_{x\in K} d(x,Y)$.

8. Fonctions nulles à l'infini

Soit X un espace métrique localement compact (tout point de X possède un voisinage compact). On considère l'espace vectoriel $C_0(X)$ des fonctions continues $f : X \to \mathbb{R}$ *nulles à l'infini*, c'est-à-dire telles que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact $A \subset X$ tel que $|f(x)| \leq \varepsilon$ si $x \notin A$. On note $C_c(X)$ le sous-espace vectoriel de $C_0(X)$ formé des fonctions à support compact.

a. Montrer que $(C_0(X), \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach.

b. Montrer que $C_c(X)$ est dense dans $C_0(X)$. *On pourra utiliser les fonctions de la forme* $x \mapsto d(x,B)/(d(x,B) + d(x,A))$*, où A et B sont deux fermés disjoints de X.*

c. Soit $\widehat{X}$ le compactifié d'Alexandroff de X (voir Exercice 6). Montrer que $C_0(X)$ s'identifie avec un sous-espace vectoriel fermé de $C(\widehat{X})$.

9. Espaces vectoriels topologiques

Pour tout $f, g \in E := C(\mathbb{R})$ on pose $d(f,g) = \inf\{1, \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - g(x)|\}$.

a. Montrer que (E, d) est un espace métrique complet.

b. Montrer que l'addition $E \times E \to E, (f, g) \mapsto f + g$ est continue.

c. Montrer que la multiplication $\mathbb{R} \times E \to E, (\lambda, g) \mapsto \lambda g$ n'est pas continue.

10. Topologie métrisable et non-normable

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On note $C(\Omega)$ l'espace vectoriel formé par les fonctions continues à valeurs réelles sur Ω.

a. Montrer qu'il existe une suite de compacts $K_n \subset \Omega, n \geq 1$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) tout compact K de Ω est inclus dans un K_n,

(ii) pour tout $n \geq 1$, le compact K_n est inclus dans l'intérieur du compact K_{n+1},

(iii) $\Omega = \bigcup_{n\geq 1} K_n$.

Une telle suite $K_n, n \geq 1$ est appelée suite exhaustive de compacts associée à Ω. Pour $h \in C(\Omega)$ et $n \geq 1$, on pose $p_n(h) := \sup\{|h(x)|, x \in K_n\}$. On définit $d : C(\Omega) \times C(\Omega) \to \mathbb{R}^+$ par

$$d(f,g) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(f-g)}{1 + p_n(f-g)}.$$

b. Montrer que $(C(\Omega), d)$ est un espace métrique et que la convergence d'une suite dans cet espace métrique traduit la convergence uniforme sur tout compact.

c. Montrer que $(C(\Omega), d)$ est un espace métrique complet.

d. Montrer que la topologie de $(C(\Omega), d)$ n'est pas normable.

11. Convergence uniforme

a. Décrire une suite de fonctions $F_n \in C([0,1])$ qui converge simplement vers la fonction nulle et telle que $\|F_n\|_\infty = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. *Théorème de Dini :* Soient X un espace topologique compact et (f_n) une suite de fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x \in X$, la suite $n \to f_n(x)$ est croissante et bornée : sa limite est notée $f(x)$. Montrer que la fonction f est continue si et seulement si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

c. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $C([0,1])$ qui converge simplement vers f. Montrer que la convergence est uniforme si et seulement si le sous-ensemble $X := \{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinu.

d. On considère la suite de polynômes P_n définie par la récurrence suivante : $P_0(t) = 0$ et $P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}(t - P_n(t)^2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(1) Montrer que $0 \leq P_n(t) \leq \sqrt{t}, \forall t \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}$.

(2) Montrer que la suite de polynômes P_n converge uniformément vers $t \mapsto \sqrt{t}$ sur l'intervalle $[0,1]$.

12. Fonctions uniformément continues

a. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces espace métriques, et une application $f : X \to Y$ *continue*.

— Montrer que f est uniformément continue si et seulement si pour toutes suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X, on a

$$\lim_{n\to\infty} d_X(a_n, b_n) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} d_Y(f(a_n), f(b_n)) = 0.$$

— *Théorème de Heine* : On suppose (X, d) compact. Montrer que f est uniformément continue.

b. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.

— Montrer que si f admet des limites en $\pm\infty$, alors f est uniformément continue.

— Est-ce que la fonction $f(x) = \sin(x^2)$ est uniformément continue ?

13. Fonction Höldériennes

Soit $\alpha \in]0, 1]$. On dit qu'une fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ est α-Höldérienne si il existe $K > 0$ pour lequel on a

$$|f(x) - f(y)| \le K|x - y|^{\alpha}, \quad \forall x, y \in [0, 1].$$

La plus petite constante K vérifiant cette propriété est notée $|f|_{\alpha}$.

a. Montrer que toute fonction α-Höldérienne est uniformément continue.

b. Montrer que $x \mapsto \sqrt{|x|}$ est $\frac{1}{2}$-Höldérienne.

c. Soit $E_{\alpha} \subset C([0, 1])$ le sous-espace vectoriel des fonctions α-Höldériennes. Montrer que $N_{\alpha}(f) = |f(0)| + |f|_{\alpha}$ détermine une norme sur E_{α}.

d. Montrer que (E_{α}, N_{α}) est un espace de Banach.

e. Montrer que la boule unité de E_{α} est relativement compacte dans l'espace de Banach $C([0, 1])$.

14. Applications contractantes

On considère l'application linéaire $f_c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f_c(x, y) = \left(\frac{x+y}{2}, cy\right)$. On note $f_c^{(n)}$ la composée de f_c avec elle-même n fois.

a. Montrer que f_c est contractante pour la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$ si $c \in \left]\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$.

b. Soit $c \in]-1, 1[$. Montrer les propriétés suivantes :

(1) L'application f_c n'est pas contractante pour la norme $\|\cdot\|_{\infty}$.

(2) Il existe $n \ge 1$ pour lequel l'application $f_c^{(n)}$ est contractante pour la norme $\|\cdot\|_{\infty}$.

15. Ascoli

Les ensembles de fonctions suivantes sont-ils relativement compacts dans $C([0, 1])$?

(1) $f_n(t) = t^n,\ n \in \mathbb{N}$,

(2) $g_n(t) = \sin(n\,t),\ n \in \mathbb{N}$,

(3) $h_n(t) = \sin(t + n),\ n \in \mathbb{N}$,

(4) $k_n(t) = (nt + 1)^{-1},\ n \in \mathbb{N}$,

(5) $p_{\alpha}(t) = e^{\alpha t^2},\ \alpha \in [1, 2]$.

16. Familles équicontinues

a. Soitent X un espace métrique compact et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $C(X)$ qui converge simplement vers $f \in C(X)$. Montrer que la convergence est uniforme si et seulement si le sous-ensemble $\{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinu dans $C(X)$.

b. Soit $F_n(t) = \sin\left(\sqrt{t + (2n\pi)^2}\right), t \ge 0$, une suite de fonction : $F_n \in C_b^0([0, \infty[), \forall n \ge 0$.

(1) Calculer la limite simple F de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(2) Montrer que la famille $\{F_n, n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinue dans $C_b^0([0, \infty[)$.

(3) Est-ce que $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers F ?

(4) Est-ce que $\{F_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une partie relativement compacte de $C_b^0([0, \infty[)$?

17. Sous-espaces denses de $C(I)$

a. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle compact, et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une application continue strictement monotone. Montrer que le sous-ensemble $\mathbb{R}[\varphi] := \{P(\varphi),\ P \text{ polynôme}\}$ est dense dans $C(I)$.

b. On considère les sous-ensembles $B_1 := \{f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos^k(x)\}$ et $B_2 := \{f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kx)\}$. Sont-ils denses dans $C([0,\pi])$? Déterminer l'adhérence de B_1 dans $C([0,2\pi])$.

c. Soit D la sous-algèbre engendrée par $\{f,g\}$ où $f(x) = 1$ et $g(x) = x^2$.

(1) Montrer que D est dense dans $C([0,1])$.

(2) Montrer que D n'est pas dense dans $C([-1,1])$.

d. Soit $f \in C([0,1])$ telle que $\int_0^1 f(t)t^n dt = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $f = 0$.

18. Fonctions nulle part dérivables

a. On va montrer que le sous-ensemble $X \subset C([0,1])$ des fonctions nulle part dérivables est dense dans $C([0,1])$. Pour tout $n \geq 1$, on considère le sous-ensemble

$$U_n := \{f \in E,\ \forall x \in [0,1]\ \exists y \in [0,1] \text{ tel que } |f(x) - f(y)| > n|x-y|\}.$$

— Montrer que U_n est un ouvert de E.

— Soit $P \in E$ une fonction polynomiale. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $f \in U_n$ tel que $\|P - f\| \leq \epsilon$. En déduire que U_n est dense.

— Montrer que $\cap_{n\geq 1} U_n \subset X$. Conclure.

b. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\{x\} = d(x,\mathbb{Z})$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{2^n x\}}{2^n}.$$

— Montrer que f est une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$.

— Calculer $f(2^{-p})$ pour $p \in \mathbb{N}$. Est-ce que f est dérivable en 0 ?

— Montrer que f est nulle part dérivable. *Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, on cherchera une suite adéquate* $(x + 2^{-p_k})_{k\geq 0}$ *tendant vers x.*

19. Formes linéaires

a. Soit E un espace vectoriel normé, et $T : E \to \mathbb{R}$ une application linéaire non-nulle. Montrer les équivalence suivantes :

$$\begin{aligned} T \text{ est continue } &\iff \ker(T) \text{ est fermé dans } E,\\ T \text{ n'est pas continue } &\iff \ker(T) \text{ est dense dans } E. \end{aligned}$$

b. Soit $E = \mathbb{R}[x]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. On pose $\|P\| := \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$ et $N(P) = \sum_{k=0}^{r} |a_k|$ si $P(x) = \sum_{k=0}^{r} a_k x^k$.

— Montrer que $\| - \|$ et N sont des normes sur E. Sont-elles équivalentes ?

— On considère les formes linéaires $\varphi_\alpha : P \mapsto P(\alpha)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que φ_α est continue pour la norme N seulement si $|\alpha| \leq 1$. Montrer que φ_α est continue pour la norme $\| - \|$ seulement si $\alpha \in [0,1]$.

20. Applications linéaires positives

Soit X un espace topologique compact et $E = C(X)$ muni de la norme $\| - \|_\infty$. Une fonction $f \in E$ est dite positive (noté $f \geq 0$) si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in X$.

Soit $T : E \to E$ une application linéaire application linéraire telle que $f \geq 0$ implique $T(f) \geq 0$. Dans ce cas on note $T \geq 0$.

a. Montrer l'equivalence : $T \geq 0 \iff T(|f|) \geq T(f),\ \ \forall f \in E$.

b. Soit $T \geq 0$. En déduire que T est continue et calculer sa norme.

21. Applications linéaires surjectives

Soient E, F deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

a. Montrer que T est surjective si et seulement si il existe $M > 0$ tel que $\forall y \in F$, $\exists x \in E$ tel que $y = T(x)$ et $\|x\| \leq M\|y\|$.

b. En déduire que l'ensemble $\mathcal{S}(E, F) := \{T \in \mathcal{L}(E, F),\ T \text{ surjective}\}$ est un ouvert dans $\mathcal{L}(E, F)$.

22. Espaces vectoriels quotients

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé $(E, \|-\|_E)$. On considère l'espace vectoriel quotient E/F et l'on note $x \in E \mapsto \bar{x} \in E/F$ la projection canonique. On considère l'application $\|-\| : E/F \to \mathbb{R}$ définie par la relation $\|\bar{x}\| = \inf\{\|y\|_E, y \in \bar{x}\}$.

a. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E/F telle que $\|a_{n+1} - a_n\| \leq \frac{1}{2^n}$. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que $\bar{x}_n = a_n$ et $\|x_{n+1} - x_n\|_E \leq \frac{2}{2^n}$.

b. Montrer que $\|-\|$ est une norme sur E/F si et seulement si F est fermé.

c. On suppose que F est fermé. Montrer que $(E, \|-\|_E)$ est un espace de Banach si et seulement si $(F, \|-\|_E)$ et $(E/F, \|-\|)$ sont des espaces de Banach.

23. Les espaces l_α

Pour tout $0 < \alpha \leq 1$, on considère le sous-ensemble l_α formé des suites réelles $u = (u_n)$ telles que $\sum_{n\geq 0} |u_n|^\alpha < \infty$.

a. Montrer que pour tout $0 < \alpha \leq 1$, on a $|x + y|^\alpha \leq |x|^\alpha + |y|^\alpha,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

b. Montrer que l_α est un sous-espace vectoriel et que l'application $d_\alpha(u, v) := \sum_{n\geq 0} |u_n - v_n|^\alpha$ définit une distance sur l_α.

c. Soit $0 < \alpha < \alpha' \leq 1$. Vérifier que $l_\alpha \subset l_{\alpha'}$. Est ce que l'inclusion $(l_\alpha, d_\alpha) \to (l_{\alpha'}, d_{\alpha'})$ est continue ?

On considère les applications $\Sigma_\alpha : l_\alpha \times l_\alpha \to l_\alpha, (u, v) \mapsto u + v$ et $\Pi_\alpha : \mathbb{R} \times l_\alpha \to l_\alpha, (\lambda, v) \mapsto \lambda v$.

d. Est-ce que les applications Σ_α et Π_α sont continues par rapport à la topologie définie par d_α ?

e. Montrer que (l_α, d_α) est un espace métrique complet.

24. Compacts de l_2

Soit l_2 l'espace de Banach formé des suites réelles $u = (u_n)$ telles que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^2 < \infty$. On considère les sous-ensembles $A := \{u \in l_2, |u_n| \leq \frac{1}{n+1}\ \forall n\}$ et $B := \{u \in l_2, |u_n| \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}\ \forall n\}$.

a. Montrer que A est une partie compacte de l_2.

b. Montrer que B est une partie fermée de l_2, mais qui n'est pas compacte.

25. Dual de l_1

Soit l_1 l'espace de Banach formé des suites réelles $u = (u_n)$ telles que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n| < \infty$, et l_∞ celui formé des suites bornées.

On considère l'application linéaire $T : l_\infty \to (l_1)^*$ qui à un élément $a = (a_n) \in l_\infty$ associe la forme linéaire $T(a) : l_1 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$T(a)(u) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n.$$

a. Montrer que $\|T(a)\| = \|a\|_\infty$ pour tout $a \in l_\infty$.

b. Montrer que T est un isomorphisme d'espaces de Banach.

26. Dual de l_∞

Soit l_1 l'espace de Banach formé des suites réelles $u = (u_n)$ telles que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n| < \infty$, et l_∞ celui formé des suites bornées. Pour toute suite $(x_n) \in l_\infty$ on note $\limsup x_n := \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n}\{x_k\}$.

On considère l'application linéaire $G : l_1 \to (l_\infty)^*$ qui à un élément $a = (a_n) \in l_1$ associe la forme linéaire $G(a) : l_\infty \to \mathbb{R}$ définie par :

$$G(a)(u) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n u_n \quad \forall u \in l_\infty.$$

a. Montrer que $p : l_\infty \to \mathbb{R}$ définie par $p(u) = \limsup |u_n|$ est une jauge.

b. Montrer que G est continue et que $\|G(a)\| = \|a\|$ pour tout $a \in l_1$.

c. Soit C le sous-espace vectoriel de l_∞ formé des suites convergentes. Montrer qu'il existe $\lambda \in (l^\infty)'$ telle que $\lambda((x_n)) = \lim_{n\to\infty} x_n$. Montrer que λ n'est pas dans l'image de G.

27. Espaces réflexifs

a. Soit E un espace vectoriel normé réflexif. Montrer que pour tout $\Phi \in E^*$, il existe $x_0 \in E$ tel que $\|x_0\| = 1$ et $\|\Phi\| = f(x_0)$. Retrouver par cette méthode que l_1 n'est pas réflexif.

b. Déduire de l'exercice précédent que l'espace de Banach $C([0, 1])$ n'est pas réflexif. *On pourra considérer la forme linéaire* $\Phi(f) = \int_0^{1/2} f(t)dt - \int_{1/2}^1 f(t)dt$.

28. Séparabilité

a. Soit X un espace métrique compact. Montrer que $C(X)$ est séparable. *On prendra une suite* (x_n) *dense dans X et on considèrera l'algèbre engendrée par les fonctions* $x \mapsto d(x_n, x)$.

b. Définir une suite non-dénombrable $x_i, i \in I$ d'éléments de l_∞ telle que $\|x_i - x_j\|_\infty \geq 1$ si $i \neq j$. En déduire que l_∞ n'est pas séparable.

29. Densité

a. Soit $\mathcal{A}$ le sous-espace vectoriel de $L^1([-\pi, \pi])$ engendré par les fonctions $\cos(kx), \sin(kx), k \geq 0$. Montrer que $\mathcal{A}$ est une partie dense de $L^1([-\pi, \pi])$.

b. Soit $\mathcal{B}$ le sous-espace vectoriel de $L^1([0, \pi])$ engendré par les fonctions $\cos(kx), k \geq 0$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une partie dense de $L^1([0, \pi])$.

c. Soit $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de $]0, 1[$ tendant vers 0. Pour tout $i \geq 0$, on considère l'élément $u(i) \in l_1$ définit par $u(i)_n = (\alpha_i)^n$. Montrer que le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\{u(i), i \geq 0\}$ est dense dans l_1.

d. Pour a > 1, on note $f_a(x) = \frac{1}{x-a}$ la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$. Soit (a_n) une suite de réels vérifiant $a_n > 1$ pour tout $n \geq 0$, et $\lim a_n = \infty$. Montrer que le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\{f_{a_n}, n \geq 0\}$ est dense dans $L^2([0, 1])$.

30. L^2 versus L^1

On considère les espaces de Banach $L^1 := L^1([0, 1])$ et $L^2 := L^2([0, 1])$.

a. Montrer l'existence d'une application canonique $j : L^2 \to L^1$ continue, injective et d'image dense.

b. Pour tout $n \geq 1$ on note E_n l'ensemble des fonctions $f \in L^1$ telles que $\int_0^1 |f(t)|^2 dt \leq n$. En utilisant le lemme de Fatou, montrer que E_n est un fermé de L^1.

c. Construire une suite (f_n) de L^1 qui converge vers la fonction nulle et vérifie $\lim \|f_n\|_2 = +\infty$. Montrer que E_n est d'intérieur vide dans L^1.

d. En déduire que $L^1 \setminus j(L^2)$ est dense dans L^1.

31. Sous-espaces de fonctions dérivables

Soit E un sous-espace de $C^0([0,1])$, fermé pour la norme uniforme, et tel que tout élément de E est continûment dérivable. On munira E de la norme $\|f\|_E := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

a. Montrer $(E, \| - \|_E)$ est un espace de Banach.

b. Montrer que $f \mapsto f$ est un isomorphisme entre les espaces de Banach $(E, \| - \|_E)$ et $(E, \| - \|_\infty)$.

c. Montrer que la boule unité $B_E := \{f \in E, \|f\|_\infty \leq 1\}$ est compacte (*On utilisera le théorème d'Ascoli*). En déduire que E est de dimension finie.

32. Un théorème de Grothendieck

Soit X un sous-espace fermé de $L^2([0,1])$ dont chaque élément est aussi dans $L^\infty([0,1])$. On rappelle que $f \in L^\infty([0,1])$ si il existe une constante M telle que $|f(x)| \leq M$ presque partout sur $[0,1]$; dans ce cas on note $\|f\|_\infty = \inf\{M \in [0;+\infty[, |f(x)| \leq M \ p.p.\}$.

a. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall f \in X,\ \|f\|_\infty \leq C\|f\|_2.$$

b. Soit $f_1, \ldots, f_n$ une famille orthonormale d'éléments de X, et pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, $F_x = \sum_{j=1}^n x_j f_j$.

(1) Calculer $\|F_x\|_2$.

(2) On choisit une partie dénombrable dense D de $\mathbb{C}^n$. Montrer qu'il existe $N \subset [0,1]$ de mesure nulle tel que $\forall x \in D,\ \forall t \notin N,\ |F_x(t)| \leq C\|x\|_2$.

(3) En déduire que $\forall x \in \mathbb{C}^n$, $\forall t \notin N$, $|F_x(t)| \leq C\|x\|_2$.

(4) En choisissant x convenablement, montrer que $\forall t \notin N$, $\sum_{j=1}^n |f_j(t)|^2 \leq C^2$.

c. En déduire que X est de dimension finie.

33. Supplémentaires topologiques

Soit X un espace de Banach. On dit qu'un sous-espace vectoriel fermé F de X admet un *supplémentaire topologique* s'il existe un sous-espace vectoriel fermé G de X tel que $X = F \oplus G$.

a. Montrer qu'un sous-espace fermé F de X admet un supplémentaire topologique si, et seulement si, F est l'image d'un projecteur continu $p : X \to X$.

b. Soit F un sous-espace de X de dimension finie, $\{f_1, \ldots, f_n\}$ une base de F, et $\{f_1^*, \ldots, f_n^*\}$ la base duale.

c. Justifier que les formes linéaires $f_1^*, \ldots, f_n^*$ sont continues sur F.

d. Montrer que F admet un supplémentaire topologique.

e. Montrer que tout supplémentaire algébrique d'un sous-espace fermé de X de codimension finie est un supplémentaire topologique.

f. *Exemple.* Soit $N \subset X'$ un sous espace de dimension p, et $F = \{x \in X, f(x) = 0, \forall f \in N\}$. Montrer que si $f_1, \ldots, f_p$ est une base de N, alors l'application $\varphi : E \to \mathbb{R}^p$, $x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_p(x))$, est surjective. En déduire que F admet un supplémentaire topologique.

g. Dans le cas où X est un espace de Hilbert, pouvez-vous définir un supplémentaire topologique *canonique* associé à tout sous-espace fermé F de X ?

34. Coefficients de Fourier

On considère l'espace de Banach $L^1([0,2\pi])$ des (classes de) fonctions mesurables à valeurs complexes sur l'intervalle $[0,2\pi]$ intégrables pour la mesure de Lebesgue. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ et toute fonction $f \in L^1([0,2\pi])$ on note $c_n(f) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_0^{2\pi} e^{-int} f(t)dt$, le n-ième coefficient de Fourier de f.

a. (Lemme de Riemann-Lebesgue) Montrer que $\lim_{n\to\pm\infty} c_n(f) = 0$. (*On pourra d'abord supposer f est continûment dérivable.*)

Soit $C_0(\mathbb{Z}) = \{(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \lim_{n\to\pm\infty} c_n = 0\}$, et $\varphi : L^1([0,2\pi]) \to C_0(\mathbb{Z})$ l'application linéaire définie par $\varphi(f) = (c_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$.

b. Montrer que $C_0(\mathbb{Z})$ muni de la norme $\|(c_n)\| := \sup_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|$ est un espace de Banach.

c. Montrer que φ est continue et injective.

d. Montrer que l'image de φ est dense dans $C_0(\mathbb{Z})$ (*Utiliser le théorème de Stone-Weierstrass.*)

e. Montrer que les fonctions $f_n(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(\frac{2n+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})} = \frac{1}{2\pi}\sum_{p=-n}^{n} e^{ipt}$ (les *noyaux de Dirichlet*) vérifient $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = +\infty$.

f. En déduire que φ n'est pas surjective.

35. Somme directe

On considère un espace de Banach $(E, \|-\|)$ et deux sous-espaces vectoriels F et G tels que $E = F \oplus G$. Ainsi tout vecteur $x \in E$ se décompose de manière unique $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. Montrer que les projections $p_F : x \mapsto x_F$ et $p_G : x \mapsto x_G$ sont continues si et seulement si F et G sont fermés.

36. Base de Haar dans $L^2([0,1])$

Notons $\varphi = \mathbf{1}_{[0,\frac{1}{2}[} - \mathbf{1}_{[\frac{1}{2},1[} \in L^2([0,1])$. On considère une suite de fonctions $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^2([0,1])$ définie de la manière suivante :

- $\psi_0 = \mathbf{1}_{[0,1[}$.
- Tout entier $n \geq 1$ s'exprime de manière unique $n = 2^j + k$ avec $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \cdots, 2^j - 1\}$. On pose alors $\Delta(n) = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}[\subset [0,1]$ et

$$\psi_n(x) = \begin{cases} 2^{j/2}\varphi(2^j x - k), & \text{si } x \in \Delta(n), \\ 0, & \text{si } x \notin \Delta(n). \end{cases}$$

a. Expliciter les fonctions ψ_1, ψ_2 et ψ_3.

b. Montrer que $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormale de $L^2([0,1])$.

c. Montrer que l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}\{\psi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est égal à l'espace vectoriel engendré par les fonctions caractéristiques $\mathbf{1}_{\Delta(n)}, n \geq 1$.

d. Conclure que $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2([0,1])$.

37. Applications linéaires inversibles

Soit H un espace de Hilbert et $u \in \mathcal{L}(H,H)$.

a. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) u est inversible à gauche,

(2) $\exists c > 0, \forall x \in H, \|u(x)\| \geq c\|x\|$,

(3) $\mathrm{Image}(u)$ est fermé dans H et $\ker(u) = \{0\}$.

b. En déduire que si u satisfait les relations $\langle u(x), x\rangle \geq c\|x\|^2$ avec $c > 0$, alors u est inversible.

38. Adjoint

Soit $(E, \langle -, -\rangle)$ un espace d'Hilbert.

a. Montrer que tout $T \in \mathcal{L}(E)$ admet un adjoint $T^* \in \mathcal{L}(E)$ satisfaisant la relation $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$ pour tout $x, y \in E$.

b. Montrer que $\ker(T^*) = \mathrm{Im}(T)^{\perp}$.

c. Montrer que $\|T\| = \|T^*\| = (\|T^*T\|)^{1/2}$.

39. Projecteur

Soit H un espace de Hilbert et $p \in \mathcal{L}(H, H)$ un projecteur : $p \circ p = p$.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) il existe un sous-espace vectoriel fermé F de H tel que p est la projection orthogonale sur F,

(2) $p = p^*$,

(3) $\|p\| = 1$,

(4) $\langle p(x), x - p(x)\rangle = 0$, $\forall x \in H$.

40. Question piège

On considère l'espace $E = C^0([-1, 1]) \subset L^2([-1, 1])$ muni du produit scalaire usuel $\langle -, -\rangle$. On considère la forme linéaire $\delta : E \to \mathbb{R}$ telle que $\delta(f) = f(0)$.

Existe t-il un élément $g \in L^2([-1, 1])$ tel que $\forall f \in E, \delta(f) = \langle f, g\rangle$?

41. Polynômes de Hermite

On considère $E = \mathbb{R}[x]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_{\mathbb{R}} P(x)Q(x)e^{-x^2/2}dx$.

a. Expliciter l'adjoint D de l'application linéaire $d : E \to E, P \mapsto P'$.

b. Montrer que la famille $H_n(x) = e^{x^2/2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2/2}\right), n \in \mathbb{N}$ est une base orthogonale de E.

42. Topologie compacte-ouverte

On considère $E := C^0(\mathbb{R}^n)$ muni des semi-normes $p_k(f) = \sup_{\|x\|\leq k} |f(x)|$, $k \geq 1$. On note τ la topologie induite par ces semi-normes.

Pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$ et tout ouvert $U \subset \mathbb{R}$ on définit

$$E_{(K,U)} := \{f \in E,\ f(K) \subset U\}.$$

La famille $E_{(K,U)}$ définit la topologie compacte-ouverte de E de la manière suivante. Un sous-ensemble $\mathbb{X} \subset E$ est un ouvert pour cette topologie si pour tout $f \in \mathbb{X}$ il existe une famille $(K_1, U_1), \cdots, (K_p, U_p)$ tels que $f \in \bigcap_{k=1}^p E_{(K_k,U_k)}$ et

$$\bigcap_{k=1}^{p} E_{(K_k,U_k)} \subset \mathbb{X}.$$

Montrer que τ est égale à la topologie compacte-ouverte.

43. Limites faibles

a. Montrer que les suites suivantes convergent faiblement vers 0 :

(1) $\phi_n(x) = \phi(x + n)$ pour $\phi \in L^2(\mathbb{R})$,

(2) $\phi_n(x) = \sqrt{n}\phi(nx)$ pour $\phi \in L^2(\mathbb{R})$.

b. Pour tout réel y, on note $E(y) \in \mathbb{Z}$ sa partie entière et $[y] \in [0, 1[$ sa partie décimale : $[y] = y - E(y)$. On considère un élément $\phi \in L^2([0, 1])$ et on forme la suite $(\phi_n)_{n\geq 1}$ définie par $\phi_n(x) = \phi([nx]), x \in [0, 1]$.

— Montrer que pour tout $h \in C^0([0, 1])$ on a $\langle \phi_n, h\rangle = \langle \phi, H_n\rangle$ avec

$$H_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{x+k}{n}\right), \quad x \in [0, 1].$$

— Calculer $\|\phi_n\|_2$ pour $n \geq 1$.

— Montrer que ϕ_n converge faiblement.

c. On considère la suite de fonctions $(T_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$T_n(x, y) = \frac{n}{n^2 + x^2 + y^2}, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

— Montrer que $T_n \in L^2(\mathbb{R}^2)$ pour tout $n \geq 1$. Calculer leurs normes $\|T_n\|_2$.
— Montrer que $(T_n)_{n\geq 1}$ converge faiblement vers 0 dans $L^2(\mathbb{R}^2)$.

44. Convergence faible dans un espace de Hilbert

Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne d'un espace de Hilbert H. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de H.

a. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers $x \in H$ si et seulement si elle est bornée et si on a

$$\lim_{n\to\infty} \langle e_k, x_n \rangle = \langle e_k, x \rangle, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

b. Exhiber une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant

$$\lim_{n\to\infty} \langle e_k, x_n \rangle = 0, \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

mais qui ne converge pas faiblement vers 0.

45. La topologie $\sigma(E, E^*)$ n'est pas métrisable

Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie.

a. Montrer que tout voisinage pour la topologie faible dans E contient une droite.

b. On suppose que E est métrisable pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$. Montrer qu'il existe une suite (x_n) de E qui converge vers 0 pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$ et telle que $\|x_n\| = n$.

c. Conclure grâce au théorème de Banach-Steinhaus appliqué à l'espace de Banach E^*.

46. Adhérence pour la topologie faible

a. Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie. On considère la sphère $S := \{x \in E, \|x\| = 1\}$, et la boule $B := \{x \in E, \|x\| \leq 1\}$.

(1) Montrer que B est fermé pour la topologie faible.
(2) Soit $x_o \in B$. Montrer que tout voisinage de x_o pour la topologie faible intersecte S.
(3) Déterminer l'adhérence de S pour la topologie faible.

b. On considère l_1 l'espace vectoriel formé des suites réelles $u = (u_n)$ telles que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n| < \infty$. Son dual l_∞ est formé des suites réelles bornées. On considère l'application $g : l_\infty \to \mathbb{R}$ qui à une suite bornée $u = (u_n)$ associe $g(u) = \liminf_n(u_n)$.

(1) Montrer $g : l_\infty \to \mathbb{R}$ est continue lorsque l_∞ est muni de la topologie forte.
(2) Montrer $g : l_\infty \to \mathbb{R}$ n'est pas continue lorsque l_∞ est muni de la topologie faible-$*$.
(3) Est-ce que $C := \{(u_n) \in l_\infty, \ \liminf_n(u_n) \geq 0\}$ est fermé pour la topologie faible ?

47. Topologie faible dans l_1

Soit (x^n) une suite d'éléments de l_1 convergeant faiblement vers 0. On cherche à établir que (x^n) converge fortement vers 0. A noter que les deux topologies faibles et fortes sont cependant distinctes. Le raisonnement s'effectue par l'absurde.

a. Montrer qu'on peut se limiter au cas où $\|(x^n)\|_1 = 1$ et (x^n) converge faiblement vers 0.

b. Construire par récurrence deux suites d'entiers naturels (j_k) et (n_k) strictement croissantes telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=j_k}^{j_{k+1}-1} |x_j^{n_k}| \geq \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad \forall n \geq n_k, \ \sum_{j=0}^{j_k-1} |x_j^n| \leq \frac{1}{8}.$$

c. Conclure le raisonnement par l'absurde en utilisant l'élément $w \in l_\infty$ tel que $w_j = signe(x_j^{n_k})$ si $j_k \leq j \leq j_{k+1} - 1$.

d. Est-ce que ce type de résultat est encore valable dans l_2 ?

48. Opérateurs compacts

Soit E un espace de Hilbert séparable et $T : E \to E$ une application linéaire continue. On dit que T est un *opérateur compact* si l'image de la boule unité de E par T est relativement compacte.

a. Montrer que si une suite (x_n) converge faiblement dans E alors la suite $T(x_n)$ converge faiblement dans E.

b. On suppose maintenant que T est un opérateur compact. Montrer que si la suite x_n converge faiblement dans E alors la suite $T(x_n)$ converge en norme dans E.

c. Réciproquement, supposons que $T : E \to E$ est une application linéaire continue telle que si une suite (x_n) converge faiblement dans E alors la suite $T(x_n)$ converge en norme dans E. Montrer que T est un opérateur compact.

49. Volterra

Dans cet exercice $L^2([0, \frac{\pi}{2}])$ désigne l'espace de Hilbert réel formé par les classes de fonctions mesurables telles que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(t)|^2 dt < \infty$. Le produit scalaire est noté $\langle f, g\rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)g(t)dt$.

On considère l'application linéaire $V : L^2([0, \frac{\pi}{2}]) \to L^2([0, \frac{\pi}{2}])$ définie par la relation

$$V(f)(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad x \in [0, \tfrac{\pi}{2}].$$

a. Montrer que V est continue.

b. Montrer que V est un opérateur compact (voir Exercice 48).

c. Expliciter l'application adjointe $V^* : L^2([0, \frac{\pi}{2}]) \to L^2([0, \frac{\pi}{2}])$.

d. Montrer que les valeurs propres de V^*V sont $\frac{1}{(2n+1)^2}$, $n \in \mathbb{N}$. *On montrera que les vecteurs propres de V^*V satisfont une certaine équation différentielle.*

e. Montrer qu'il existe $\psi \in L^2([0, \frac{\pi}{2}])$ de norme 1 tel que $\langle V^*V(\psi), \psi\rangle = \sup_{\|f\|_2=1}\langle V^*V(f), f\rangle$. *On se servira de la question* **b.**.

f. On pose $\lambda = \langle V^*V(\psi), \psi\rangle$. Montrer que

$$\langle V^*V(\psi + f), \psi + f\rangle \leq \lambda \langle \psi + f, \psi + f\rangle, \quad \forall f \in L^2([0, \tfrac{\pi}{2}]).$$

En déduire que $V^*V(\psi) = \lambda\psi$.

g. Montrer que la norme d'opérateur de V est égale à 1.

50. Le théorème ergodique de Von Neumann

Soit H un espace de Hilbert. On considère un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\|T\| \leq 1$. On note p la projection orthogonale sur $\ker(T - Id)$ et

$$G_n := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} T^k \in \mathcal{L}(H), \quad n \in \mathbb{N}.$$

a. Montrer que $\|G_n\| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Soit $T^* \in \mathcal{L}(H)$ l'opérateur adjoint. Rappeler pourquoi $\|T^*\| = \|T\| \leq 1$

c. Montrer que $\ker(T - Id) = \ker(T^* - Id)$.

d. Montrer que l'on a la décomposition orthogonale $H = \ker(T - Id) \oplus \overline{\text{Image}(T - Id)}$.

e. Montrer que pour tout $x \in H$, la suite $G_n(x)$ converge vers $p(x)$ lorsque $n \to \infty$.

51. Endomorphismes adjoints

Pour $f \in L^2(]0,+\infty[)$, on définit $Hf :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ et $Gf :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$Hf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt, \quad Gf(x) = \int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt \quad \text{pour} \quad x > 0.$$

a. Vérifier que Hf et Gf sont bien définies et sont des fonctions continues sur $]0,+\infty[$.

b. Montrer que pour tout $f \in L^2(]0,+\infty[)$, on a

$$|Hf(x)| \leq \frac{\|f\|_2}{\sqrt{x}}, \quad \text{et} \quad |Gf(x)| \leq \frac{\|f\|_2}{\sqrt{x}}, \qquad \forall x > 0.$$

c. On suppose ici que $f \in L^2(]0,+\infty[) \cap C^0(]0,+\infty[)$. Montrer que

$$(\star) \qquad \|Hf\|_2 \leq 2\|f\|_2 \quad \text{et} \quad \|Gf\|_2 \leq 2\|f\|_2.$$

On pourra majorer, pour $0 < \epsilon < R$, les intégrales $\int_\epsilon^R Hf(x)^2dx$ et $\int_\epsilon^R Gf(x)^2dx$ en commençant par intégrer par parties.

d. Montrer que les inégalités $(\star)$ sont valables pour tout $f \in L^2(]0,+\infty[)$. Ainsi H et G définissent des endomorphismes continus de $L^2(]0,+\infty[)$.

e. Montrer que G est l'endomorphisme adjoint de H.