

Notes du cours “Analyse fonctionnelle” Master 1

Paul-Emile PARADAN*

2021

Table des matières

1	Éléments de topologie générale	3
1.1	Définitions de base	3
1.2	Continuité	4
1.3	Compacité	5
1.4	Topologie produit	5
2	Espaces métriques	6
2.1	Caractérisations séquentielles	7
2.2	Boules unités dans un espace vectoriel normé	8
2.3	Espaces métriques complets	9
2.4	Complété d’un espace métrique	12
2.5	Espaces métriques $C(X, Y)$	13
2.5.1	Théorème d’Ascoli	13
2.5.2	Théorème de Stone-Weierstrass	14
2.6	Théorème du point fixe	16
2.7	Théorème de Baire	18
3	Espaces de Banach et de Hilbert	19
3.1	$L^1(X)$	20
3.2	$\mathcal{L}(E, F)$	21
3.3	Théorème de Banach-Steinhaus	21
3.4	Théorème de l’application ouverte et du graphe fermé	22
3.5	Espaces de Hilbert (cas séparable)	24
3.5.1	Espaces séparables	24

*Institut Montpellierain Alexander Grothendieck, CNRS, Université de Montpellier,
paul-emile.paradan@umontpellier.fr

3.5.2	Premières définitions	25
3.5.3	Projection sur un convexe fermé	26
3.5.4	Bases hilbertiennes dénombrables	27
3.5.5	Espaces de Hilbert séparables	28
4	Topologies faibles	28
4.1	Semi-normes	28
4.2	Théorème de Hahn-Banach : version analytique	29
4.3	Espaces duaux	30
4.4	Topologie associée à une famille de semi-normes	32
4.5	Topologies faibles	35
5	Transformées de Fourier et convolution	39
5.1	Espaces L^p : boîte à outils	39
5.2	Théorèmes de Fubini et Tonelli	41
5.3	Espaces de Banach L^p	41
5.4	Convolution et régularisation	42
5.4.1	Convolution dans $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$	43
5.4.2	Convolution dans $L^1(\mathbb{R}^d)$	44
5.4.3	Régularisation	44
5.5	Transformée de Fourier	48
5.5.1	Transformée de Fourier sur $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$	48
5.5.2	Transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^d)$	49
5.5.3	Transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^d)$	52
5.5.4	Transformée de Fourier sur l'espace de Schwarz	52
6	Distributions tempérées sur \mathbb{R}	53
6.1	Espaces $L_M(\mathbb{R})$ et $L_R(\mathbb{R})$	53
6.2	Distributions tempérées : définitions	54
6.3	Opérations sur les distributions	58
6.3.1	Dérivation de distributions	59
6.3.2	Produit par des fonctions \mathcal{C}^∞ à croissance modérée	59
6.3.3	Transformée de Fourier d'une distribution	60
6.3.4	Convolution par des fonctions à décroissance rapide	61

1 Éléments de topologie générale

1.1 Définitions de base

Soit X un ensemble et $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X .

Définition 1.1 Une topologie sur X est un sous-ensemble $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ vérifiant les conditions suivantes

- i) \emptyset et X appartiennent à τ .
 - ii) Si $U_i, i \in I$ appartiennent à τ , alors $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.
 - iii) Si U_1, \dots, U_n appartiennent à τ , alors $U_1 \cap \dots \cap U_n \in \tau$.
- La topologie τ est dite séparée si de plus on a
- iv) Pour tout $x \neq y$, il existe $U_x, U_y \in \tau$ tels que $x \in U_x, y \in U_y$ et $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Les éléments de τ sont appelés les *ouverts* de (X, τ) et les complémentaires des éléments de τ sont appelés les *fermés* de (X, τ) .

Exemple 1.2 À une distance $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ on associe une topologie séparée τ_d de la manière suivante. Un sous-ensemble U appartient à τ_d si pour tout $x \in U$ il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(x, \epsilon) := \{y \in X, d(x, y) < \epsilon\} \subset U$.

Voici en vrac quelques notions associées à un espace topologique (X, τ) :

1. $A \subset X$ est un *voisinage* de $a \in X$ si il existe $U \in \tau$ tel que $x \in U \subset A$.
2. une famille \mathcal{B} de voisinages de $a \in X$ est une base de voisinage de $a \in X$ si pour tout voisinage A de a il existe $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \subset A$.
3. Une *base* de la topologie τ est un ensemble d'ouverts tel que tout ouvert de τ soit une réunion d'éléments de cet ensemble.
4. L'*adhérence* de $A \subset X$ est le plus petit fermé contenant A . Autrement dit

$$\bar{A} = \bigcap_{F \text{ fermé}, A \subset F} F.$$

5. L'*intérieur* de $A \subset X$ est le plus grand ouvert contenu dans A . Autrement dit

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{U \text{ ouvert}, U \subset A} U.$$

6. A chaque sous-ensemble $Y \subset X$ on associe une topologie τ_Y , appelée *topologie induite*, de la manière suivante : $U' \subset Y$ appartient à τ_Y s'il existe $U \in \tau$ tel que $U' = U \cap Y$.

Remarque 1.3 Sur un espace métrique (X, d) , on remarque que pour tout $a \in X$ la famille dénombrable $B(a, \frac{1}{n}), n \geq 1$ est une base de voisinage de a .

1.2 Continuité

Soit $f : X \rightarrow Y$ une application entre deux espaces topologiques. On associe à f l'application

$$f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$

définie par la relation $f^{-1}(B) = \{x \in X, f(x) \in B\}$.

Définition 1.4 On introduit la notion de continuité de la manière suivante :

- f est continue en $a \in X$ si pour tout voisinage B de $f(a)$, le sous-ensemble $f^{-1}(B)$ est un voisinage de a .
- f est continue si f est continue en tout point de X .

On a la propriété suivante.

Proposition 1.5 f est continue si et seulement si l'une des deux propriétés équivalentes est vérifiée :

- $f^{-1}(\text{ouvert de } Y) = \text{ouvert de } X$,
- $f^{-1}(\text{fermé de } Y) = \text{fermé de } X$.

Remarque 1.6 Attention, en général l'image directe d'un ouvert de X (resp. fermé de X) n'est pas un ouvert de Y (resp. fermé de Y). Considérons par exemple $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \mathbb{R}$ est fermé alors que $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{>0}$ n'est pas fermé dans \mathbb{R} .

On aura besoin de la notion d'homéomorphisme :

Définition 1.7 Une application $f : X \rightarrow Y$ est un homéomorphisme si :

- f est bijective,
- f est continue,
- l'application réciproque $f^{-1} : Y \rightarrow X$ est continue.

Exemple 1.8 — L'application $x \mapsto \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b}$ définit un homéomorphisme entre $]a, b[$ et \mathbb{R} .

— L'application $x \mapsto x^3 - 3x^2 + 4x$ définit un homéomorphisme de \mathbb{R} sur lui-même.

— L'application bijective $x \mapsto e^{ix}$, $[0, 2\pi[\rightarrow \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$, n'est pas un homéomorphisme.

1.3 Compacité

Définition 1.9 1) Un espace topologique (X, τ) est dit compact si

- la topologie τ est séparée,
- pour tout recouvrement de X par des ouverts de τ , on peut en extraire un recouvrement fini.

2) Une partie Y de (X, τ) est dite compacte si l'espace Y muni de la topologie induite τ_Y est compact.

2) Une partie Y de (X, τ) est dite relativement compacte si son adhérence \bar{Y} est compacte.

Voici quelques propriétés élémentaires.

Proposition 1.10 1. Soit $A \subset X$.

- Si X est compact, alors A compact $\iff A$ fermé.
- Si X est séparé, alors A compact $\implies A$ fermé.

2. Soit $f : X \rightarrow Y$ continue.

- Si A est un compact de X et Y est séparé, alors $f(A)$ est un compact de Y .
- Si X est compact, Y est séparé et f est bijective, alors f est un homéomorphisme.

1.4 Topologie produit

Soit $X_i, i \in I$ une famille d'ensembles.

Définition 1.11 L'espace produit $\prod_{i \in I} X_i$ est par définition l'ensemble des éléments $x = (x_i)_{i \in I}$, où $x_i \in X_i$ pour tout $i \in I$.

Lorsque I n'est pas fini, l'existence d'un ensemble produit $\prod_{i \in I} X_i$ non-vide correspond à l'axiome du choix. Axiome que l'on admet par la suite.

Définition 1.12 Un ouvert élémentaire de $\prod_{i \in I} X_i$ est de la forme $\prod_{i \in I} U_i$, où les U_i sont des ouverts de X_i et $\{i \in I, U_i \neq X_i\}$ est fini.

On définit la topologie produit sur $\prod_{i \in I} X_i$ de la manière suivante.

Définition 1.13 Une partie $U \subset \prod_{i \in I} X_i$ est un ouvert pour la topologie produit si pour tout $x \in U$, il existe un ouvert élémentaire $V \subset \prod_{i \in I} X_i$ tel que $x \in V$ et $V \subset U$.

Le cas particulier suivant est intéressant.

Proposition 1.14 Soit $(X_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille (dénombrable) d'espaces métriques. On définit une distance sur $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ en posant

$$d(x, y) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}.$$

Alors la topologie sur $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ associée à la distance d correspond à la topologie produit.

On admet le résultat suivant.

Théorème 1.15 (Théorème de Tychonov) Si tous les espaces topologiques $X_i, i \in I$ sont compacts, alors $\prod_{i \in I} X_i$ est compact pour la topologie produit.

2 Espaces métriques

Une application $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est une distance si les conditions suivantes sont satisfaites : pour tout $x, y, z \in X$ on a

- $d(x, y) = 0$ ssi $x = y$ (séparation),
- $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie),
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (inégalité triangulaire).

Définition 2.1 Deux distances d_1, d_2 sur X sont dites équivalentes si il existe $\alpha, \beta > 0$ tel que

$$\alpha d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta d_1(x, y)$$

pour tout $x, y \in X$.

On rappelle que l'on peut associer une topologie τ_d à une distance d sur X . On a le résultat élémentaire suivant.

Lemme 2.2 Si les distances d_1, d_2 sur X sont équivalentes alors $\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$.

Les exemples suivants montrent que la réciproque est fautive.

1. Sur \mathbb{R} , les distances $|x - y|$ et $|e^x - e^y|$ ne sont pas équivalentes, mais elles définissent la même topologie.
2. Sur un espace métrique (X, d) , on remarque que $D = \frac{d}{1+d}$ définit une distance sur X . On vérifie que $\tau_d = \tau_D$ tandis que d et D sont équivalentes si et seulement si (X, d) est borné.

Définition 2.3 *Un espace métrique (X, d) est dit précompact si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un recouvrement fini de X par des boules ouvertes de rayon ϵ .*

Proposition 2.4 — *Un espace métrique (X, d) compact est précompact.*
 — *Un espace métrique (X, d) précompact possède une partie dénombrable dense.*

Preuve : Le premier point est une conséquence directe de la définition. Pour tout $\epsilon > 0$, on a $X = \bigcup_{x \in X} B(x, \epsilon)$ et lorsque (X, d) est compact on en extrait un recouvrement fini.

Démontrons le second point. Supposons (X, d) précompact. Alors pour tout $n \geq 0$, il existe un ensemble fini $A(n) \subset X$ tel que

$$X = \bigcup_{x \in A(n)} B(x, 2^{-n}).$$

On considère alors le sous-ensemble $A = \bigcup_{n \geq 0} A(n)$: A est dense et dénombrable. \square

2.1 Caractérisations séquentielles

Soit (X, d) un espace métrique.

On va voir que plusieurs notions de la topologie τ_d admettent des caractérisations en terme de suites. C'est très utile dans la pratique !

Définition 2.5 *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X .*

- *$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si il existe $a \in X$ et $R > 0$ tel que $x_n \in B(a, R)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
- *$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l \in X$ si la suite de réels $d(x_n, l)$ tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$.*

On remarque que la limite l est unique (c'est une conséquence de la propriété de *séparation* et de *l'inégalité triangulaire*). On la note $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. On aura besoin de la notion suivante.

Définition 2.6 *Un élément $y \in X$ est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'il existe $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite $(u_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers y . La suite $(u_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée sous-suite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.*

On commence avec le fait suivant.

Lemme 2.7 *Un élément $y \in X$ est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si et seulement si*

$$y \in \bigcap_{n \geq 0} \overline{\{u_k, k \geq n\}}.$$

Exercice 2.8 *Montrer qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'un espace métrique X est convergente si et seulement si la suite admet une seule valeur d'adhérence et que le sous-ensemble $\{u_k, k \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact.*

Maintenant nous considérons le cas des fermés de τ_d .

Lemme 2.9 *Soit $A \subset X$ et \bar{A} son adhérence.*

1. *A est fermée si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A convergente dans X on a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in A$.*
2. *$\alpha \in \bar{A}$ si et seulement si α est la limite d'une suite d'éléments de A .*

Considérons maintenant une application $f : X \rightarrow Y$ entre deux espaces métriques.

Lemme 2.10 *L'application $f : X \rightarrow Y$ est continue si pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X convergente, la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans Y .*

Maintenant rappelons le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Théorème 2.11 *Un espace métrique (X, d) est compact si et seulement si toute suite d'éléments de X admet une valeur d'adhérence.*

On termine cette section avec le cas de \mathbb{R}^n munie de la topologie usuelle.

Proposition 2.12 *Une partie $K \subset \mathbb{R}^n$ est compacte si et seulement si K est fermé et borné.*

2.2 Boules unités dans un espace vectoriel normé

Considérons un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$. On munit E de la topologie définie par la distance $d(u, v) = \|u - v\|$.

On rappelle le résultat classique suivant.

Proposition 2.13 *Supposons que $\dim E < \infty$. Alors une partie $K \subset E$ est un compact si et seulement si K est fermé et borné.*

La boule unité de E désigne le sous-ensemble fermé et borné $\bar{B} := \{v \in E, \|v\| \leq 1\}$. Voici le théorème de Riesz, qui donne une caractérisation topologique des espaces vectoriels de dimension finie.

Théorème 2.14 *La boule unité \overline{B} est compacte si et seulement si $\dim E < \infty$.*

La preuve de ce théorème utilise le résultat suivant.

Lemme 2.15 *Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension fini. Si $F \neq E$, alors il existe $x_o \in E$ telle que*

$$\|x_o\| = 1, \quad \text{et} \quad d(x_o, F) = 1.$$

Preuve : Soit $w_o \notin F$. L'application $h : F \rightarrow \mathbb{R}$, $F(v) = \|v - w_o\|$, est continue, et vérifie $F(v) \geq F(0)$ si $\|v\| \geq 2\|w_o\|$. Le minimum de h est donc atteint sur le compact $\{v \in F; \|v\| \leq 2\|w_o\|\}$: il existe $v_o \in F$ tel que

$$\|v_o - w_o\| \leq \|v - w_o\|, \quad v \in F.$$

Il n'est pas dur de voir que l'élément $x_o := \frac{v_o - w_o}{\|v_o - w_o\|}$ vérifie les conditions du lemme. \square

Terminons maintenant la preuve du théorème 2.14. La proposition 2.13 nous donne déjà un sens de l'équivalence. Supposons maintenant que E de dimension infini. On construit alors par récurrence une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la boule unité \overline{B} :

- Soit $x_0 \in E$ de norme 1.
- Si x_0, \dots, x_n sont donnés, l'élément x_{n+1} satisfait les conditions

$$\|x_{n+1}\| = 1, \quad \text{et} \quad d(x_{n+1}, F_n) = 1$$

où $F_n := \text{Vect}\{x_0, \dots, x_n\}$.

On remarque alors que les éléments x_n appartiennent à la boule unité et vérifient

$$\|x_p - x_q\| \geq 1, \quad \forall p \neq q.$$

Ces relations montrent que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de valeur d'adhérence. Conclusion : la boule unité \overline{B} n'est pas compacte. \square

2.3 Espaces métriques complets

On commence avec la notion de suite de Cauchy.

Définition 2.16 *Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X est dite de Cauchy si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que*

$$p, q \geq N \quad \implies \quad d(x_p, x_q) \leq \epsilon.$$

On remarque que sur un espace métrique (X, d) on a

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente $\implies (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy $\implies (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Définition 2.17 *L'espace métrique (X, d) est complet si toute suite de Cauchy est convergente.*

Ici l'exemple fondamental d'espace métrique complet est \mathbb{R} muni de la valeur absolue.

Voici quelques propriétés associées à la notion de complétude.

Proposition 2.18 *Soit (X, d) un espace métrique.*

1. *Si (X, d) est compact, alors (X, d) est complet.*
2. *Soit $Y \subset X$.*
 - *Si (Y, d) est complet alors Y est fermé dans X .*
 - *Si (X, d) est complet, alors (Y, d) est complet $\iff Y$ fermé.*

Maintenant nous donnons une version enrichie du théorème de Bolzano-Weierstrass.

Théorème 2.19 *Pour un espace métrique (X, d) les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *(X, d) est compact.*
2. *(X, d) est précompact et complet.*
3. *Toute suite d'éléments de X admet une sous-suite convergente.*

Preuve : L'implication 1. \implies 2. est une conséquence des propositions 2.4 et 2.18.

Démontrons maintenant 2. \implies 3.. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de X . Une partie $Y \subset X$ sera dite "compatible" si l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}, x_k \in Y\}$ est infini. On va utiliser le fait élémentaire suivant : si une partie "compatible" Y admet une décomposition $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_p$, alors il existe $j \in \{1, \dots, p\}$ tel que Y_j est compatible.

Comme (X, d) est précompact, pour tout $n \geq 0$, il existe un ensemble fini $A(n) \subset X$ tel que

$$X = \bigcup_{x \in A(n)} B(x, 2^{-n}).$$

Maintenant on construit par récurrence une suite (a_n) tel que $a_n \in A(n)$ de la manière suivante :

- On a $X = \bigcup_{x \in A(0)} B(x, 1)$ avec X est "compatible", donc il existe $a_0 \in A(0)$ tel que $B(a_0, 1)$ est "compatible".

- On a $B(a_0, 1) = \bigcup_{x \in A(1)} B(x, 2^{-1}) \cap B(a_0, 1)$ avec $B(a_0, 1)$ est "compatible", donc il existe $a_1 \in A(1)$ tel que $B(a_1, 2^{-1}) \cap B(a_0, 1)$ est "compatible".
- Et ainsi de suite, il existe $a_0 \in A(0), \dots, a_n \in A(n)$ tel que

$$B(a_n, 2^{-n}) \cap \dots \cap B(a_1, 2^{-1}) \cap B(a_0, 1)$$

est "compatible".

On voit alors que $B(a_{n+1}, 2^{-(n+1)}) \cap B(a_n, 2^{-n}) \neq \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cela signifie que $d(a_n, a_{n+1}) \leq 2^{-n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$: cela implique que (a_n) est une suite de Cauchy. Comme (X, d) est complet, cette suite converge vers a_∞ . On voit alors que pour tout $\epsilon > 0$, l'ouvert $B(a_\infty, \epsilon)$ est "compatible" : cela signifie que a_∞ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Démontrons maintenant 3. \implies 2.. Supposons que toute suite de (X, d) admet une sous-suite convergente. Alors toute suite de Cauchy de (X, d) est convergente car elle possède une valeur d'adhérence : (X, d) est donc complet. Supposons (X, d) ne soit pas précompact : il existe alors $\epsilon > 0$ pour lequel il n'existe pas de recouvrement fini de X par des boules ouvertes de rayon ϵ . On construit alors par récurrence une suite (x_n) telle que pour tout $n \geq 0$,

$$x_{n+1} \notin \bigcup_{k \leq n} B(x_k, \epsilon).$$

En particulier, on voit que $d(x_p, x_q) \geq \epsilon$ si $p \neq q$, et cette inégalité empêche la suite (x_n) d'avoir une valeur d'adhérence. On obtient alors une contradiction.

A ce stade on a démontré que 2. \iff 3..

Démontrons finalement que 2. (ou 3.) \implies 1.. Supposons que (X, d) satisfait 2. (ou 3.) et considérons un recouvrement $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ par des ouverts. On a besoin du lemme suivant.

Lemme 2.20 *Il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in X, \exists i \in I, B(x, \eta) \subset U_i$.*

Preuve du Lemme : Supposons le contraire : $\forall \eta > 0, \exists x \in X, \forall i \in I, B(x, \eta) \not\subset U_i$. En prenant, $\eta = \frac{1}{n}$ avec $n \geq 1$, on obtient une suite (x_n) telle que $B(x_n, 1/n) \not\subset U_i, \forall i \in I$. Soit α une valeur d'adhérence de la suite (x_n) et soient $\eta_o > 0$ et $i_o \in I$ tels que $B(\alpha, \eta_o) \subset U_{i_o}$. On obtient alors une contradiction, car si une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ converge vers α , les boules $B(x_{\varphi(n)}, 1/\varphi(n))$ vont être contenues dans $B(\alpha, \eta_o)$ pour n assez grand. \square

Terminons la preuve de l'implication 2. (ou 3.) \implies 1.. Comme (X, d) est précompact, il existe a_1, \dots, a_p tels que

$$X = \bigcup_{k=1}^p B(a_k, \eta).$$

Maintenant, pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, il existe $i_k \in I$ tel que $B(a_k, \eta) \subset U_{i_k}$.
On obtient finalement que

$$X = \bigcup_{k=1}^p U_{i_k}.$$

□

Terminons cette section en considérant l'exemple du produit dénombrable d'espaces métriques. Le résultat suivant est une conséquence du *procédé diagonal de Cantor*.

Proposition 2.21 *Soit $(X_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille d'espaces métriques complet. On définit une distance sur $X := \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ en posant*

$$d(x, y) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}.$$

Alors (X, d) est un espace métrique complet.

2.4 Complété d'un espace métrique

Soit (X, d) un espace métrique.

Proposition 2.22 *Il existe un espace métrique (\hat{X}, \hat{d}) complet satisfaisant les propriétés suivantes :*

1. *Il existe $j : X \rightarrow \hat{X}$ tel que $d(x, y) = \hat{d}(j(x), j(y))$ pour tout $x, y \in X$.*
2. *Le sous-ensemble $j(X)$ est dense dans \hat{X} .*

De plus cet espace métrique est unique à isométrie près.

Nous allons maintenant expliquer la construction d'un tel espace métrique (\hat{X}, \hat{d}) . On note \mathcal{C}_X l'ensemble des suites de Cauchy de (X, d) et l'application $i : X \rightarrow \mathcal{C}_X$ qui à un élément $x \in X$ associe la suite constante égale à x .

On commence avec le résultat élémentaire suivant.

Lemme 2.23 *Si $a := (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $b := (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites de \mathcal{C}_X alors la suite de réels $(d(a_n, b_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. On note $d_{\mathcal{C}}(a, b)$ sa limite.*

L'application $d_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}_X \times \mathcal{C}_X \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ vérifie :

1. la propriété de *symétrie* : $d_{\mathcal{C}}(a, b) = d_{\mathcal{C}}(b, a), \quad \forall a, b \in \mathcal{C}_X,$
2. l'*inégalité triangulaire* : $d_{\mathcal{C}}(a, b) \leq d_{\mathcal{C}}(a, c) + d_{\mathcal{C}}(c, b), \quad \forall a, b, c \in \mathcal{C}_X,$
3. la relation $d_{\mathcal{C}}(i(x), i(y)) = d(x, y)$ pour tout $x, y \in X$.

Mais d_C ne satisfait pas la propriété de *séparation*. Pour palier à cela on introduit la relation d'équivalence sur \mathcal{C}_X suivante :

$$a \sim b \iff d_C(a, b) = 0.$$

Soit $\hat{X} := \mathcal{C}_X / \sim$ l'ensemble des classes d'équivalences de (\mathcal{C}_X, \sim) . On note $\pi : a \mapsto \bar{a}$ la projection canonique de \mathcal{C}_X sur \hat{X} et $j : X \rightarrow \hat{X}$ l'application $\pi \circ i$.

On remarque que si $a \sim a'$ et $b \sim b'$ alors $d_C(a, b) = d_C(a', b')$. Cela permet de définir une distance $\hat{d} : \hat{X} \times \hat{X} \rightarrow \mathbb{R}$ par la relation $\hat{d}(\bar{a}, \bar{b}) = d_C(a, b)$, $\forall a, b \in \mathcal{C}_X$.

La proposition 2.22 est la conséquence des faits suivants :

- a) Pour tout $\bar{a} \in \hat{X}$ et tout $\epsilon > 0$ il existe $x \in X$ tel que $\hat{d}(\bar{a}, j(x)) \leq \epsilon$.
- b) L'espace métrique (\hat{X}, \hat{d}) est complet.

Vérifions le premier point. Comme $a \in \mathcal{C}_X$ est de Cauchy il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(a_p, a_q) \leq \epsilon$ si $p, q \geq N$. Cela donne $\hat{d}(\bar{a}, j(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, x) \leq \epsilon$ si $x = a_N$.

Vérifions le deuxième point. Soit $(\hat{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy (\hat{X}, \hat{d}) . Pour tout $n \geq 0$, choisissons $a_n \in X$ tel que $\hat{d}(\hat{x}_n, j(a_n)) \leq 1/2^n$. On vérifie alors que $a := (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à \mathcal{C}_X et que $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{d}(\hat{x}_n, \bar{a}) = 0$.

2.5 Espaces métriques $C(X, Y)$

Soient X un espace topologique **compact** et (Y, d) un espace métrique **complet**. On note $C(X, Y)$ l'ensemble des applications continues de X dans Y . On munit $C(X, Y)$ de la distance suivante

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)), \quad f, g \in C(X, Y).$$

On a le premier résultat.

Proposition 2.24 *L'espace métrique $(C(X, Y), d_\infty)$ est complet.*

2.5.1 Théorème d'Ascoli

On veut maintenant caractériser les parties *relativement compactes* de $(C(X, Y), d_\infty)$, c'est à dire celles incluses dans un compact de $(C(X, Y), d_\infty)$. La notion clef est celle d'*équicontinuité*.

Définition 2.25 *Une partie $A \subset C(X, Y)$ est équicontinue si pour tout $x \in X$ et tout $\epsilon > 0$ il existe un voisinage $V_{x, \epsilon}$ de x tel que*

$$y \in V_{x, \epsilon} \implies d(f(x), f(y)) \leq \epsilon, \quad \forall f \in A.$$

Exercice 2.26 Supposons que (X, d_X) est un espace métrique compact. Montrer qu'une partie $A \subset C(X, Y)$ est équicontinue si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\rho > 0$ tel que

$$d_X(x, y) \leq \rho \implies d(f(x), f(y)) \leq \epsilon, \quad \forall f \in A.$$

On peut maintenant énoncer le théorème d'Ascoli.

Théorème 2.27 Soient X un espace topologique compact et (Y, d) un espace métrique complet. Soit A une partie de $C(X, Y)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. La partie A est relativement compacte dans $(C(X, Y), d_\infty)$.
2. La partie A est équicontinue et pour tout $x \in X$, l'ensemble $A_x := \{f(x), f \in A\}$ est relativement compact dans Y .

Exemple 2.28 Pour tout $\alpha \geq 0$, soit $\text{Lip}_\alpha([0, 1])$ le sous-ensemble des fonctions réelles sur l'intervalle $[0, 1]$ qui sont α -lipschitziennes : c'est un sous espace vectoriel de $C([0, 1])$. Est-ce que $\text{Lip}_\alpha([0, 1])$ est une partie fermée (resp. compacte) de $(C([0, 1]), d_\infty)$?

Pour tout $r \geq 0$ on considère

$$K_{\alpha, r} := \text{Lip}_\alpha([0, 1]) \cap \left\{ f \in C([0, 1]), f(0) \in [-r, r] \right\}.$$

Expliquer pourquoi $K_{\alpha, r}$ est un compact de $(C([0, 1]), d_\infty)$.

Exemple 2.29 Soit $C^1([0, 1])$ le sous-espace vectoriel de $C([0, 1])$ formé par les fonctions de classe C^1 . Montrer que

$$B := \{f \in C^1([0, 1]), \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \leq 1\}$$

est une partie relativement compacte de $(C([0, 1]), d_\infty)$. Est-ce que B est fermée dans $(C([0, 1]), d_\infty)$?

2.5.2 Théorème de Stone-Weierstrass

Soient X un espace topologique compact et $C(X)$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions continues, à valeurs réelles, sur X . On munit $C(X)$ de la norme uniforme

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Si on considère de plus la loi produit, l'espace vectoriel $C(X)$ devient une \mathbb{R} -algèbre possédant une unité : la fonction 1_X , constante égale à 1 sur X .

- Définition 2.30**
1. Une partie $A \subset C(X)$ est une sous-algèbre si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $f, g \in A$, on a $f + g \in A$, $fg \in A$ et $\lambda f \in A$. Si de plus $1_X \in A$, on dit que A est une sous-algèbre unitaire.
 2. Une partie $A \subset C(X)$ sépare les points de X si pour tout $x \neq y$ il existe $f \in A$ tel que $f(x) \neq f(y)$.

Si $P(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ est un polynôme et $f \in C(X)$ on note $P(f) := \sum_{k=0}^n a_k f^k$ (ici $f^0 = 1_X$ par définition).

- Remarque 2.31**
1. L'ensemble des fonctions polynomiales sur $[a, b]$ est une sous-algèbre unitaire de $C([a, b])$ qui sépare les points de $[a, b]$.
 2. Si $f \in C(X)$ alors $\mathbb{R}[f] := \{P(f), P \in \mathbb{R}[x]\}$ est une sous-algèbre unitaire de $C(X)$.
 3. Si $A \subset C(X)$ est une sous-algèbre unitaire, alors l'adhérence $\overline{A} \subset C(X)$ est une sous-algèbre unitaire.

Théorème 2.32 (Théorème de Stone-Weierstrass) Soient X un espace topologique compact et $A \subset C(X)$ une sous-algèbre unitaire qui sépare les points de X . Alors A est dense dans $C(X)$.

On a le premier corollaire :

Corollaire 2.33 (Théorème de Weierstrass) L'ensemble des fonctions polynomiales sur $[a, b]$ est dense dans $C([a, b])$.

Voici d'autres exemples :

1. L'ensemble des fonctions polynomiales paires sur $[0, 1]$ est dense dans $C([0, 1])$.
2. L'ensemble des fonctions polynomiales paires sur $[-1, 1]$ n'est pas dense dans $C([-1, 1])$.

Un autre exemple important concerne le sous-espace vectoriel $C_{2\pi}(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R})$ des fonctions continues 2π -périodiques. On considère l'espace topologique compact $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et on note $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ la projection. On voit que $f \mapsto f \circ p$ détermine un isomorphisme entre $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ et $C_{2\pi}(\mathbb{R})$.

Un *polynôme trigonométrique* est une fonction 2π -périodique de la forme $p(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$, avec $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. On remarque que l'ensemble des polynômes trigonométriques forme une sous-algèbre unitaire de $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \simeq C_{2\pi}(\mathbb{R})$ qui sépare les points de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Corollaire 2.34 Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue 2π -périodique, alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe un polynôme trigonométrique p tel que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - p(x)| = \sup_{x \in [0, 2\pi]} |f(x) - p(x)| \leq \epsilon.$$

Considérons maintenant le cas des fonctions à valeurs complexes.

On note $C(X)_{\mathbb{C}}$ le \mathbb{C} -espace vectoriel des fonctions continues, à valeurs complexes, sur X . On munit encore $C(X)_{\mathbb{C}}$ de la norme uniforme $\|f\|_{\infty} := \sup_{x \in X} |f(x)|$.

On remarque que toute fonction $f \in C(X)_{\mathbb{C}}$ s'écrit $f = \Re(f) + i\Im(f)$ avec $\Re(f), \Im(f) \in C(X)$, et que $\|f\|_{\infty} := \sup_{x \in X} \sqrt{\Re(f)^2(x) + \Im(f)^2(x)}$.

Définition 2.35 Une partie $A \subset C(X)_{\mathbb{C}}$ est une sous-algèbre complexe si pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $f, g \in A$, on a $f + g \in A$, $fg \in A$ et $\lambda f \in A$.

Théorème 2.36 (Théorème de Stone-Weierstrass complexe) Soient X un espace topologique compact et $A \subset C(X)_{\mathbb{C}}$ une sous-algèbre complexe et unitaire qui sépare les points de X . On suppose de plus que A est stable par rapport à la conjugaison : $f \in A \implies \bar{f} \in A$.

Alors A est dense dans $C(X)_{\mathbb{C}}$.

Considérons le sous-espace vectoriel $C_{2\pi}(\mathbb{R})_{\mathbb{C}} \subset C(\mathbb{R})_{\mathbb{C}}$ des fonctions continues, à valeurs complexes, et 2π -périodiques. Ici on a de même un isomorphisme $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})_{\mathbb{C}} \simeq C_{2\pi}(\mathbb{R})_{\mathbb{C}}$.

Un polynôme trigonométrique complexe est une fonction 2π -périodique de la forme $P(x) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k e^{ikx}$, avec $\alpha_k \in \mathbb{C}$. On remarque que l'ensemble des polynômes trigonométriques complexes forme une sous-algèbre complexe, unitaire de $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \simeq C_{2\pi}(\mathbb{R})$, qui sépare les points de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, et qui est stable par conjugaison.

Corollaire 2.37 Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue 2π -périodique, alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe un polynôme trigonométrique complexe P tel que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - P(x)| = \sup_{x \in [0, 2\pi]} |f(x) - P(x)| \leq \epsilon.$$

Exercice 2.38 Si $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue, à quelle condition f est-elle la limite uniforme de polynômes trigonométriques complexes ?

2.6 Théorème du point fixe

Soit (X, d) un espace métrique complet.

Définition 2.39 Soit $f : X \rightarrow X$ une application.

1. Pour tout $k \geq 1$ on note $f^{(k)}$ l'application $\underbrace{f \circ \dots \circ f}_k$.

2. Un point fixe de f est un élément $a \in X$ vérifiant $f(a) = a$.

Définition 2.40 Une application $f : X \rightarrow X$ est dite contractante s'il existe $\alpha \in [0, 1[$ tel que

$$d(f(a), f(b)) \leq \alpha d(a, b), \quad \forall a, b \in X.$$

On a le théorème fondamental suivant.

Théorème 2.41 Soient $f : X \rightarrow X$ une application et $k \geq 1$.

1. Si f est contractante, alors f possède un unique point fixe.
2. Si $f^{(k)}$ est contractante, alors f possède un unique point fixe.
3. Si $f^{(k)}$ est contractante, toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la récurrence $u_0 \in X$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers l'unique point fixe de f .

Exemple 2.42 On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{2y}{3}\right)$. On peut vérifier les faits suivants :

1. f est contractante pour la norme euclidienne de \mathbb{R}^2 ,
2. f n'est pas contractante pour la norme $\|\cdot\|_\infty$,
3. Il existe $k \geq 1$ pour lequel l'application $f^{(k)}$ est contractante pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

On termine cette section en rappelant deux théorèmes classiques qui s'obtiennent au moyen du théorème du point fixe.

Théorème 2.43 (Théorème d'inversion locale) Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 telle que la différentielle $dF(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme. Alors il existe un voisinage ouvert U de x_0 et un voisinage ouvert V de $F(x_0)$ tel que l'application $x \mapsto F(x)$ définissent un difféomorphisme entre U et V .

Théorème 2.44 (Théorème de Cauchy-Lipschitz) Soit $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 et $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Alors il existe un "unique" $g :]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[\rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 qui satisfait le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} g'(t) = F(t, g(t)), & \forall t \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[\\ g(t_0) = x_0. \end{cases}$$

2.7 Théorème de Baire

Soit (X, τ) un espace topologique séparé.

Définition 2.45 (X, τ) est un espace de Baire si l'une des deux conditions équivalentes est satisfaite :

- Pour toute suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ouverts denses de X , l'intersection $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ est une partie dense de X .
- Pour toute suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fermés d'intérieurs vides de X , la réunion $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide.

Théorème 2.46

- Tout espace topologique compact est un espace de Baire.
- Tout espace métrique complet est un espace de Baire.

Corollaire 2.47 Soit (X, d) un espace métrique complet. Supposons que l'on ait $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ avec tous les F_n fermés. Alors l'ouvert $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overset{\circ}{F}_n$ est dense.

Preuve du corollaire : on pose $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overset{\circ}{F}_n$ et $F'_n = F_n \cap X \setminus \Omega$. On remarque que tous les fermés F'_n sont d'intérieur vide. D'après le théorème 2.46, la réunion $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F'_n$ est d'intérieur vide. Mais $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F'_n = X \setminus \Omega$ car $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Ainsi $X \setminus \Omega$ est d'intérieur vide. Donc Ω dense. \square

Donnons quelques propriétés qui découlent du théorème de Baire.

Proposition 2.48 Soit (X, d) un espace métrique complet et $f_n \in C(X)$, $n \in \mathbb{N}$ une suite de fonctions convergente simplement vers f . Alors la fonction f est continue sur un sous-ensemble dense de X .

Preuve de la proposition : Pour $n, k \in \mathbb{N}$, on considère les ensembles

$$F_{k,n} := \bigcap_{p,q \geq n} \left\{ x \in X, |f_p(x) - f_q(x)| \leq \frac{1}{k+1} \right\}.$$

Comme les fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont continues, les sous-ensembles $F_{k,n}$ sont fermés. Comme la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement on voit aisément que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la réunion $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_{k,n}$ est égale à X . Le corollaire 2.47 donne alors que l'ouvert

$$\Omega_k := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overset{\circ}{F}_{k,n}$$

est dense dans X . D'après le théorème de Baire, on sait que $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \Omega_k$ est dense dans X .

Par définition, $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \Omega_k$ si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $n \in \mathbb{N}$ et $\epsilon > 0$ tel que

$$d(x, y) \leq \epsilon \implies |f_p(y) - f_q(y)| \leq \frac{1}{k+1} \quad \forall p, q \geq n.$$

On vérifie alors sans trop de peine que f est continue en tout point de $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \Omega_k$. \square

Proposition 2.49 *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors la fonction dérivée f' est continue sur un sous-ensemble dense de \mathbb{R} .*

Preuve de la proposition : C'est un corollaire de la proposition 2.48. On considère la suite de fonctions continues $F_n(x) = n(f(x + \frac{1}{n}) - f(x))$ qui converge simplement vers la dérivée de f . \square

Voici une dernière propriété remarquable qui découle du théorème de Baire (voir la feuille d'exercices).

Proposition 2.50 *Soit $E = C([0, 1])$ muni de la topologie de la convergence uniforme. L'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ qui ne sont dérivables en aucun point de $[0, 1]$ est dense dans E .*

3 Espaces de Banach et de Hilbert

On commence par une définition.

Définition 3.1 *Un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach s'il est complet pour la distance induite par la norme.*

On voit tout de suite qu'un espace vectoriel de dimension fini est un espace de Banach. Considérons d'autres exemples (de dimension infinie).

- Soit X un espace topologique compact. L'espace vectoriel $C(X)$ est un espace de Banach pour la norme de la convergence uniforme.
- Soit $p \in [1, \infty[$. On note l_p l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles $u := (u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telles que $\sum_{k \in \mathbb{N}} |u_k|^p < \infty$. On pose alors $\|u\|_p = (\sum_{k \in \mathbb{N}} |u_k|^p)^{1/p}$. Alors $(l_p, \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach.

- On note l_∞ l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles $u := (u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ bornées. On pose $\|u\|_\infty := \sup_{k \in \mathbb{N}} |u_k|$. Alors $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Le résultat suivant admet une preuve identique à celle de la proposition 2.22.

Proposition 3.2 *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace vectoriel normé. Il existe un espace de Banach $(\tilde{E}, \|\cdot\|_{\tilde{E}})$ et une application linéaire $j : E \rightarrow \tilde{E}$ vérifiant les points suivants*

- *L'application j est une isométrie : $\|j(v)\|_{\tilde{E}} = \|v\|_E$ pour tout $v \in E$.*
- *Le sous-espace vectoriel $j(E)$ est dense dans \tilde{E} .*

L'espace de Banach $(\tilde{E}, \|\cdot\|_{\tilde{E}})$ est unique à isométrie près : c'est le complété de l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$.

3.1 $L^1(X)$

Soit (X, \mathcal{B}, μ) un espace mesuré :

- \mathcal{B} est une tribu,
- $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$ est une mesure :

$$\mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k)$$

si les $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont des éléments de \mathcal{B} deux à deux disjoints.

On note $\mathcal{L}^1(X)$ l'espace des fonctions $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mesurables telles que $\int_X |f| d\mu < \infty$.

Soit \mathcal{N} le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^1(X)$ formé par les fonctions nulles presque partout. On remarque qu'une fonction mesurable $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ appartient à \mathcal{N} si et seulement si $\int_X |f| d\mu = 0$.

Définition 3.3 *On note $L^1(X)$ l'espace vectoriel quotient $\mathcal{L}^1(X)/\mathcal{N}$. Pour une classe $\bar{f} \in L^1(X)$ définie par $f \in \mathcal{L}^1(X)$ on pose*

$$\|\bar{f}\|_1 := \int_X |f| d\mu.$$

Le théorème suivant est admis.

Théorème 3.4 *L'espace vectoriel normé $(L^1(X), \|\cdot\|_1)$ est un espace de Banach.*

Considérons maintenant le cas de $X = [0, 1]$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue. On considère l'espace vectoriel $C([0, 1])$ muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$.

Proposition 3.5 *L'espace de Banach $L^1([0, 1])$ est le complété de l'espace vectoriel normé $(C([0, 1]), \|\cdot\|_1)$.*

3.2 $\mathcal{L}(E, F)$

On considère deux espaces vectoriels normés $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$. Soit $u : E \rightarrow F$ une application linéaire.

Lemme 3.6 *Les énoncés suivants sont équivalents :*

- $u : E \rightarrow F$ est continue.
- $u : E \rightarrow F$ est continue en $0 \in E$.
- Il existe $c \geq 0$ tel que $\|u(x)\|_F \leq c \|x\|_E$ pour tout $x \in E$.

Définition 3.7 *On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel formé par les applications linéaires continues de E dans F . Pour $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on note*

$$\|u\|_{\mathcal{L}} := \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

Proposition 3.8 *On suppose que $(F, \|\cdot\|_F)$ est un espace de Banach. Alors $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|_{\mathcal{L}})$ est un espace de Banach.*

Un cas particulier concerne le cas où $F = \mathbb{R}$.

Définition 3.9 *L'espace vectoriel $E^* := \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ des formes linéaires continues sur E est appelé le dual de E . Pour $f \in E^*$, on note $\|f\|_{E^*} := \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|_E}$. Alors $(E^*, \|\cdot\|_{E^*})$ est un espace de Banach.*

3.3 Théorème de Banach-Steinhaus

Considérons deux espaces vectoriels normés $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$. Commençons par le résultat préliminaire suivant.

Lemme 3.10 *Soit $T : E \rightarrow F$ continue. Pour tout $y \in E$ et pour tout $r \geq 0$, on a la relation*

$$\sup_{x \in B(y, r)} \|T(x)\|_F \geq r \|T\|_{\mathcal{L}}.$$

Théorème 3.11 (Banach-Steinhaus) Soit $T_i \in \mathcal{L}(E, F)$, $i \in I$ une famille d'applications linéaires continues. On suppose que $(E, \|-\|_E)$ est un espace de Banach. Alors

- soit $\sup_{i \in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}} < \infty$,
- soit il existe $x \in E$ tel que $\sup_{i \in I} \|T_i(x)\|_F = \infty$.

Preuve : On suppose que pour tout $x \in E$ on a $\sup_{i \in I} \|T_i(x)\|_F < \infty$. Alors $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ où $X_n := \{x \in E, \|T_i(x)\|_F \leq n \forall i \in I\}$ sont des parties fermées de E . D'après le théorème de Baire, il existe $n_o \in \mathbb{N}$ pour lequel X_{n_o} est d'intérieur non vide. Soit $y \in E$ et $r > 0$ tel que $B(y, r) \subset X_{n_o}$. Cela entraîne que $\|T_i(x)\|_F \leq n$ pour tout $i \in I$ et pour tout $x \in B(y, r)$. En utilisant le lemme précédent on voit que $\sup_{i \in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}} \leq \frac{n}{r}$. \square

Voici une première application du théorème de Banach-Steinhaus.

Proposition 3.12 Soit $T_n : E \rightarrow F$, $n \in \mathbb{N}$ une suite d'applications linéaires continues qui converge simplement vers $T : E \rightarrow F$. Si E est un espace de Banach, alors T est continue et $\|T\|_{\mathcal{L}} \leq \liminf_n \|T_n\|_{\mathcal{L}}$.

Attention, en général la suite $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}}$ ne tend pas vers 0.

Exemple 3.13 On considère les applications linéaires de décalage $\delta_L, \delta_R : l_1 \rightarrow l_1$:

$$\begin{aligned}\delta_L(u_0, u_1, \dots, u_k, \dots) &= (u_1, u_2, \dots, u_k, \dots) \\ \delta_R(u_0, u_1, \dots, u_k, \dots) &= (0, u_0, u_1, \dots, u_k, \dots).\end{aligned}$$

et les deux suites $L_n = (\delta_L)^n, R_n := (\delta_R)^n \in \mathcal{L}(l_1, l_1)$. Vérifier que pour tout $n \geq 0$ on a $\|L_n\| = \|R_n\| = 1$ et que l'une des deux suites converge simplement vers l'application linéaire nulle.

3.4 Théorème de l'application ouverte et du graphe fermé

Dans cette section nous supposons que $(E, \|-\|_E)$ et $(F, \|-\|_F)$ sont deux espaces de Banach.

Théorème 3.14 (Théorème de l'application ouverte) Soit $T : E \rightarrow F$ une application linéaire continue.

- Si T est surjective, alors T est une application ouverte.

— Si T est bijective, alors l'application linéaire réciproque $T^{-1} : F \rightarrow E$ est continue.

Preuve : On remarque tout d'abord que le deuxième point est une conséquence du premier.

Supposons maintenant que $T : E \rightarrow F$ est surjective. Pour montrer que T est une application ouverte, il suffit de montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que $B_F(0, \eta) \subset T(B_E(0, 1))$.

Considérons les fermés $Z_n := \overline{T(B_E(0, n))} \subset F$. Comme T est surjective on a $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n$. D'après le théorème de Baire, il existe $n_o \in \mathbb{N}$ pour lequel Z_{n_o} est d'intérieur non vide : soit $y \in E$ et $r > 0$ tel que

$$B(y, r) \subset \overline{T(B_E(0, n_o))}.$$

Cela entraîne que $B(0, r) \subset \overline{T(B_E(0, 2n_o))}$ puis que

$$B(0, \epsilon) \subset \overline{T(B_E(0, 1))}$$

pour $\epsilon = \frac{r}{2n_o}$. Montrons que la dernière inclusion implique que $B_F(0, \frac{\epsilon}{2}) \subset T(B_E(0, 1))$.

Soit $y \in B_F(0, \frac{\epsilon}{2})$. On définit par récurrence deux suites

$$y_k \in B_F(0, \frac{\epsilon}{2^k}), \quad x_k \in B_E(0, \frac{1}{2^k}),$$

pour $k \geq 1$, qui satisfont les relations $y_1 = y$ et

$$y_k - T(x_k) = y_{k+1}.$$

Alors $y = T(x_1 + \dots + x_n) + y_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$. La somme $x_1 + \dots + x_n$ converge vers un élément x de norme inférieure à $\sum_{k \geq 1} \|x_k\|_E \leq 1$, et $y = T(x)$. \square

Exercice 3.15 Soit X un sous-espace vectoriel de $C([0, 1])$ qui est à la fois fermé pour la topologie de la norme uniforme et tel que $X \subset C^1([0, 1])$. On veut montrer que X est nécessairement de dimension finie.

1. Montrer que X , muni de la norme $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$, est un espace de Banach.
2. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel $\|f'\|_\infty \leq c\|f\|_\infty$ pour tout $f \in X$. On pourra considérer l'application linéaire $Id : (X, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (X, N)$.
3. En déduire que la boule unité de $(X, \|\cdot\|_\infty)$ est compacte. Conclure.

À une application linéaire $T : E \rightarrow F$ on associe son graphe

$$\text{graphe}(T) := \{(x, T(x)), x \in E\},$$

qui est un sous-espace vectoriel de $E \times F$.

Théorème 3.16 (Théorème du graphe fermé) *L'application linéaire $T : E \rightarrow F$ est continue si et seulement si $\text{graphe}(T)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $E \times F$.*

Preuve : Considérons les projections $\pi_E : E \times F \rightarrow E$, et $\pi_F : E \times F \rightarrow F$ définies par $\pi_E(x, y) = x$ et $\pi_F(x, y) = y$.

On remarque que $\text{graphe}(T) = \ker \Lambda$ où $\Lambda = \pi_F - T \circ \pi_E$. De plus Λ est continue si T est continue. On voit donc que $\text{graphe}(T)$ est un fermé de $E \times F$ si T est continue.

Supposons maintenant que $\text{graphe}(T)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $E \times F$. Alors $\text{graphe}(T)$ est un espace de Banach pour la norme $N(x, y) = \|x\|_E + \|y\|_F$. Soit $\phi : \text{graphe}(T) \rightarrow E$ la restriction de π_E à $\text{graphe}(T)$: on voit que ϕ est linéaire, continue et bijective. D'après le théorème 3.14, on sait que l'application réciproque $\phi^{-1} : E \rightarrow \text{graphe}(T)$ est continue. Alors $T = \pi_F \circ \phi^{-1}$ est continue. \square

3.5 Espaces de Hilbert (cas séparable)

On commence par une définition.

3.5.1 Espaces séparables

Définition 3.17 *Un espace topologique (X, τ) est dit séparable s'il possède une partie dénombrable dense.*

On a les exemples classiques suivants d'espaces vectoriels normés séparables :

- l_p lorsque $p \in [1, \infty[$.
- $(C(X), \| \cdot \|_\infty)$ où X est un espace métrique compact.
- $L^p(\mathbb{R}^n), L^p(\Omega)$ où $p \in [1, \infty[$ et Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n .

Notons que l_∞ n'est pas séparable.

3.5.2 Premières définitions

Soit E un espace vectoriel réel.

Définition 3.18 — *Un produit scalaire sur E est une application bilinéaire symétrique $\langle -, - \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\langle v, v \rangle > 0$ pour tout $v \neq 0$. Dans ce cas on note $\|v\| := (\langle v, v \rangle)^{1/2}$ la norme associée.*

— *Un espace d'Hilbert (réel) est un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire $\langle -, - \rangle$ tel que E est complet par rapport à la norme $\| - \|$.*

Dans toute la suite on considère un produit scalaire $\langle -, - \rangle$ sur E . Pour tout $x, y \in E$ on a la relation

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2). \quad (1)$$

En utilisant le fait que $t \mapsto \langle tx + y, tx + y \rangle$ est un polynôme de degré deux prenant uniquement des valeurs positives on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

En utilisant l'identité (1) avec les couples (x, y) et $(x, -y)$ on obtient l'identité du parallélogramme :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad \forall x, y \in E. \quad (2)$$

On a la réciproque suivante.

Proposition 3.19 *Soit $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ un norme satisfaisant l'identité (2). Montrer que $\langle x, y \rangle := \frac{1}{2}(N(x + y)^2 - N(x)^2 - N(y)^2)$ est un produit scalaire sur E .*

Exemple 3.20 $L^2(\Omega)$ et l_2 sont des exemples d'espaces de Hilbert.

Le produit scalaire permet de définir l'orthogonal d'une partie $A \subset E$:

$$A^\perp = \{x \in E, \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in A\}.$$

On note $\text{Vect}(A)$ le sous-espace vectoriel engendré par A . On vérifie aisément les faits suivants :

- A^\perp est un sous-espace vectoriel fermé de E ,
- $A^\perp = F^\perp$ avec $F = \overline{\text{Vect}(A)}$.
- $\overline{\text{Vect}(A)} \subset (A^\perp)^\perp$. On verra en fait qu'il y a égalité au corollaire 3.22.

3.5.3 Projection sur un convexe fermé

Le théorème de projection sur un convexe fermé est un outil fondamental de la théorie des espaces de Hilbert.

Soit $(E, \langle -, - \rangle)$ un espace de Hilbert et $X \subset E$ un sous-ensemble *convexe* et *fermé* de E .

Théorème 3.21 *Pour tout $v \in E$ il existe un unique $p_X(v) \in X$ vérifiant :*

- $\|p_X(v) - v\| = \inf_{w \in X} \|w - v\|$,
- $\langle v - p_X(v), w - p_X(v) \rangle \leq 0$ for all $w \in X$.

L'application $p_X : E \rightarrow X$ est appelée la projection orthogonale sur X : c'est une application 1-lipschitzienne.

Corollaire 3.22 *Soit F un sous-espace vectoriel de E .*

- *Supposons que F est fermé. Alors $E = F \oplus F^\perp$ et $(F^\perp)^\perp = F$.*
- *Dans le cas général, on a $E = \overline{F} \oplus F^\perp$ et $(F^\perp)^\perp = \overline{F}$.*
- *F est dense si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.*

Preuve du corollaire : Supposons tout d'abord que F est fermé. Comme F est convexe nous pouvons considérer la projection orthogonale sur F , $p_F : E \rightarrow F$. Les inégalités

$$\langle v - p_F(v), w - p_F(v) \rangle \leq 0, \quad \forall w \in F, \forall v \in E,$$

impliquent que la forme linéaire $w \in F \mapsto \langle v - p_F(v), w \rangle$ est nulle. En d'autres termes, $v - p_F(v) \in F^\perp$, $\forall v \in E$. Ainsi tout vecteur $v \in E$ admet la décomposition

$$v = \underbrace{v - p_F(v)}_{F^\perp} + \underbrace{p_F(v)}_F.$$

Cela démontre que $E = F \oplus F^\perp$, et donc que $(F^\perp)^\perp = F$.

Supposons maintenant que F n'est pas nécessairement fermé. On applique le premier point au sous-espace vectoriel \overline{F} . Comme $F^\perp = (\overline{F})^\perp$ on a la décomposition orthogonale $E = \overline{F} \oplus F^\perp$ et donc $(F^\perp)^\perp = \overline{F}$.

Le dernier point est une conséquence immédiate du deuxième point. \square

On peut maintenant facilement déterminer le dual E^* d'un espace de Hilbert E .

Théorème 3.23 (Théorème de représentation de Riesz) *Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Alors il existe un unique vecteur $v \in E$ tel que*

$$f(x) = \langle x, v \rangle.$$

pour tout $x \in E$.

Preuve du théorème : Si $f = 0$ on prend $v = 0$. Supposons maintenant que f est non-nulle : alors $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel fermé de E distinct de E .

Vérifions tout d'abord que $\dim \ker(f)^\perp = 1$. Soient $x, y \in \ker(f)^\perp$ deux vecteurs non-nuls. Comme $\ker(f)^\perp \cap \ker(f) = \{0\}$ on a $f(x) \neq 0$ et $f(y) \neq 0$: cela entraîne que $\frac{x}{f(x)} - \frac{y}{f(y)} \in \ker(f)^\perp \cap \ker(f)$ et donc que la famille $\{x, y\}$ est liée.

Sachant que $\dim \ker(f)^\perp = 1$ et que $f : \ker(f)^\perp \rightarrow \mathbb{R}$ est non-nulle, il existe une unique vecteur $v_0 \in \ker(f)^\perp$ tel que $f(v_0) = 1$. On remarque alors que l'égalité $f(x) = \langle x, \frac{v_0}{\|v_0\|^2} \rangle$ est satisfaite sur $\ker(f)$ et sur $\ker(f)^\perp$ séparément. On peut maintenant conclure car $E = \ker(f) \oplus \ker(f)^\perp$. \square

Pour tout $v \in V$ notons $j_v \in E^*$ la forme linéaire $j_v(x) = \langle x, v \rangle$. Le théorème précédent affirme que l'application

$$j : E \rightarrow E^*, \quad v \mapsto j_v$$

est un isomorphisme. On vérifie de plus que j est une isométrie.

3.5.4 Bases hilbertiennes dénombrables

Soit $(E, \langle -, - \rangle)$ un espace de Hilbert. Soit $\mathcal{B} := \{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ une famille dénombrable de vecteurs de E .

Définition 3.24 \mathcal{B} est une base hilbertienne dénombrable de E si

- \mathcal{B} est une famille orthonormée,
- $\text{vect}_{\mathbb{R}}(\mathcal{B})$ est sous-espace vectoriel réel dense dans E .

Théorème 3.25 Un espace de Hilbert E possède une base hilbertienne dénombrable si et seulement si E est séparable.

Preuve : Si \mathcal{B} est une base hilbertienne dénombrable de E , alors $\text{vect}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{B})$ est une partie dense et dénombrable de E .

Soit $\mathcal{F} \subset E$ une partie dense et dénombrable de E . Il existe une sous-famille $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ libre tel que $\text{vect}_{\mathbb{R}}(\mathcal{F}) = \text{vect}_{\mathbb{R}}(\mathcal{F}')$: ainsi $\text{vect}_{\mathbb{R}}(\mathcal{F}')$ est dense dans E . Par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt on peut associer à la famille libre dénombrable \mathcal{F}' une famille orthonormée \mathcal{B} telle que $\text{vect}_{\mathbb{R}}(\mathcal{F}') = \text{vect}_{\mathbb{R}}(\mathcal{B})$. La famille \mathcal{B} est alors une base hilbertienne dénombrable de E . \square

3.5.5 Espaces de Hilbert séparables

Théorème 3.26 *Tout espace de Hilbert séparable est isométrique à l_2 .*

Soit $(E, \langle -, - \rangle)$ un espace de Hilbert séparable. On considère une base hilbertienne dénombrable $\mathcal{B} := \{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ de E .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $V_n := \text{vect}(e_0, \dots, e_n) \subset E$ et $V_n^\perp \subset E$ son orthogonal. Tout vecteur $x \in E$ s'écrit

$$x = x_n + x'_n$$

avec $x_n \in V_n$ et $x'_n \in V_n^\perp$. On voit que

$$x_n = \sum_{i=0}^n \langle x, e_i \rangle e_i, \quad \text{et} \quad \|x'_n\| = d(x, V_n).$$

On a de plus $\|x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x'_n\|^2$ et $\|x_n\|^2 = \sum_{i=0}^n \langle x, e_i \rangle^2$.

Comme $\text{vect}(\mathcal{B}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$ est dense dans E on a $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, V_n) = 0$ pour tout $x \in E$. On a donc démontré la relation de Plancherel

$$\|x\|^2 = \sum_{i \in \mathbb{N}} \langle x, e_i \rangle^2, \quad \forall x \in E.$$

Autrement dit, l'application $\phi : E \rightarrow l_2$ tel que $\phi(x)$ est égal à la suite $(\langle x, e_i \rangle)_{i \in \mathbb{N}}$ est une isométrie.

4 Topologies faibles

4.1 Semi-normes

Soit E un espace vectoriel réel.

Définition 4.1 *Une fonction $p : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ est une semi-norme si pour tout $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :*

- $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$,
- $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$.

Exemple 4.2 — *Si f_1, \dots, f_n sont des formes linéaires sur E alors $p(x) =$*

$$\sum_{k=1}^n |f_k(x)| \text{ est une semi-norme.}$$

— *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ on a les semi-normes*

$$p_K(f) = \sup_{x \in K} |f(x)|$$

associées aux compacts $K \subset \Omega$.

— Sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ on a les semi-normes

$$N_{n,J}(f) = \sup_{0 \leq j \leq n} \sup_{x \in J} |f^{(j)}(x)|$$

associées à un intervalle compact $J \subset \mathbb{R}$ et un entier naturel n .

— Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, la fonction $x \mapsto d(x, F) := \inf_{y \in F} \|x - y\|$ est une semi-norme.

4.2 Théorème de Hahn-Banach : version analytique

Soit E un espace vectoriel réel muni d'une semi-norme $p : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. On commence avec le lemme suivant.

Lemme 4.3 Soit $f_W : W \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire définie sur un sous-espace vectoriel $W \subset E$. On suppose que f_W satisfait la relation

$$f_W(x) \leq p(x), \quad \forall x \in W. \quad (3)$$

Pour tout sous-espace vectoriel $W \subset W' \subset E$, tel que W'/W est de dimension finie, il existe une forme linéaire $f_{W'} : W' \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- $f_{W'}(x) = f_W(x), \quad \forall x \in W.$
- $f_{W'}(x') \leq p(x'), \quad \forall x' \in W'.$

Preuve : Il suffit de démontrer le cas où $\dim W'/W = 1$. Soit $v \in V$ tel que $W' = W \oplus \mathbb{R}v$. À tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on associe la forme linéaire $F_\alpha : W' \rightarrow \mathbb{R}$ définie par la relation $F_\alpha(x + \lambda v) = f_W(x) + \lambda\alpha$.

On cherche pour quels α on a la relation $F_\alpha(x') \leq p(x'), \forall x' \in W'$, c'est à dire

$$f_W(x) + \lambda\alpha \leq p(x + \lambda v), \quad \forall (x, \lambda) \in W \times \mathbb{R}$$

Les relation précédentes sont équivalentes à

$$f_W(x) + \alpha \leq p(x + v), \quad f_W(x) - \alpha \leq p(x - v), \quad \forall x \in W.$$

Finalement on doit avoir $A \leq \alpha \leq B$ avec $B = \inf\{p(x + v) - f_W(x), x \in W\}$ et $A = \sup\{f_W(x) - p(x - v), x \in W\}$. Comme $A \leq B$ un tel choix est possible. \square

Une récurrence transfinitie (utilisant le lemme de Zorn) permet de généraliser le lemme précédent au cas où $W' = E$.

Théorème 4.4 (Théorème de Hahn-Banach : version analytique) Soit $f_W : W \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire définie sur un sous-espace vectoriel $W \subset E$. On suppose que f_W satisfait la relation $f_W(x) \leq p(x), \forall x \in W$.

Il existe une forme linéaire $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- $f(x) = f_W(x), \quad \forall x \in W.$
- $f(y) \leq p(y), \quad \forall y \in E.$

4.3 Espaces duaux

Dans cette section on va donner quelques conséquences immédiates du théorème de Hahn-Banach qui concernent le dual E^* d'un espace vectoriel normé $(E, \| - \|)$.

Proposition 4.5 *Soit $(E, \| - \|)$ un espace vectoriel normé. Alors :*

- $E^* \neq \{0\}$.
- $v \in E$ est non-nul si et seulement si il existe $f \in E^*$ tel que $f(v) \neq 0$.
- Si $x \neq y \in E$ il existe $f \in E^*$ tel que $f(x) \neq f(y)$.
- Pour tout $v \in E$ il existe $f \in E^*$ tel que $f(v) = \|v\|$ et $\|f\| = 1$.
- Si F est un sous-espace vectoriel de E l'application de restriction $E^* \rightarrow F^*$ est surjective.
- Une sous-espace vectoriel $F \subset E$ est dense si et seulement si son orthogonal $F^\perp := \{f \in E^*, f(x) = 0 \forall x \in F\}$ est réduit à $\{0\}$.

Dans la suite nous utiliserons le crochet de dualité

$$\ll -, - \gg : E^* \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

Nous remarquons que

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} | \ll f, x \gg |, \quad \text{et} \quad \|x\| = \sup_{\|f\|=1} | \ll f, x \gg |$$

Nous avons une application canonique

$$j_E : E \rightarrow E^{**}$$

définie par la relation $\ll j_E(x), f \gg := \ll f, x \gg$ pour tout $(f, x) \in E^* \times E$.

On vérifie immédiatement que

Lemme 4.6 *L'application linéaire $j_E : E \rightarrow E^{**}$ est isométrique.*

Définition 4.7 *Un espace vectoriel normé $(E, \| - \|)$ est réflexif si $j_E : E \rightarrow E^{**}$ est un isomorphisme. Dans ce cas E est un espace de Banach.*

On utilisera le résultat suivant à la section 4.5.

Proposition 4.8 *Soit E un espace de Banach réflexif et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel fermé de E . Alors F est un espace de Banach réflexif.*

Preuve : On note $i : F \rightarrow E$ le morphisme d'inclusion du sous-espace vectoriel fermé F . Soit $F^\perp \subset E^*$ l'orthogonal de F pour la dualité. Comme F est fermé on a $(F^\perp)^\perp = F$. On note $j_E : E \rightarrow E^{**}$ et $j_F : F \rightarrow F^{**}$ les applications canoniques.

On considère les applications linéaires duales :

- L'application $i^* : E^* \rightarrow F^* : i^*$ est surjective et $\ker(i^*) = F^\perp$.
- L'application $i^{**} : F^{**} \rightarrow E^{**} : i^{**}$ est injective et $\text{Image}(i^{**}) = \{T \in E^{**}, T(f) = 0, \forall f \in F^\perp\}$.
- On a la relation $i^{**} \circ j_F = j_E \circ i$.

Soit $T \in F^{**}$ et $i^{**}(T) \in E^{**}$. Comme j_E est bijectif, il existe $x \in E$ tel que $i^{**}(T) = j_E(x)$: on a donc

$$T(i^*(f)) = f(x), \quad \forall f \in E^*.$$

Cela implique que $f(x) = 0, \forall f \in F^\perp$ et donc $x \in (F^\perp)^\perp = F$. Ainsi $T = j_F(x)$. On a montré que l'application $j_F : F \rightarrow F^{**}$ est bijective. \square

Voici une classe importante d'espace de Banach réflexifs.

Proposition 4.9 *Un espace de Hilbert $(E, \langle -, - \rangle)$ est réflexif.*

Preuve. D'après le théorème de Riesz on sait que l'application $i_E : E \rightarrow E^*$ définie par la relation $\langle i(x), y \rangle := \langle x, y \rangle$ est un isomorphisme. Soit $i_E^* : E^{**} \rightarrow E^*$ l'application adjointe de i_E . On vérifie que $i_E^* \circ j_E = i_E$. Ainsi j_E est un isomorphisme. \square

Regardons maintenant le cas des espaces vectoriels normés l_p pour $p \in [1, \infty]$. On désigne par $q \in [1, \infty]$ l'élément satisfaisant la relation $\frac{1}{q} + \frac{1}{q} = 1$. On remarque que $p = 1 \Leftrightarrow q = \infty$ et $p = \infty \Leftrightarrow q = 1$.

Nous avons un autre crochet de dualité

$$\langle -, - \rangle_{p,q} : l_p \times l_q \rightarrow \mathbb{R}$$

définie par la relation $\langle a, b \rangle_{p,q} := \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n b_n$.

L'inégalité de Hölder nous donne que

$$|\langle a, b \rangle_{p,q}| \leq \|a\|_p \cdot \|b\|_q$$

pour tout $(a, b) \in l_p \times l_q$. On a même plus.

Lemme 4.10 *Si $a \in l_p$ on a $\|a\|_p = \sup_{\|b\|_q=1} |\langle a, b \rangle_{p,q}|$.*

Considérons l'application

$$\Phi_p : l_p \rightarrow l_q^*$$

définie par la relation $\langle \Phi_p(a), b \rangle := \langle a, b \rangle_{p,q}$.

Proposition 4.11 *L'application $\Phi_p : l_p \rightarrow l_q^*$ est un isomorphisme si et seulement si $p \neq 1$.*

Preuve : Supposons tout d'abord que $p \neq 1$ (ainsi $q \neq \infty$). Soit $f : l_q \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Tout vecteur $x \in l_q$ s'écrit $x = \sum_{k=0}^n x_k \delta_k + r_n(x)$ avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \|r_n(x)\|_q = 0$. Ici δ_k désigne la suite où tous les termes sont nuls, sauf le k -ième qui vaut 1.

Posons $f(\delta_k) = \alpha_k$. Comme f est continue on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \alpha_k$$

pour tout $x \in l_q$. Le lemme 4.10 nous assure que la suite $\alpha = (\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ appartient à l_p et que $f = \Phi_p(\alpha)$. Nous avons montré que Φ_p est surjective (l'injectivité est évidente).

Considérons maintenant le cas où $p = 1$. Nous allons montrer que

$$\Phi_1 : l_1 \rightarrow l_\infty^*$$

n'est pas surjective.

Considérons le sous-espace vectoriel $\mathcal{C} \subset l_\infty$ formé des suites convergentes. On considère la forme linéaire $f_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ qui à une suite de \mathcal{C} associe sa limite. On remarque que $|f_{\mathcal{C}}(x)| \leq \|x\|_\infty$ pour tout $x \in \mathcal{C}$. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe $F \in l_\infty^*$ tel que $F(x) = f_{\mathcal{C}}(x), \forall x \in \mathcal{C}$. On remarque aisément que F n'appartient pas à l'image de Φ_1 . \square

Proposition 4.12 l_p est réflexif si et seulement si $p \in]1, \infty[$.

Preuve : On considère les applications linéaires $\Phi_p : l_p \rightarrow l_q^*$ et $\Phi_q : l_q \rightarrow l_p^*$. Notons $\Phi_q^* : l_p^* \rightarrow l_q^{**}$ l'application duale de Φ_q . On vérifie que $\Phi_p = \Phi_q^* \circ j_{l_p}$.

Si $p, q > 1$ alors Φ_p et Φ_q sont des isomorphismes et donc j_{l_p} est un isomorphisme.

Pour $p = 1, \infty$ on obtient les relations $\Phi_1 = \Phi_\infty^* \circ j_{l_1}$ et $\Phi_\infty = \Phi_1^* \circ j_{l_\infty}$. Comme Φ_∞ est un isomorphisme et que Φ_1 n'est pas un isomorphisme, on voit que j_{l_1} et j_{l_∞} ne sont pas des isomorphismes. \square

4.4 Topologie associée à une famille de semi-normes

Soit \mathcal{P} une famille de semi-normes sur un espace vectoriel réel E . On suppose que la famille \mathcal{P} est *séparante* :

$$(\forall p \in \mathcal{P} \quad p(x) = 0) \quad \text{implique} \quad x = 0$$

Voici quelques exemples de familles séparantes de semi-normes :

- \mathcal{P} est réduit à une norme sur E .

- $E = C^1([0, 1])$ et $\mathcal{P} := \{p_0, p_1\}$. Ici $p_0(f) = |f(0)|$ et $p_1(f) = \sup |f'|$.
- $E = C^0(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{P} := \{p_K, K \text{ compact}\}$. Ici $p_K(f) = \sup_{x \in K} |f(x)|$.
- $E = C^0(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{P}' := \{p_n, n \geq 0\}$. Ici $p_n(f) = \sup_{\|x\| \leq n} |f(x)|$.
- $E = C^\infty(\mathbb{R})$ et $\mathcal{P} := \{p_n, n \geq 0\}$. Ici $p_n(f) = \sup_{0 \leq k \leq n} \sup_{|x| \leq n} |f^{(k)}(x)|$.
- E est un espace vectoriel normé et $\mathcal{P} := \{|f|, f \in E^*\}$.

A l'aide de la famille de semi-normes \mathcal{P} on peut définir une notion de convergence et également une topologie. De plus lorsque cette famille est dénombrable on peut lui associer une distance. C'est ce que nous allons faire maintenant.

Définition 4.13 (Suites \mathcal{P} -convergentes) On dit qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E converge vers x au sens de \mathcal{P} si

$$\forall p \in \mathcal{P}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n - x) = 0.$$

On utilisera la notation $x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} x$ dans ce cas. On remarque que la limite ainsi définie est unique.

Si $p \in \mathcal{P}$ on définit la boule relative à p :

$$B_p(x, r) := \{y \in E, p(y - x) < r\}$$

On remarque que les "boules" $B_p(x, r)$ sont convexes.

Définition 4.14 (\mathcal{P} -topologie) Un sous-ensemble $\mathcal{U} \subset E$ est un \mathcal{P} -ouvert si pour tout $x \in \mathcal{U}$ il existe une partie finie $\mathcal{P}_x \subset \mathcal{P}$ et $r > 0$ tel que

$$\bigcap_{p \in \mathcal{P}_x} B_p(x, r) \subset \mathcal{U}.$$

Exercice 4.15 On peut vérifier les faits suivants

- La \mathcal{P} -topologie est séparée.
- la somme $E \times E \rightarrow E$ est continue pour le \mathcal{P} -topologie.
- le produit externe $\mathbb{R} \times E \rightarrow E$ est continue pour le \mathcal{P} -topologie.
- On a $x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} x$ si et seulement si pour tout \mathcal{P} -ouvert \mathcal{U} contenant x il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \implies x_n \in \mathcal{U}$.

Voici un analogue du lemme 2.9.

Lemme 4.16 Soit $X \subset E$ un sous ensemble \mathcal{P} -fermé. Alors pour toute suite (x_n) d'éléments de X , si $\exists x \in E$ tel que $x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} x$, alors $x \in X$.

On peut facilement caractériser les formes linéaires qui sont continues pour la \mathcal{P} -topologie.

Lemme 4.17 *Une forme linéaire $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est continue pour la \mathcal{P} -topologie s'il existe une famille finie $\mathcal{P}_f \subset \mathcal{P}$ et $C > 0$ tels que*

$$|f(x)| \leq C \sum_{p \in \mathcal{P}_f} p(x), \quad \forall x \in E.$$

Nous terminons cette section en considérant le cas où la famille séparante de semi-normes est *dénombrable* : $\mathcal{P} := \{p_n, n \in \mathbb{N}\}$. On peut former l'application

$$d_{\mathcal{P}}(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \inf\{1, p_n(x - y)\}, \quad \forall x, y \in E.$$

On a alors le résultat suivant.

Proposition 4.18 *$d_{\mathcal{P}}$ définit une distance sur E et la \mathcal{P} -topologie coïncide avec la topologie induite par $d_{\mathcal{P}}$.*

On aura un intérêt tout particulier pour les espaces de Fréchet.

Définition 4.19 *Soit E un espace vectoriel muni d'une famille \mathcal{P} dénombrable et séparante de semi-normes. E est un espace de Fréchet s'il est complet pour la distance $d_{\mathcal{P}}$.*

Voici deux exemples d'espaces de Fréchet :

— $C^0(\mathbb{R}^n)$ muni de la famille de semi-normes

$$p_n(f) = \sup_{\|x\| \leq n} |f(x)|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

— $C^\infty(\mathbb{R})$ muni de la famille de semi-normes

$$p_n(f) = \sup_{0 \leq k \leq n} \sup_{|x| \leq n} |f^{(k)}(x)|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Cette hypothèse de complétude permet d'appliquer aux espaces de Fréchet le théorème de Baire et ses conséquences, entre autres :

- le théorème de Banach-Steinhaus
- le théorème de l'application ouverte,
- le théorème du graphe fermé.

Voici par exemple l'analogie de la proposition 3.12 dans le cadre des espaces de Fréchet.

Proposition 4.20 *Soit (E, \mathcal{P}) un espace de Fréchet.*

Soit $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, une suite de formes linéaires continues¹. On suppose que pour tout $x \in E$ la suite de réels $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge : on note $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ sa limite.

Alors la forme linéaire $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

4.5 Topologies faibles

Ici on travaille avec un espace vectoriel normé E . On note $j_E : E \rightarrow E^{**}$ le morphisme canonique.

1. La topologie faible sur E , notée $\sigma(E, E^*)$, est celle associée à la famille de semi-normes $\{|f|, f \in E^*\}$.
2. La topologie faible-* sur E^* , notée $\sigma(E^*, E)$, est celle associée à la famille de semi-normes $\{|j_E(x)|, x \in E\}$.

Définition 4.21 1. *Une suite (x_n) de E converge faiblement vers x si pour toute forme linéaire $f \in E^*$ on a $\lim_n f(x_n) = f(x)$. Dans ce cas on utilise la notation $x_n \rightharpoonup x$.*

2. *Une suite (f_n) de E^* converge faiblement-* vers f si pour tout $x \in E$ on a $\lim_n f_n(x) = f(x)$. Dans ce cas on utilise la notation $f_n \xrightarrow{*} f$.*

Un exemple important concerne les espaces de Hilbert.

Définition 4.22 *Soit H un espace de Hilbert. Une suite (x_n) de H converge faiblement vers x si et seulement si $\lim_n \langle x_n, y \rangle = \langle x, y \rangle$ pour tout $y \in H$.*

L'exercice suivant permet de comparer les topologies faibles avec celle définie par la norme.

Exercice 4.23 1. *Soit $T : E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire. Alors T est continue pour la topologie forte si et seulement si T est continue pour la topologie faible $\sigma(E, E^*)$.*

2. *Soit $\varphi : E^* \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire. Alors φ est continue pour la topologie faible-* $\sigma(E^*, E)$ si et seulement si il existe $x \in E$ tel que $\varphi(f) = f(x)$, $\forall f \in E^*$.*

1. pour la \mathcal{P} -topologie.

Les lemmes suivants sont des conséquences du théorème de Banach-Steinhaus (Théorème 3.11). Traitons tout d'abord le cas des suites faiblement convergentes dans E .

Lemme 4.24 *Soit (x_n) une suite de E .*

1. *Supposons que pour tout $f \in E^*$, la suite de réels $(f(x_n))$ converge. Alors la suite (x_n) est bornée, et si E est un espace de Banach réflexif, on peut conclure $\exists x \in E$ tel que $x_n \rightarrow x$.*
2. *Si $x_n \rightarrow x$ alors (x_n) est une suite bornée de E et $\|x\| \leq \liminf_n \|x_n\|$.*

Preuve : Soit $T_n : E^* \rightarrow \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par $T_n(f) = f(x_n)$: on remarque que $\|T_n\| = \|x_n\|$. On suppose que pour tout $f \in E^*$ la suite $T_n(f)$ converge. Comme E^* est un espace de Banach on peut appliquer le théorème de Banach-Steinhaus : $C := \sup_n \|T_n\| = \sup_n \|x_n\|$ est fini et il existe $T : E^* \rightarrow \mathbb{R}$ linéaire continu tel que $\|T(f)\| \leq C\|f\|$ et $T(f) = \lim_n T_n(f)$ pour tout $f \in E^*$. On a montré que la suite (x_n) est bornée. De plus si E est réflexif il existe $x \in E$ tel que $T(f) = f(x)$, $\forall f \in E^*$. \square

Considérons maintenant le cas des suites faiblement-* convergentes dans E^* .

Lemme 4.25 *Soit (f_n) une suite de E^* .*

1. *Supposons que pour tout $x \in E$, la suite de réels $(f_n(x))$ converge. On peut conclure $\exists f \in E^*$ tel que $f_n \xrightarrow{*} f$ dans les deux cas suivants :*
 - *E est un espace de Banach.*
 - *La suite (f_n) est bornée.*
2. *Supposons que E est un espace de Banach. Si $f_n \xrightarrow{*} f$ alors (f_n) est une suite bornée de E^* et $\|f\| \leq \liminf_n \|f_n\|$.*

Preuve : Soit $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ une suite de formes linéaires continues tel que pour tout $x \in E$, la suite de réels $(f_n(x))$ converge. On pose $f(x) = \lim_n f_n(x)$.

Si E est un espace de Banach, on peut appliquer le théorème de Banach-Steinhaus, et on obtient que f est continue. Si la suite (f_n) est bornée, on voit que $\|f(x)\| \leq C\|x\|$ avec $C = \sup_n \|f_n\|$. Le premier point du lemme est démontré.

Le deuxième point est une conséquence immédiate du théorème de Banach-Steinhaus. \square

Exemple 4.26 *On considère l'espace vectoriel $E = C^1([0, 1])$ muni de la norme*

$$\|g\| = \sup |g| + |g'(\frac{1}{2})|$$

La suite $T_n \in E^*$ définie par $T_n(g) = n(g(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}) - g(\frac{1}{2}))$ converge faiblement-* vers la forme linéaire continue $g \mapsto g'(\frac{1}{2})$ tandis que la suite $\|T_n\|$ tend vers l'infini.

Notons $x_n \rightarrow x$ (resp. $f_n \rightarrow f$) la convergence en norme d'une suite de E (resp. E^*).

Lemme 4.27 Soient (x_n) et (f_n) deux suites de E et E^* .

1. Si $x_n \rightarrow x$ alors $x_n \rightharpoonup x$.
2. Si $f_n \rightarrow f$ alors $f_n \xrightarrow{*} f$.
3. Supposons que E est un espace de Banach. La suite de réels $f_n(x_n)$ converge dans les deux cas suivants
 - a) $x_n \rightarrow x$ et $f_n \rightarrow f$,
 - b) $x_n \rightarrow x$ et $f_n \xrightarrow{*} f$.
4. Supposons que H est un espace de Hilbert et considérons une suite (x_n) de H convergente faiblement vers $x \in H$. Alors $x_n \rightarrow x$ si et seulement si $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$.

Dans le cadre des topologie faibles, le lemme 4.16 prend la forme suivante.

- Lemme 4.28**
1. Soit $X \subset E$ un sous ensemble fermé pour la topologie faible. Si $x_n \rightharpoonup x$ et si tous les éléments x_n appartiennent à X , alors $x \in X$.
 2. Soit $Y \subset E^*$ un sous ensemble fermé pour la topologie faible-*. Si $f_n \xrightarrow{*} f$ et si tous les éléments f_n appartiennent à Y , alors $f \in Y$.

On peut maintenant énoncer quelques résultats importants de compacité.

Théorème 4.29 (Théorème de Banach-Alaoglu) Soit E un espace vectoriel normé.

La boule unité (fermée) de E^* est compacte pour la topologie faible-*.

Considérons le cas particulier où E est séparable.

Théorème 4.30 (Compacité faible séquentielle dans E^*) Soit E un espace vectoriel normé séparable.

Toute suite bornée de E^* admet une sous-suite faiblement-* convergente.

Preuve : Soit $\{\alpha_p, p \in \mathbb{N}\}$ une partie dense de E . Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de E^* . On remarque que pour tout $p \in \mathbb{N}$ la suite de réels $(f_n(\alpha_p))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Nous allons utiliser le procédé diagonal de Cantor :

- Soit $\phi_0 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissant tel que $(f_{\phi_0(n)}(\alpha_0))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
- Soit $\phi_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissant tel que $(f_{\phi_0 \circ \phi_1(n)}(\alpha_1))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
- ...
- Soit $\phi_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissant tel que $(f_{\phi_0 \circ \dots \circ \phi_k(n)}(\alpha_k))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
- ...

On considère $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissant défini par la relation $\varphi(n) = \phi_0 \circ \dots \circ \phi_n(n)$. On remarque que pour tout $p \in \mathbb{N}$ la suite de réels $(f_{\varphi(n)}(\alpha_p))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. Comme $\{\alpha_p, p \in \mathbb{N}\}$ est une partie dense de E et que $(f_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée de E^* , on montre sans trop de peine que pour tout $x \in E$ la suite de réels $(f_{\varphi(n)}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. On pose alors $f(x) := \lim_n f_{\varphi(n)}(x)$. On a donc que $f_{\varphi(n)} \xrightarrow{*} f$. \square

Considérons maintenant le cas d'un espace de Banach réflexif.

Théorème 4.31 (Compacité faible séquentielle dans E) *Soit E un espace de Banach réflexif (en particulier un espace de Hilbert).*

Toute suite bornée de E admet une sous-suite faiblement convergente.

Preuve : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de E : on note $\text{Vect}_{\mathbb{R}}(x_n, n \in \mathbb{N})$ le sous-espace vectoriel engendré par cette famille et $F \subset E$ l'adhérence de $\text{Vect}_{\mathbb{R}}(x_n, n \in \mathbb{N})$ dans E .

On remarque que F est un espace de Banach réflexif car F est un sous-espace vectoriel fermé de E (voir la proposition 4.8). D'autre part F est séparable car $\text{Vect}_{\mathbb{Q}}(x_n, n \in \mathbb{N})$ est une partie dénombrable dense de F .

Maintenant on peut appliquer le théorème 4.30 à l'espace vectoriel normé F^* : toute suite bornée de $F^{**} \simeq F$ admet une sous-suite faiblement convergente. Ici on se sert du fait que la topologie faible- $*$ $\sigma(F^{**}, F^*)$ sur F^{**} coïncide avec la topologie faible $\sigma(F, F^*)$ sur $F \simeq F^{**}$.

Ainsi la suite bornée $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de F admet une sous-suite $(x_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ faiblement convergente dans F . Cela implique que $(x_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est faiblement convergente dans E . \square

Exemple 4.32 — *Soit $1 < p < \infty$. Toute suite bornée de l_p admet une sous-suite faiblement convergente.*

- La suite³ $\delta_n \in l_1$ n'admet pas de sous-suite faiblement convergente.
- Soit $\theta_n \in C([0, 1])$ une suite de fonctions bornée pour la norme $\| - \|_{\infty}$. Alors θ_n admet une sous-suite convergente faiblement dans $L^2([0, 1])$.

2. F^* est séparable car F est séparable.

3. $\delta_n(k) = 0$ si $k \neq n$ et $\delta_n(n) = 1$.

5 Transformées de Fourier et convolution

5.1 Espaces L^p : boîte à outils

L'espace vectoriel \mathbb{R}^d est muni de la tribu des boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. La mesure de Lebesgue est l'unique mesure $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$ satisfaisant les relations

$$\mu([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]) = \prod_{k=1}^d (b_k - a_k).$$

Définition 5.1 — On note $\mathcal{N}(\mathbb{R}^d)$ l'espace vectoriel des fonctions mesurables, nulles presque partout.

— Pour $p \in [1, \infty[$, on note $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions mesurables f telles que $\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p d\mu(x) < \infty$. On pose $L^p(\mathbb{R}^d) := \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)/\mathcal{N}(\mathbb{R}^d)$, et pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ on note

$$\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

— Soit $p = \infty$. On note $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$ l'espace vectoriel des fonctions mesurables f telles que $\|f\|_\infty := \inf\{M \mid \mu(\{x, |f(x)| > M\}) = 0\}$ est fini. On pose $L^\infty(\mathbb{R}^d) := \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^d)/\mathcal{N}(\mathbb{R}^d)$.

Remarque 5.2 Pour simplifier nos notations, l'intégrale d'une fonction mesurable relativement à la mesure de Lebesgue sera noté simplement $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx$.

Voici quelques énoncés fondamentaux de théorie de la mesure.

Théorème 5.3 (Théorème de convergence monotone) Soit $f_n : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty]$ une suite de fonctions mesurables. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. On pose $F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

Alors F est une fonction mesurable et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} F(x) dx,$$

cette équation pouvant se réduire à $\infty = \infty$.

Lorsque l'on travaille avec des fonctions mesurables $g_n : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty]$, on peut appliquer le théorème précédent aux fonctions mesurables $f_n(x) := \inf\{f_k(x), k \geq n\}$. Si on pose $\lim\text{-inf}(g_n)(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ on obtient l'inégalité

$$\int_{\mathbb{R}^d} \lim\text{-inf}(g_n)(x) dx \leq \lim\text{-inf} \left(\int_{\mathbb{R}^d} g_n(x) dx \right).$$

Cette inégalité est appelé le lemme de Fatou.

Voici maintenant deux résultats importants qui font le lien entre la convergence simple et la convergence en norme.

Théorème 5.4 (Théorème de convergence dominée de Lebesgue) Soit (f_n) une suite de fonctions de $L^p(\mathbb{R}^d)$. On suppose que

- La limite $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ existe pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$.
- Il existe $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ telle que $|f_n| \leq g, \forall n \in \mathbb{N}$.

Alors $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_p = 0$. En particulier, lorsque $p = 1$ cela entraîne que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx.$$

Voici une "réciproque" du théorème 5.4.

Théorème 5.5 Soit (f_n) une suite de fonctions de $L^p(\mathbb{R}^d)$ convergente en norme vers $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Alors il existe une sous-suite $(f_{\phi(n)})$ telle que $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{\phi(n)}(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$.

On termine cette section en donnant un exemple d'utilisation du théorème de convergence dominée : un critère de dérivation pour les fonctions d'une variable définies par une intégrale.

Proposition 5.6 Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. On considère une fonction $F : I \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant les conditions suivantes :

- Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto F(t, x)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^d)$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, la dérivée partielle $\frac{\partial F}{\partial t}(x, t), t \in I$ existe.
- Pour tout $t_0 \in I$, il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ contenant t_0 et une fonction $g_J \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\left| \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) \right| \leq g_J(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \forall t \in J.$$

Alors la fonction $t \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} F(t, x) dx$ est dérivable et l'on a

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\mathbb{R}^d} F(t, x) dx \right) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) dx.$$

5.2 Théorèmes de Fubini et Tonelli

Soient $d_1, d_2 \geq 1$ et $d = d_1 + d_2$. On travaille sur $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \simeq \mathbb{R}^d$.

Dans les énoncés suivants on considère une fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ on note $f(x, y)$ l'évaluation de f en (x, y) .

Théorème 5.7 (Fubini) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

- Pour presque tout $y \in \mathbb{R}^{d_2}$, la fonction $f^y(x) := f(x, y)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^{d_1})$.
- La fonction $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x, y) dx$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^{d_2})$.
- On a la formule de Fubini

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, y) dx dy.$$

La formule de Fubini est aussi un moyen de détecter quand une fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable définit un élément de $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 5.8 (Tonelli) Soit $g : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty]$ mesurable.

- Pour presque tout $y \in \mathbb{R}^{d_2}$, la fonction $g^y(x) := g(x, y)$ est mesurable sur \mathbb{R}^{d_1} .
- La fonction $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^{d_1}} g(x, y) dx$ est mesurable sur \mathbb{R}^{d_2} .
- On a la formule de Fubini-Tonelli

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} g(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^d} g(x, y) dx dy,$$

cette équation pouvant se réduire à $\infty = \infty$.

Ainsi une fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable définit un élément de $L^1(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} |f(x, y)| dx \right) dy < \infty.$$

5.3 Espaces de Banach L^p

L'étude de ces espaces requiert la notion d'exposant conjugué : pour $p \in [1, \infty]$ on désigne par $q \in [1, \infty]$ l'unique élément vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On remarque que $p \in \{1, \infty\} \iff q \in \{1, \infty\}$.

Le premier résultat fondamental est l'inégalité de Hölder.

Proposition 5.9 (Inégalité de Hölder) Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$. Alors le produit fg appartient à $L^1(\mathbb{R}^d)$ et

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Preuve de la proposition : On remarque que l'inégalité de Hölder est élémentaire si $p \in \{1, \infty\}$. Considérons maintenant le cas où $p \in]1, \infty[$ (alors $q \in]1, \infty[$). Dans ce cas on utilise le lemme élémentaire suivant qui est une conséquence de la convexité de l'application exponentielle.

Lemme 5.10 *Pour tout $a, b \in [0, \infty]$ on a $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$.*

Posons $F(x) := \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}$ et $G(x) = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ on a $F(x)G(x) \leq \frac{1}{p}F(x)^p + \frac{1}{q}G(x)^q$. Après intégration on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^d} F(x)G(x)dx \leq \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^d} F(x)^p dx + \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}^d} G(x)^q dx = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

c'est à dire $\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$. \square

L'inégalité de Hölder nous permet de vérifier que l'application

$$f \in L^p(\mathbb{R}^d) \longmapsto \|f\|_p$$

est une norme. Comme tout à l'heure ce fait est élémentaire si $p \in \{1, \infty\}$. Traitons le cas où $p \in]1, \infty[$.

Tout d'abord on remarque que $|f + g|^p \leq 2^{p-1}(|f|^p + |g|^p)$. Alors $f + g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ si $f, g \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Maintenant on utilise la majoration

$$|f + g|^p \leq \underbrace{|f|}_{L^p(\mathbb{R}^d)} \underbrace{|f + g|^{p-1}}_{L^q(\mathbb{R}^d)} + \underbrace{|g|}_{L^p(\mathbb{R}^d)} \underbrace{|f + g|^{p-1}}_{L^q(\mathbb{R}^d)}.$$

D'après l'inégalité de Hölder on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f + g|^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \| |f + g|^{p-1} \|_q.$$

En remarquant que $\| |f + g|^{p-1} \|_q = (\int_{\mathbb{R}^d} |f + g|^p)^{1/q}$, on obtient $\|f + g\|_p = (\int_{\mathbb{R}^d} |f + g|^p)^{1-1/q} \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. \square

On conclut cette section avec le résultat fondamental suivant.

Théorème 5.11 *Soit $p \in [1, \infty]$. L'espace vectoriel normé $(L^p(\mathbb{R}^d), \| - \|_p)$ est un espace de Banach.*

5.4 Convolution et régularisation

Le support d'une fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ est par définition égal à l'adhérence du sous-ensemble $\{x \in \mathbb{R}^d, f(x) \neq 0\}$. On le note $\text{Support}(f)$.

5.4.1 Convolution dans $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$

On désigne par $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ (resp. $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$) l'espace des fonctions continues (resp. \mathcal{C}^∞) à support compact sur \mathbb{R}^d .

Exemple 5.12 — Si $A = \mathbb{R}^d \setminus B(a, r)$ alors $f_A(x) = d(x, A)$ est une fonction continue à support compact sur \mathbb{R}^d .

— Si $a < b \in \mathbb{R}$, alors la fonction $F_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par les relations

$$F_{a,b}(x) = \begin{cases} \exp((a-x)^{-1} + (x-b)^{-1}), & \forall t \in]a, b[\\ 0, & \forall t \notin]a, b[\end{cases}$$

est \mathcal{C}^∞ , et elle est supportée sur l'intervalle $[a, b]$.

— La fonction $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ définie par les relations⁴

$$F(x) = \begin{cases} \exp((\|x\|^2 - 1)^{-1}), & \forall \|x\| < 1, \\ 0, & \forall \|x\| \geq 1, \end{cases}$$

est \mathcal{C}^∞ et à support compact.

Définition 5.13 Si $f, g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$, la convolution de f par g désigne la fonction définie par la relation

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

On remarque que $f \star g = g \star f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ et que l'on a

$$\text{Support}(f \star g) \subset \text{Support}(f) + \text{Support}(g).$$

Proposition 5.14 Soient $g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ et $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Alors $f \star g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

De plus on a

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(f \star g) = \frac{\partial}{\partial x_k}(f) \star g.$$

4. $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^d x_k^2$

5.4.2 Convolution dans $L^1(\mathbb{R}^d)$

Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On considère la fonction mesurable

$$F(x, y) = f(x - y)g(y).$$

D'après le théorème de Tonelli, $F \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ car

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |F(x, y)| dx \right) dy = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty.$$

Sachant que $F \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, on sait d'après le théorème de Fubini que l'intégrale

$$f \star g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)g(y)dy$$

est finie pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, et que cela définit une fonction $f \star g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On a de plus

$$\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

5.4.3 Régularisation

Dans cette partie on travaille avec $p \in [1, \infty[$. Soit $q \in]1, \infty]$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Pour $\varphi \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ la fonction $y \mapsto \varphi(x - y)f(y)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^d)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ (car $\varphi(x - y) \in L^q(\mathbb{R}^d)$). On peut donc considérer

$$\varphi \star f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x - y)f(y)dy.$$

Proposition 5.15 Soient $\varphi \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Alors

- $\varphi \star f$ est continue, bornée et $\|\varphi \star f\|_\infty \leq \|\varphi\|_q \|f\|_p$,
- $\varphi \star f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\|\varphi \star f\|_p \leq \|\varphi\|_1 \|f\|_p$,

Preuve : Le premier point est élémentaire et découle immédiatement de l'inégalité de Hölder. Démontrons le deuxième point. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, la fonction $y \mapsto |\varphi(x - y)|^{\frac{1}{p}} |f(y)|$ appartient à $L^p(\mathbb{R}^d)$ et la fonction $y \mapsto |\varphi(x - y)|^{\frac{1}{q}}$ appartient à $L^q(\mathbb{R}^d)$. Ainsi d'après l'inégalité de Hölder on a

$$|\varphi \star f(x)| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x - y)| |f(y)|^p dy \right)^{1/p} (\|\varphi\|_1)^{1/q}$$

En intégrant cette inégalité sur $x \in \mathbb{R}^d$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi \star f(x)|^p dx \leq (\|\varphi\|_1)^{p/q} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x - y)| |f(y)|^p dy dx = (\|\varphi\|_1)^{p/q+1} (\|f\|_p)^p.$$

Le deuxième point est démontré. \square

Définition 5.16 Une suite $\phi_n \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ est régularisante si

- $\phi_n(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^d, \forall n \in \mathbb{N}$,
- $\int_{\mathbb{R}^d} \phi_n(x) dx = 1, \forall n \in \mathbb{N}$,
- pour tout $r > 0$ la suite $\int_{\|x\| \geq r} \phi_n(x) dx$ tends vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$.

Exemple 5.17 Soit $g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ une fonction non-nulle. Alors

$$\phi_n(x) := \frac{n^d}{\int_{\mathbb{R}^d} g^2(x) dx} g(nx)^2$$

est une suite régularisante. Si la fonction g est \mathcal{C}^∞ alors les fonctions ϕ_n sont aussi \mathcal{C}^∞ .

Voici le point clé des suites régularisantes.

Proposition 5.18 Soit $\phi_n \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ une suite régularisante. Alors pour toute fonction $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée on a

- $\int_{\mathbb{R}^d} \phi_n(x) F(x) dx \rightarrow F(0)$ lorsque $n \rightarrow \infty$,
- la suite de fonctions $\phi_n \star F$ converge simplement vers F ,
- la suite de fonctions $\phi_n \star F$ converge uniformément vers F si F est à support compact.

Preuve de la proposition : Démontrons le premier point. Comme $F(0)$ est égal à $\int_{\mathbb{R}^d} \phi_n(x) F(0) dx$ on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} \phi_n(x) F(x) dx - F(0) \right| \leq \int_{\mathbb{R}^d} \phi_n(x) |F(x) - F(0)| dx.$$

Soit $\epsilon > 0$. Il existe $r > 0$ tel que $|F(x) - F(0)| \leq \epsilon$ si $\|x\| \leq r$. Alors $\int_{\mathbb{R}^d} \phi_n(x) |F(x) - F(0)| dx = A_r(n) + B_r(n)$ avec

$$A_r(n) := \int_{\|x\| \leq r} \phi_n(x) |F(x) - F(0)| dx \leq \epsilon \int_{\|x\| \leq r} \phi_n(x) dx \leq \epsilon$$

pour tout n . D'autre part on a

$$B_r(n) := \int_{\|x\| \geq r} \phi_n(x) |F(x) - F(0)| dx \leq 2\|F\|_\infty \int_{\|x\| \geq r} \phi_n(x) dx.$$

et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} B_r(n) = 0$. Ainsi $\left| \int_{\mathbb{R}^d} \phi_n(x) F(x) dx - F(0) \right| \leq 2\epsilon$ si n est assez grand.

On constate de la même manière que

$$|\phi_n \star F(y) - F(y)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} \phi_n(x) |F(y-x) - F(y)| dx.$$

La même preuve que précédemment montre que pour y fixé, $\int_{\mathbb{R}^d} \phi_n(x) |F(y-x) - F(y)| dx \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Si F est à support compact, alors F est uniformément continue : $\forall \epsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que $|F(y-x) - F(y)| \leq \epsilon$ si $\|x\| \leq r$. Cela permet de voir que $|\phi_n \star F(y) - F(y)| \leq \epsilon + 2\|F\|_\infty \int_{\|x\| \geq r} \phi_n(x) dx$. On constate donc que $\phi_n \star F$ converge uniformément vers F . \square

On a un résultat analogue dans le cadre des espace $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 5.19 *Soit $p \in [1, \infty[$. Soit $\phi_n \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ une suite régularisante. Alors pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ on a*

$$\|\phi_n \star f - f\|_p \longrightarrow 0$$

lorsque $n \rightarrow \infty$.

Preuve de la proposition : On utilisera le lemme suivant.

Lemme 5.20 *Pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ on note $f_y(x) = f(x-y)$. Alors $y \mapsto f_y$ est une application continue de \mathbb{R}^d dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. En particulier $\lim_{y \rightarrow 0} \|f_y - f\|_p = 0$.*

On remarque que $\phi_n \star f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi_n(y) f(x-y) dy$ tandis que $f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi_n(y) f(x) dy$ pour presque tout x . On a donc

$$\phi_n \star f(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi_n(y) (f(x-y) - f(x)) dy.$$

Comme $\phi_n(y)^{1/q} \in L^q(\mathbb{R}^d)$ et $y \mapsto \phi_n(y)^{1/p} (f(x-y) - f(x))$ appartient à $L^p(\mathbb{R}^d)$, l'inégalité de Hölder donne

$$|\phi_n \star f(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} \phi_n(y) |f(x-y) - f(x)|^p dy.$$

En intégrant cette inégalité sur $x \in \mathbb{R}^d$, on obtient au moyen de Fubini

$$\|\phi_n \star f - f\|_p \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} \phi_n(y) (\|f_y - f\|_p)^p \right)^{1/p}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On peut maintenant conclure avec la proposition 5.18. La fonction $F(y) := (\|f_y - f\|_p)^p$ est continue bornée sur \mathbb{R}^d . Alors $\int_{\mathbb{R}^d} \phi_n(y) (\|f_y - f\|_p)^p$ tends vers $F(0) = 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. \square

Voici un corollaire important de la proposition 5.19.

Corollaire 5.21 Soit $p \in [1, \infty[$. Alors $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est un sous-espace vectoriel dense de $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Preuve du corollaire : On travaille avec une suite régularisante⁵ $\phi_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Pour tout $R > 0$ on définit la fonction $f_R \in L^p(\mathbb{R}^d)$ en posant

$$f_R(x) = \begin{cases} f(x), & \forall \|x\| \leq R, \\ 0, & \forall \|x\| > R. \end{cases}$$

Soit $\epsilon > 0$. Il existe $R > 0$ tel que $\|f_R - f\|_p \leq \epsilon$. Ensuite on remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $\phi_n \star f_R$ est \mathcal{C}^∞ et à support compact. On considère $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|\phi_N \star f_R - f_R\|_p \leq \epsilon$. Alors $g = \phi_N \star f_R \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ vérifie $\|f - g\|_p \leq 2\epsilon$. \square .

Voici un autre corollaire de la proposition 5.18.

Corollaire 5.22 Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d et K un compact de \mathbb{R}^d contenu dans Ω . Alors il existe $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que

- $\text{Support}(\psi) \subset \Omega$,
- $\psi(x) = 1, \forall x \in K$.

Preuve du corollaire : Soit $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ non-nulle. On travaille avec la suite régularisante $\phi_n(x) := \frac{n^d}{\int_{\mathbb{R}^d} g^2(x) dx} g(nx)^2$. Soit $R > 0$ tel que le support de g soit contenu dans la boule $B(0, R)$: alors le support de ϕ_n est contenu dans la boule $B(0, \frac{R}{n})$.

Soit $\epsilon > 0$ la distance entre K et le fermé $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$. Soit $h \in \mathcal{C}^0([0, \infty[)$ telle que $h = 1$ sur l'intervalle $[0, \frac{\epsilon}{4}]$ et $h = 0$ sur l'intervalle $[\frac{\epsilon}{3}, \infty[$. On considère la fonction continue

$$F(x) := h(d(x, K)), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

On remarque que le support de F est contenu dans le compact $K_3 := \{x \in \mathbb{R}^d, d(x, K) \leq \frac{\epsilon}{3}\} \subset \Omega$ et que $F = 1$ sur $K_4 := \{x \in \mathbb{R}^d, d(x, K) \leq \frac{\epsilon}{4}\}$

On travaille avec les fonctions $\psi_n := \phi_n \star F \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Comme le support de ψ_n est inclus dans $K_3 + B(0, \frac{R}{n})$, on voit que le support de ψ_n est contenu dans le compact $K_2 := \{x \in \mathbb{R}^d, d(x, K) \leq \frac{\epsilon}{2}\} \subset \Omega$ dès que $\frac{\epsilon}{3} + \frac{R}{n} \leq \frac{\epsilon}{2}$.

Soit $x \in K$. On a $\psi_n(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi_n(y) F(x - y) dy$. Si $\frac{R}{n} \leq \frac{\epsilon}{4}$ alors $F(x - y) = 1$ si $\phi_n(y) \neq 0$. Cela implique que $\psi_n(x) = 1$ dès que $\frac{R}{n} \leq \frac{\epsilon}{4}$.

On a montré que les fonctions $\psi_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ satisfont les conditions requises pour n assez grand. \square

5. Toutes les fonctions ϕ_n sont \mathcal{C}^∞ .

5.5 Transformée de Fourier

Le produit scalaire sur \mathbb{R}^d est noté $\langle \xi, x \rangle := \sum_{k=1}^d \xi_k x_k$.

Dans toute cette section les fonctions sur \mathbb{R}^d seront à valeurs complexes.

Pour une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ on définit la transformée de Fourier par la formule :

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \xi, x \rangle} f(x) dx.$$

On utilisera aussi la notation $\mathcal{F}(f)$ pour \widehat{f} .

On a un premier constat élémentaire : $\forall f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, la fonction \widehat{f} est bornée et

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1.$$

5.5.1 Transformée de Fourier sur $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

Pour tout $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ on note :

- $|\alpha| = \sum_k \alpha_k$,
- x^α la fonction $x \in \mathbb{R}^d \mapsto (x_1)^{\alpha_1} \dots (x_d)^{\alpha_d}$,
- $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial \xi_1^{\alpha_1}} \circ \dots \circ \frac{\partial^{\alpha_d}}{\partial \xi_d^{\alpha_d}}$.

Tout polynôme sur \mathbb{R}^d est de la forme $P(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} a_\alpha x^\alpha$ (les coefficients $a_\alpha \in \mathbb{C}$ sont tous nuls sauf pour un nombre fini).

Un opérateur différentiel (à coefficient constant) sur \mathbb{R}^d est de la forme $Q(\frac{\partial}{\partial \xi}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} b_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \xi^\alpha}$ (les coefficients $b_\alpha \in \mathbb{C}$ sont tous nuls sauf pour un nombre fini).

Si $P(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} a_\alpha \xi^\alpha$ est un polynôme on notera $P(i\frac{\partial}{\partial x})$ l'opérateur différentiel $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} a_\alpha (i)^{|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}$.

Si $Q(\frac{\partial}{\partial \xi}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} b_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \xi^\alpha}$ est un opérateur différentiel on notera $Q(ix)$ le polynôme $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} b_\alpha (i)^{|\alpha|} x^\alpha$.

Sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ on a deux types d'opérations :

- multiplication $f \mapsto P(x)f$ par un polynôme $P(x)$,
- action d'un opérateur différentiel $f \mapsto Q(\frac{\partial}{\partial x})(f)$.

On a le résultat fondamental suivant

Proposition 5.23 Soit $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

- La transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$ est une fonction lisse. Plus précisément, pour tout opérateur différentiel $Q(\frac{\partial}{\partial \xi})$ on a

$$Q(\frac{\partial}{\partial \xi})(\mathcal{F}(f)) = \mathcal{F}(Q(ix)f)$$

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|\xi\|^n \mathcal{F}(f)(\xi) \rightarrow 0$ lorsque $\|\xi\| \rightarrow \infty$. Plus précisément, pour tout polynôme $P(\xi)$ on a

$$P(\xi)\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}\left(P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)(f)\right)$$

On va maintenant définir l'espace de Schwarz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Définition 5.24 Une fonction $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout opérateur différentiel $Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ la fonction

$$x \mapsto \|x\|^n Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)(F)(x)$$

tends vers 0 lorsque $\|x\| \rightarrow \infty$.

Proposition 5.25 Si $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ alors $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Preuve : Cela découle immédiatement de la proposition 5.23. \square

Terminons cette section en regardant le cas des transformées de Fourier de fonctions continues à support compact.

Proposition 5.26 Soit $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$. Sa transformée de Fourier \hat{f} est une fonction \mathcal{C}^∞ et bornée. De plus $\hat{f}(\xi) \rightarrow 0$ lorsque $\|\xi\| \rightarrow \infty$.

Preuve : Démontrons le dernier point. Soit $\epsilon > 0$. D'après le corollaire 5.21, il existe $F \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tel que $\|f - F\|_1 \leq \epsilon$. Alors $|\hat{f}(\xi) - \hat{F}(\xi)| \leq \epsilon$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$. Comme $\hat{F}(\xi) \rightarrow 0$ lorsque $\|\xi\| \rightarrow \infty$ (voir proposition 5.25) on voit donc que $|\hat{f}(\xi)| \leq 2\epsilon$ si $\|\xi\|$ est assez grand. \square

Exemple 5.27 Pour tout $a > 0$, on a

$$\mathcal{F}\left(e^{-a\|x\|^2}\right)(\xi) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{d/2} e^{-\frac{\|\xi\|^2}{4a^2}}.$$

5.5.2 Transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^d)$

Nous utiliserons la notation suivante : $\check{f}(\xi) = f(-\xi)$

Proposition 5.28 Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

- La transformée de Fourier \hat{f} est une fonction continue et bornée. De plus $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.
- Lemme de Riemann-Lebesgue : $\hat{f}(\xi) \rightarrow 0$ lorsque $\|\xi\| \rightarrow \infty$.

- $\widehat{f \star g} = \widehat{f} \star \widehat{g}$.
- $\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)g(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\widehat{g}(x)dx$.

Notons $\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^d)$ l'espace de Banach des fonctions continues $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ telles que $F(\xi) \rightarrow 0$ lorsque $\|\xi\| \rightarrow \infty$. La proposition précédente affirme que la transformée de Fourier définit une morphisme⁶ continu d'algèbres de Banach

$$\mathcal{F}_1 : L^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^d).$$

Nous allons maintenant aborder la question de la formule d'inversion. On considère l'espace de fonctions

$$L_{\mathcal{F}}^1(\mathbb{R}^d) := \{f \in L^1(\mathbb{R}^d) \mid \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)\}.$$

On remarque que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subset L_{\mathcal{F}}^1(\mathbb{R}^d)$, ainsi $L_{\mathcal{F}}^1(\mathbb{R}^d)$ est un sous-espace vectoriel dense de $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 5.29 *Soit $f \in L_{\mathcal{F}}^1(\mathbb{R}^d)$. Alors f est continue, bornée et*

$$f(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle \xi, x \rangle} \widehat{f}(\xi) d\xi, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \quad (4)$$

En d'autres termes on a $\widehat{\widehat{f}} = (2\pi)^d f$ pour tout $f \in L_{\mathcal{F}}^1(\mathbb{R}^d)$.

Corollaire 5.30 *Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ on a $\widehat{f} = 0$ si et seulement si $f = 0$.*

Pour démontrer le théorème 5.29 nous allons considérer la fonction $G(x) := \pi^{-d/2} e^{-\|x\|^2}$, et la famille $G_n(x) = n^d G(nx)$, $\forall n \geq 1$. On remarque que

$$\int_{\mathbb{R}^d} G_n(x) dx = 1, \quad \forall n \geq 1.$$

De plus, on vérifie en utilisant les calculs de l'exemple 5.27 que $\widehat{G}_n(\xi) = e^{-\frac{\|\xi\|^2}{4n^2}}$.

Nous commençons par le résultat suivant (qui admet une preuve identique à celle de la proposition 5.19, même si les G_n ne sont pas à support compact).

Lemme 5.31 *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors $\|G_n \star f - f\|_1 \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.*

6. Il est injectif, voir la corollaire 5.30.

Preuve du théorème : Nous considérons les fonctions *continues* définies par les intégrales

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle \xi, x \rangle} \widehat{f}(\xi) d\xi, \\ F_n(x) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle \xi, x \rangle} \widehat{G}_n(\xi) \widehat{f}(\xi) d\xi, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

On remarque que $\forall x \in \mathbb{R}^d, F_n(x) \rightarrow F(x)$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Fixons $x \in \mathbb{R}^d$ et utilisons la relation $\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) g(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \widehat{g}(y) dy$, avec la fonction

$$g_x(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^d} e^{-i\langle \xi, x \rangle} \widehat{G}_n(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^d).$$

On vérifie que $\widehat{g}_x(y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \widehat{\widehat{G}_n}(y - x) = G_n(y - x)$ (car la fonction G_n est paire). Ainsi

$$F_n(x) = G_n \star f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

D'après le Lemme 5.31, on sait que F_n converge en norme $\| - \|_1$ vers la fonction f . D'autre part on sait que F_n converge simplement vers la fonction F . Cela entraîne que $F(x) = f(x)$ presque partout (voir le théorème 5.5). \square

Voici un corollaire du théorème d'inversion.

Corollaire 5.32 *L'espace de fonctions $L^1_{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^d)$ est contenu dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et pour tout $f \in L^1_{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^d)$ on a*

$$\|\widehat{f}\|_2 = (2\pi)^{d/2} \|f\|_2.$$

Preuve du corollaire : Soit $f \in L^1_{\mathcal{F}}(\mathbb{R}^d)$. La formule (4) nous permet de voir que la fonction f est bornée. Ainsi $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$. On a de même $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$. On note aussi que la fonction conjuguée de \widehat{f} est égale à $\widehat{\check{f}}$ où $\check{f} = \overline{\check{f}}$.

La relation $\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) g(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \widehat{g}(y) dy$ donne alors

$$\begin{aligned} (\|\widehat{f}\|_2)^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{f}(\xi)} d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) \widehat{\check{f}}(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\check{f}}(\xi) \check{f}(\xi) d\xi \\ &= (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} \check{f}(\xi) \overline{\check{f}(\xi)} d\xi = (2\pi)^d (\|f\|_2)^2. \end{aligned}$$

\square

5.5.3 Transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^d)$

D'après le théorème 5.29 et le corollaire 5.32 on sait que la restriction de la transformée de Fourier $\mathcal{F}_1 : L^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^d)$ au sous-espace vectoriel $L_{\mathcal{F}}^1(\mathbb{R}^d)$ induit un isomorphisme

$$\mathcal{F}_1 : L_{\mathcal{F}}^1(\mathbb{R}^d) \xrightarrow{\sim} L_{\mathcal{F}}^1(\mathbb{R}^d)$$

tel que pour tout $g \in L_{\mathcal{F}}^1(\mathbb{R}^d)$

- $\|\mathcal{F}_1(g)\|_2 = (2\pi)^{d/2}\|g\|_2$,
- $\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_1(g) = (2\pi)^d \check{g}$.

En utilisant le fait que $L_{\mathcal{F}}^1(\mathbb{R}^d)$ est un sous-espace vectoriel dense de $L^2(\mathbb{R}^d)$ on en déduit le résultat suivant.

Théorème 5.33 *Il existe un unique isomorphisme*

$$\mathcal{F}_2 : L^2(\mathbb{R}^d) \xrightarrow{\sim} L^2(\mathbb{R}^d)$$

qui prolonge la transformée de Fourier sur $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Elle satisfait les propriétés suivantes : pour tout $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$

- $\|\mathcal{F}_2(g)\|_2 = (2\pi)^{d/2}\|g\|_2$,
- $\mathcal{F}_2 \circ \mathcal{F}_2(g) = (2\pi)^d \check{g}$.

Exercice 5.34 *On considère la fonction $g(x) = \frac{1}{1+|x|} \in L^2(\mathbb{R})$. Montrer que sa transformée de Fourier $\hat{g} := \mathcal{F}_2(g) \in L^2(\mathbb{R})$ satisfait la relation*

$$\xi \hat{g}(\xi) := 2 \int_0^\infty \frac{\sin(x\xi)}{(1+x)^2} dx$$

pour presque tout ξ .

5.5.4 Transformée de Fourier sur l'espace de Schwarz

On a déjà montré que si $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ alors $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Il n'est pas dur de vérifier que l'on a mieux : $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. La formule d'inversion (4) nous permet de conclure de la manière suivante.

Théorème 5.35 *La transformée de Fourier induit un isomorphisme*

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

tel que $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(g) = (2\pi)^d \check{g}$ pour tout $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. De plus les énoncés de la proposition 5.23 sont encore valables si on travaille avec des fonctions dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

6 Distributions tempérées sur \mathbb{R}

L'espace de Schwarz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est muni de la famille dénombrable et séparantes de semi-normes

$$p_n(\varphi) := \sup_{0 \leq k \leq n} \sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|)^n |\varphi^{(k)}(x)|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On se trouve dans le cadre étudié à la section 4.4. Dans toute cette section nous munissons $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de la topologie associée à la famille séparante de semi-normes $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On rappelle la notion de limite de suites.

Définition 6.1 *Une suite de fonctions $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ converge vers $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ si $\lim_{k \rightarrow \infty} p_n(\varphi_k - \varphi) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Comme les semi-normes vérifient les inégalités

$$p_0(\varphi) \leq p_1(\varphi) \leq \dots \leq p_n(\varphi) \leq \dots \quad (5)$$

les ouverts de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ admettent la description suivante.

Définition 6.2 *Un sous-ensemble $U \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est un ouvert si pour tout $\varphi \in U$ il existe $n \in \mathbb{N}$ et $r > 0$ tels que*

$$\{\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), p_n(\varphi - \psi) < r\} \subset U.$$

On associe à la famille de semi-normes $\{p_n, n \in \mathbb{N}\}$ une distance sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$d_{\mathcal{S}}(\varphi, \psi) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \inf\{1, p_n(\varphi - \psi)\}, \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

On a le résultat important suivant.

Proposition 6.3 *L'espace métrique $(\mathcal{S}(\mathbb{R}), d_{\mathcal{S}})$ est complet. En d'autres termes, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est un espace de Fréchet.*

6.1 Espaces $L_M(\mathbb{R})$ et $L_R(\mathbb{R})$

Soit $\mathcal{N}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions mesurables sur \mathbb{R} , nulles presque partout. Dans la suite nous utiliserons deux espaces de fonctions mesurables :

- On désigne par $\mathcal{L}_M(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions mesurables $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ telles qu'il existe un entier $n \geq 0$ pour lequel la fonction $\frac{f(x)}{(1+|x|)^n}$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$. On considère $L_M(\mathbb{R}) = \mathcal{L}_M(\mathbb{R})/\mathcal{N}(\mathbb{R})$.
- On désigne par $\mathcal{L}_R(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions mesurables $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ telles que pour tout entier $n \geq 0$ la fonction $f(x)(1+|x|)^n$ est bornée. On considère $L_R(\mathbb{R}) = \mathcal{L}_R(\mathbb{R})/\mathcal{N}(\mathbb{R})$.

On appelle $L_M(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions **à croissance modérée** et $L_R(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions **à décroissance rapide**.

Voici quelques exemples :

- $L^p(\mathbb{R})$ est contenu dans $L_M(\mathbb{R})$, $\forall p \in [1, \infty]$.
- Si J est un intervalle de \mathbb{R} , la fonction caractéristique de J , que l'on note $\mathbf{1}_J$, appartient à $L_M(\mathbb{R})$.
- La fonction $\ln(|x|)$ appartient à $L_M(\mathbb{R})$.
- Les fonctions polynomiales appartiennent à $L_M(\mathbb{R})$.
- Les fonctions $e^{|x|}$, e^{x^2} n'appartiennent pas à $L_M(\mathbb{R})$.
- La fonction $e^{-|x|}$ appartient à $L_R(\mathbb{R})$.
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L_R(\mathbb{R}) \subset L_M(\mathbb{R})$.

6.2 Distributions tempérées : définitions

Par définition, une distribution tempérée sur \mathbb{R} est une forme linéaire continue $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$. L'image de $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ par T sera noté $\langle T, \varphi \rangle$.

On note $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ l'ensemble des distributions tempérées sur \mathbb{R} .

Comme les semi-normes vérifient les inégalités (5) on a la caractérisation suivante des distributions tempérées.

Lemme 6.4 *Une forme linéaire $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ est continue si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que*

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C p_n(\varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Voici l'analogie de la proposition 4.20 dans le cadre de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (qui est un espace de Fréchet).

Proposition 6.5 *Soit $T_n : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ une suite de distributions tempérées.*

On suppose que pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ la suite de réels $(\langle T_n, \varphi \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ converge : on note $\langle T, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, \varphi \rangle$ sa limite.

Alors $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est une distribution tempérée sur \mathbb{R} , et l'on dira que la suite T_n converge vers T .

Nous allons donner une suite d'exemples de distributions tempérées. À tout $f \in L_M(\mathbb{R})$ on associe la forme linéaire

$$I(f) : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

par la relation $\langle I(f), \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx, \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On remarque que si $g(x) := (1 + |x|)^{-n}f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, alors $|\langle I(f), \varphi \rangle| \leq \|g\|_1 p_n(\varphi), \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Proposition 6.6 *L'application I détermine une application linéaire injective $I : L_M(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Ainsi toute fonction de $L_M(\mathbb{R})$ s'identifie à une distribution tempérée.*

Preuve : On considère une fonction $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ non-nulle, et la suite régularisante $\phi_n(x) := \frac{n}{\int_{\mathbb{R}} g^2(x)dx} g(nx)^2$ à support compact.

Soit $f \in \ker(I)$. On considère $n \in \mathbb{N}$ tel que $g(x) := (1 + x^2)^{-n}f(x) \in L^1(\mathbb{R})$. D'après la proposition 5.19 on a

$$\|\phi_n \star g - g\|_1 \longrightarrow 0$$

lorsque $n \rightarrow \infty$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\phi_n \star g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)(1 + y^2)^{-n}\phi_n(x - y)dy$. Comme ϕ_n est à support compact, la fonction $\psi_{n,x} : y \mapsto (1 + y^2)^{-n}\phi_n(x - y)$ est aussi à support compact et donc $\psi_{n,x} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On voit donc que

$$\phi_n \star g(x) = \langle I(f), \psi_{n,x} \rangle = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi toutes les fonctions $\phi_n \star g$ sont nulles. Cela entraîne que $g = 0$ dans $L^1(\mathbb{R})$ et donc $f = 0$ dans $L_M(\mathbb{R})$. \square

Exemple 6.7

1. La forme linéaire définie par

$$\langle \text{vp}(\frac{1}{x}), \varphi \rangle := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx$$

définit une distribution tempérée.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$. La forme linéaire définie par

$$\langle \delta_a^k, \varphi \rangle := (-1)^k \varphi^{(k)}(a)$$

est une distribution tempérée.

3. La forme linéaire définie par

$$\langle \text{Pf}(\frac{1}{x^2}), \varphi \rangle := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0)}{x^2} dx$$

est une distribution tempérée.

4. Les suites suivantes convergent dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$:

- $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \sin(kx)$,
- $F_n(x) = \frac{x}{x^2+n-1}$,
- $T_n = \sum_{k=0}^n \delta_k$.

Preuve : Pour le premier exemple on a

$$\langle \text{vp}(\frac{1}{x}), \varphi \rangle = \underbrace{\int_0^1 \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx}_{A_\varphi} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} dx}_{B_\varphi}.$$

Le théorème des accroissements finis donne $|\frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}| \leq 2 \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi'(t)|$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Ainsi $|A_\varphi| \leq 2 \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi'(t)| \leq 2 p_1(\varphi)$.

D'autre part, pour $x \geq 1$ on a $|\frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}| \leq \frac{2 \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t)|(1+|t|)}{x^2}$. Alors $|B_\varphi| \leq 2 \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t)|(1+|t|) \leq 2 p_1(\varphi)$.

On a montré que $|\langle \text{vp}(\frac{1}{x}), \varphi \rangle| \leq 4 p_1(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ainsi $\text{vp}(\frac{1}{x})$ est une distribution tempérée.

On voit immédiatement que $|\langle \delta_a^k, \varphi \rangle| \leq p_k(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ainsi δ_a^k est une distribution tempérée.

Pour le troisième exemple on a

$$\langle \text{Pf}(\frac{1}{x^2}), \varphi \rangle = \underbrace{\int_0^1 \frac{\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0)}{x^2} dx}_{C_\varphi} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0)}{x^2} dx}_{D_\varphi}.$$

Considérons $x \geq 0$. Le DL avec reste intégral de φ donne

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(0) + \varphi'(0)x + \int_0^x (x-t)\varphi''(t)dt \\ \varphi(-x) &= \varphi(0) - \varphi'(0)x + \int_{-x}^0 (x+t)\varphi''(t)dt. \end{aligned}$$

Ainsi $\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0) = \int_0^x (x-t)(\varphi''(t) - \varphi''(-t))dt$. On obtient alors

$$|\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0)| \leq 2 \int_0^x (x-t)dt \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi''(t)| = x^2 \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi''(t)|.$$

Cela donne $|C_\varphi| \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi''(t)| \leq p_2(\varphi)$.

Si $x \geq 1$ alors

$$\left| \frac{\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\varphi(0)}{x^2} \right| \leq \frac{4 \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t)|}{x^2}.$$

On obtient alors que $|D_\varphi| \leq 4 \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t)| \leq 4 p_0(\varphi) \leq 4 p_2(\varphi)$.

On a montré que $|\langle \text{Pf}(\frac{1}{x^2}), \varphi \rangle| \leq 5 p_2(\varphi)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ainsi $\text{Pf}(\frac{1}{x^2})$ est une distribution tempérée.

Considérons la suite de fonctions $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \sin(kx)$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, une double intégration par partie donne

$$\int_{\mathbb{R}} \sin(kx) \varphi(x) dx = \frac{-1}{k^2} \int_{\mathbb{R}} \sin(kx) \varphi''(x) dx, \quad \forall k \geq 1.$$

On obtient alors la majoration

$$|\int_{\mathbb{R}} \sin(kx) \varphi(x) dx| \leq \frac{1}{k^2} \int_{\mathbb{R}} |\varphi''(x)| dx \leq \frac{\sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi''(t)| (1 + |t|)^2}{k^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(1 + |x|)^2} dx,$$

soit $|\int_{\mathbb{R}} \sin(kx) \varphi(x) dx| \leq \frac{2}{k^2} p_2(\varphi)$.

On remarque que pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, la suite $\langle S_n, \varphi \rangle$ converge vers

$$\langle S_\infty, \varphi \rangle := - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \int_{\mathbb{R}} \sin(kx) \varphi''(x) dx.$$

Comme $|\langle S_\infty, \varphi \rangle| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2} p_2(\varphi)$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, S_∞ est une distribution tempérée. On a montré que la suite de fonctions S_n converge vers S_∞ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Considérons la suite de fonctions $F_n(x) = \frac{x}{x^2 + n^{-1}}$. Un calcul immédiat donne

$$\begin{aligned} \langle F_n, \varphi \rangle &= \int_0^{\infty} \frac{x}{x^2 + n^{-1}} \varphi(x) dx + \int_{-\infty}^0 \frac{x}{x^2 + n^{-1}} \varphi(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{x}{x^2 + n^{-1}} (\varphi(x) - \varphi(-x)) dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \left(1 - \frac{1}{(nx^2 + 1)} \right) dx \end{aligned}$$

On voit donc que $\langle F_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle \text{vp}(\frac{1}{x}), \varphi \rangle$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Ainsi la suite de fonctions F_n converge vers $\text{vp}(\frac{1}{x})$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Considérons la suite de distributions $T_n = \sum_{k=0}^n \delta_k$. On remarque que pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, la suite $\langle T_n, \varphi \rangle$ converge vers

$$\langle T_\infty, \varphi \rangle := \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(k).$$

La majoration $|\varphi(k)| \leq \frac{1}{k^2} \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t)| (1 + |t|)^2$ montre que $|\langle T_\infty, \varphi \rangle| \leq (\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}) p_2(\varphi)$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, Ainsi T_∞ est une distribution tempérée. \square

Remarque 6.8 Pour les suites S_n, F_n, T_n traitées dans l'exemple précédent on aurait pu simplifier notre exposition en utilisant la proposition 6.5.

Par exemple, pour la suite S_n on sait que S_∞ est une distribution tempérée parce que $\langle S_\infty, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle S_n, \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

6.3 Opérations sur les distributions

L'application injective $I : L_M(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ permet de voir $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L_M(\mathbb{R})$ comme un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Nous allons voir que beaucoup d'opérations sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ s'étendent à $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$:

- la dérivation,
- le produit par des fonctions C^∞ à croissance modérée,
- la transformée de Fourier,
- la convolution par des fonctions rapidement décroissantes.

Nous travaillerons dans le cadre suivant. Tout d'abord, on utilise la forme bilinéaire

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{S}} := \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\psi(x)dx, \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

D'autre part, on considère une application linéaire $A : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ pour laquelle il existe une application linéaire ${}^tA : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ "duale" :

$$\langle A(\psi), \varphi \rangle_{\mathcal{S}} = \langle \psi, {}^tA(\varphi) \rangle_{\mathcal{S}}, \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

On utilisera le fait élémentaire (mais fondamental) suivant.

Proposition 6.9 Si l'application linéaire tA est continue, alors l'application linéaire $A : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ admet une extension à $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (toujours notée A) définie comme suit : pour tout $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

$$\langle A(T), \varphi \rangle := \langle T, {}^tA(\varphi) \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

En d'autres termes $A(T) = T \circ {}^tA$.

Voici une caractérisation de la continuité d'un endomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ qui nous sera utile dans les exemples qui vont suivre.

Lemme 6.10 Une application linéaire $u : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est continue si pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $(n_k, C_k) \in \mathbb{N} \times]0, \infty[$ tel que

$$p_k(u(\varphi)) \leq C_k p_{n_k}(\varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

On termine cette section en traitant des exemples.

6.3.1 Dérivation de distributions

La dérivation détermine une application linéaire continue $\frac{d}{dx} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Une intégration par parties montre que ${}^t(\frac{d}{dx}) = -\frac{d}{dx}$. On a alors la définition suivante.

Définition 6.11 *La dérivée $T' \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ d'une distribution tempérée $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est déterminée par la relation*

$$\langle T', \varphi \rangle := -\langle T, \varphi' \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Voici quelques exemples :

- la dérivée de $|x|$ est égale à $\mathbf{1}_{[0, \infty[} - \mathbf{1}_{]-\infty, 0]}$,
- la dérivée de $\mathbf{1}_{[a, \infty[}$ est égale à δ_a ,
- la dérivée de $\mathbf{1}_{]-\infty, a]}$ est égale à $-\delta_a$,
- la dérivée de δ_a^k est égale à δ_a^{k+1} ,
- la dérivée de $\ln(|x|)$ est égale à $\text{vp}(\frac{1}{x})$,
- la dérivée de $\text{vp}(\frac{1}{x})$ est égale à $-\text{Pf}(\frac{1}{x^2})$.

Exercice 6.12 *Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ une distribution tempérée. Il existe une distribution tempérée S telle que $S' = T$ et deux distributions tempérées vérifiant cette propriété diffèrent d'une constante.*

6.3.2 Produit par des fonctions \mathcal{C}^∞ à croissance modérée

On commence par une définition.

Définition 6.13 *L'espace des fonctions à croissance modérée, noté $\mathcal{C}_M^\infty(\mathbb{R})$, désigne l'ensemble des fonctions f indéfiniment dérivables sur \mathbb{R} telles que*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}, \exists C > 0, |f^{(k)}(x)| \leq C(1 + |x|)^N, \forall x \in \mathbb{R}.$$

On note que si $f \in \mathcal{C}_M^\infty(\mathbb{R})$ alors $f^{(k)} \in L_M(\mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{N}$.

Si $f \in \mathcal{C}_M^\infty(\mathbb{R})$, alors l'application $\mu_f : \varphi \mapsto f\varphi$ est un endomorphisme continu de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et l'on a ${}^t\mu_f = \mu_f$. On a alors la définition suivante.

Définition 6.14 *Le produit de $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ par $f \in \mathcal{C}_M^\infty(\mathbb{R})$ est une distribution tempérée fT satisfaisant la relation*

$$\langle fT, \varphi \rangle := \langle T, f\varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Voici quelques exemples :

- $x \text{vp}(\frac{1}{x}) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}}$,

- $x^2 \text{Pf}(\frac{1}{x^2}) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}}$,
- $x \delta_0 = 0$
- $\forall T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \forall f \in \mathcal{C}_M^\infty(\mathbb{R})$, on a $(fT)' = f'T + fT'$.

On utilisera ce lemme à la section 6.3.4

Lemme 6.15 *Si $f \in L_R(\mathbb{R})$ alors la transformée de Fourier \widehat{f} appartient à $\mathcal{C}_M^\infty(\mathbb{R})$.*

6.3.3 Transformée de Fourier d'une distribution

On commence par une définition.

Définition 6.16 *Si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on note \check{T} la distribution tempérée satisfaisant la relation⁷*

$$\langle \check{T}, \varphi \rangle := \langle T, \check{\varphi} \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Rappelons les résultats obtenus à la section 5.5.

Théorème 6.17 *La transformée de Fourier induit un isomorphisme*

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

tel que

1. $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(\varphi) = 2\pi \check{\varphi}$ pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
2. Pour tout opérateur différentiel $Q(\frac{d}{d\xi}) = \sum_{k=0}^N b_k \frac{d^k}{d\xi^k}$ on a

$$Q(\frac{d}{d\xi})(\mathcal{F}(\varphi)) = \mathcal{F}(Q(ix)\varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

3. Pour tout polynôme $P(\xi) = \sum_{k=0}^N a_k \xi^k$ on a

$$P(\xi)\mathcal{F}(\varphi) = \mathcal{F}(P(i\frac{d}{dx})(\varphi)), \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

4. $\langle \mathcal{F}(\varphi), \psi \rangle_{\mathcal{S}} = \langle \varphi, \mathcal{F}(\psi) \rangle_{\mathcal{S}}$, $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Les point 2. et 3. du théorème précédent permettent de montrer facilement que la transformée de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est continue. Le point 4. montre que ${}^t\mathcal{F} = \mathcal{F}$. On a alors la définition suivante.

7. $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Définition 6.18 La transformée de Fourier de $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est une distribution tempérée $\mathcal{F}(T)$ satisfaisant la relation

$$\langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle := \langle T, \widehat{\varphi} \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Voici quelques exemples :

- $\mathcal{F}(\delta_0) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}}$, et plus généralement $\mathcal{F}(\delta_0^k) = (-i)^k x^k$.
- $\mathcal{F}(\mathbf{1}_{\mathbb{R}}) = 2\pi \delta_0$, et plus généralement $\mathcal{F}(x^k) = 2\pi i^k \delta_0^k$.
- $\mathcal{F}\left(\text{vp}\left(\frac{1}{x}\right)\right)(\xi) = i\pi(\mathbf{1}_{[0, \infty[} - \mathbf{1}_{]-\infty, 0]})$.

Voici quelques propriétés de la transformation de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Proposition 6.19 Pour une distribution tempérée T on a

- $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}(T) = 2\pi \check{T}$,
- $\mathcal{F}(T)' = i \mathcal{F}(xT)$,
- $\mathcal{F}(T') = -i x \mathcal{F}(T)$.

6.3.4 Convolution par des fonctions à décroissance rapide

L'espace $L_R(\mathbb{R})$ des fonctions à décroissance rapide a été introduit à la section 6.1. Rappelons que si $f \in L_R(\mathbb{R})$ alors la transformée de Fourier \widehat{f} appartient à $\mathcal{C}_M^\infty(\mathbb{R})$.

Lemme 6.20 Si $f \in L_R(\mathbb{R})$ alors la convolution par f détermine une application linéaire continue $f \star - : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$. De plus

$${}^t(f \star -) = \check{f} \star -.$$

Preuve du Lemme : Soient $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $f \in L_R(\mathbb{R})$. Sachant que $|x| \leq |y| + |x - y|$ on voit que $(1 + |x|)^n \leq (1 + |y|)^n (1 + |x - y|)^n$ pour tout $n \geq 0$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{d^k}{dx^k}(f \star \varphi) = f \star \frac{d^k}{dx^k}(\varphi)$. Donc

$$\begin{aligned} |(1 + |x|)^n \frac{d^k}{dx^k}(f \star \varphi)(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}} (1 + |y|)^n |f(y)| (1 + |x - y|)^n |\varphi^{(k)}(x - y)| dy \\ &\leq \|(1 + |y|)^n f(y)\|_1 \sup_{\mathbb{R}} (1 + |t|)^n |\varphi^{(k)}(t)| \end{aligned}$$

On a montré que $\forall n \geq 0$ on a $p_n(f \star \varphi) \leq c_n(f) p_n(\varphi)$ avec $c_n(f) = \|(1 + |y|)^n f(y)\|_1$. Cela assure que $f \star -$ est continue.

D'autre part

$$\begin{aligned}
\langle f \star \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{S}} &= \int_{\mathbb{R}} f \star \varphi(x) \psi(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \varphi(y) \psi(x) dx dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) \check{f} \star \psi(y) dy \\
&= \langle \varphi, \check{f} \star \psi \rangle_{\mathcal{S}}.
\end{aligned}$$

Cela démontre le dernier point. \square

On a alors la définition suivante.

Définition 6.21 *La convolution de $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ par $f \in L_R(\mathcal{S})$ est la distribution tempérée $f \star T$ satisfaisant la relation*

$$\langle f \star T, \varphi \rangle := \langle T, \check{f} \star \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Voici quelques propriétés utiles de cette convolution.

Proposition 6.22 1. Soient $f \in L_R(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Alors

- pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $(f \star T)^{(k)} = f \star T^{(k)}$,
- $\mathcal{F}(f \star T) = \hat{f} \hat{T}$.

2. Soient $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Alors $\mathcal{F}(\varphi T) = (2\pi)^{-1} \hat{\varphi} \star \hat{T}$.