

Analyse

Master Sciences et Numérique pour la Santé^{1,†}

¹ Université de Montpellier, Faculté des Sciences

Résumé

Cette fiche didactique a pour objectif de synthétiser les notions et formules essentielles d'analyse pouvant être rencontrées dans le cadre du Master. Elles trouvent leurs applications dans les modules suivants : HAH807E - Chaîne d'Acquisition / Traitement du Signal, HAH710E - Ingénierie : Électronique, HAH802E - Capteurs et Traitement d'Images, HAH808E - Capteurs US pour le Biomédical, HAH805E - Robotique médicale, HAH806E - Neuroprothèse, HAH906E - Acquisition de données et traitement du signal pour le biomédical, HAH908E - Thermographie IR, détecteurs optiques et US, HAH909E - Robotique médicale 2, HAH910E - Neuroprothèse 2.

Keywords: HAH701E Prolégomènes de Mathématique, Algèbre Linéaire

Contact : Emmanuel Le Clézio *e-mail* : emmanuel.le-clezio@umontpellier.fr
DOI: <https://sns.edu.umontpellier.fr/>

1. Suites de nombres réels

Une suite numérique est une application u de $\mathbb{N}$, privé éventuellement d'un nombre fini d'éléments, dans $\mathbb{R}$. La notation u_n est souvent préférée à $u(n)$ pour le terme général de la suite (u_n) . Une suite (u_n) est souvent définie par l'expression de son terme général ou par une relation de récurrence.

1.1. Suites monotones :

- Une suite (u_n) est stationnaire si $u_n = u_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
- Une suite (u_n) est croissante si $u_n \leq u_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
- Une suite (u_n) est décroissante si $u_n \geq u_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

1.2. Suites bornées :

- Une suite (u_n) est majorée si $\exists M \in \mathbb{R}$, tel que $u_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
- Une suite (u_n) est minorée si $\exists m \in \mathbb{R}$, tel que $u_n \geq m$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
- Une suite (u_n) est bornée si elle est majorée et minorée :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad |u_n| \leq M, \quad \forall n. \quad (1)$$

1.3. Définition de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$:

Si tout intervalle ouvert contenant un nombre donné $l \in \mathbb{R}$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, la suite est dite convergente vers l .

1.4. Définition de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$:

Si tout intervalle du type $]A, +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, la suite est dite divergente vers $+\infty$.

1.5. Définition de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$:

Si tout intervalle du type $] -\infty, -A]$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, (u_n) est dite divergente vers $-\infty$.

1.6. Opérations sur les suites convergentes :

1.6.1. Combinaison linéaire :

λ et μ étant des réels, si (u_n) converge vers l_1 , et si (v_n) converge vers l_2 , alors, la suite $(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge vers $\lambda l_1 + \mu l_2$.

1.6.2. Produit :

Si (u_n) converge vers l_1 , et si (v_n) converge vers l_2 , alors, la suite $(u_n v_n)$ converge vers $l_1 l_2$.

1.6.3. Quotient :

Si (u_n) converge vers l_1 , et si (v_n) converge vers $l_2 \neq 0$, alors, la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers $\frac{l_1}{l_2}$.

1.7. Image d'une suite convergente :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , et a un point de I . f a pour limite l au point a si, et seulement si, pour toute suite (x_n) convergeant vers a , la suite $(f(x_n))$ converge vers l , finie ou non.

1.8. Relation d'ordre :

Si (u_n) converge vers l_1 , et si (v_n) converge vers l_2 , et si $u_n \leq v_n$, $\forall n$, alors $l_1 \leq l_2$.

1.9. Théorème d'encadrement (ou des gendarmes) :

Si (u_n) et (v_n) sont des suites convergeantes vers la même limite l , et si $u_n \leq w_n \leq v_n$, $\forall n$, alors (w_n) a pour limite l .

1.10. Existence de limites :

1.10.1. Convergence des suites monotones :

- Toute suite croissante et majorée par un M donné est convergente vers une limite $l \leq M$,
- Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$,
- Toute suite décroissante et minorée par un m donné est convergente vers une limite $l \geq m$,
- toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

1.10.2. Suites extraites :

- Une suite (v_n) est dite extraite d'une suite (u_n) si elle est définie par $v_n = u_{h(n)}$ où h est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Le terme sous-suite est aussi employé.
- Si (u_n) est une suite convergente de limite l , alors toute sous-suite extraite de (u_n) est aussi convergente et converge vers l ,
- Si deux suites extraites de (u_n) ont des limites distinctes, alors (u_n) est divergente,
- Si deux suites extraites de (u_n) ont la même limite, il n'est possible de conclure que si elles recouvrent tout (u_n) .

1.10.3. Suites adjacentes :

- Deux suites, (u_n) et (v_n) , sont adjacentes si (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$,
- Si deux suites sont adjacentes, elles convergent et possèdent la même limite.

2. Suites Particulières

2.1. Suites arithmétiques :

Une suite (u_n) est arithmétique de raison r si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r. \quad (2)$$

La forme générale d'une suite arithmétique est $u_n = u_0 + nr$. La somme des n premiers termes est donnée par :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = n \frac{u_0 + u_{n-1}}{2}. \quad (3)$$

2.2. Suites géométriques :

Une suite (u_n) est géométrique de raison $q \neq 0$ si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = qu_n. \quad (4)$$

La forme générale d'une suite géométrique est $u_n = u_0 q^n$. La somme des n premiers termes est donnée par :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad \text{si } q \neq 1, \quad (5)$$

$$= nu_0, \quad \text{si } q = 1. \quad (6)$$

La suite (u_n) converge vers 0 si $|q| < 1$. Elle est stationnaire si $q = 1$. Elle diverge dans les autres cas.

2.3. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 :

Les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 sont déterminées par la connaissance de leurs deux premiers termes u_0 et u_1 , ainsi que d'une relation du type :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0, \quad (7)$$

où a , b , et c sont des constantes réelles. Elles peuvent se décomposer sous la forme de sommes de suites géométriques de manière à en simplifier l'étude.

3. Fonctions d'une variable réelle

f est une fonction définie sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

3.1. Sens de variation :

f est croissante sur un intervalle I si $I \subset D$ et :

$$\forall x_1 \in I, \forall x_2 \in I, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2). \quad (8)$$

f est décroissante sur un intervalle I si $I \subset D$ et :

$$\forall x_1 \in I, \forall x_2 \in I, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2). \quad (9)$$

f est monotone sur un intervalle I si elle n'est que croissante ou que décroissante sur I .

3.2. Parité, périodicité :

f est paire si :

$$\forall x \in D, \quad -x \in D \text{ et } f(x) = f(-x), \quad (10)$$

Son graphe est alors symétrique par rapport à O_y . f est impaire si :

$$\forall x \in D, \quad -x \in D \text{ et } f(x) = -f(-x), \quad (11)$$

Son graphe est alors symétrique par rapport à O . f est périodique de période T si :

$$\forall x \in D, \quad x + T \in D \text{ et } f(x + T) = f(x), \quad (12)$$

Son graphe est alors invariant de vecteurs $kT\vec{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

3.3. Limites :

Par définition :

- f admet une limite l lorsque x tend vers a signifie qu'il est possible d'obtenir $f(x)$ aussi proche de l que souhaité à condition de prendre x suffisamment voisin de a . Ceci est noté : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

- f admet comme limite $\pm\infty$ lorsque x tend vers a signifie que $f(x)$ peut être aussi grand (en positif ou en négatif) que souhaité pourvu que x soit suffisamment proche de a . Ceci est noté : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

3.4. Propriétés des limites :

3.4.1. Théorème d'encadrement ou des gendarmes

Soient f , g et h trois fonctions définies au voisinage de x_0 et vérifiant $f \leq g \leq h$. Si f et h ont la même limite l (finie ou infinie) lorsque x tend vers x_0 alors g a pour limite l lorsque $x \rightarrow x_0$.

3.4.2. Opérations algébriques

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 et y admettant des limites l et m , et λ un réel. Alors, les fonctions $f + g$, λf et fg admettent pour limites respectives lorsque $x \rightarrow x_0$: $l + m$, λl et lm . De plus, si $m \neq 0$, $1/g$ admet pour limite $1/m$.

3.4.3. Fonction composée

Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 et telle que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = u_0$. Soit une seconde fonction g définie au voisinage de u_0 et telle que $\lim_{u \rightarrow u_0} g(u) = v$. Alors la fonction $g \circ f$ est définie au voisinage de x_0 et :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = v. \quad (13)$$

3.5. Fonctions équivalentes :

Soient f et g deux fonctions définies sur I et x_0 un point, fini ou non, appartenant à I ou extrémité de I . Si $\frac{f}{g}$ est définie au voisinage de x_0 , sauf peut-être en x_0 , il est dit que f et g sont équivalentes au voisinage de x_0 si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. \quad (14)$$

Ceci est noté : $f \sim g$ ou $f \sim_{x_0} g$.

3.6. Propriétés des fonctions équivalentes :

- Si $f_1 \sim_{x_0} g_1$ et $f_2 \sim_{x_0} g_2$, alors $f_1 f_2 \sim_{x_0} g_1 g_2$ et $f_1/f_2 \sim_{x_0} g_1/g_2$.
- Si $f \sim_{x_0} g$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

3.7. Fonctions équivalentes classiques :

Une fonction polynôme est équivalente à :

- Son terme de plus haut degré lorsque x tend vers $\pm\infty$,
- Son terme de plus bas degré lorsque x tend vers 0.

$$e^x - 1 \sim_0 x \quad ; \quad \sin x \sim_0 x \quad ; \quad 1 - \cos x \sim_0 \frac{x^2}{2} \quad (15)$$

$$\ln(1+x) \sim_0 x \quad ; \quad \tan x \sim_0 x \quad ; \quad (1+x)^\alpha \sim_0 1 + \alpha x \quad (16)$$

3.8. Continuité :

Une fonction f est continue en un point x_0 si, et seulement si,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (17)$$

Une fonction définie sur un intervalle I est continue sur I si elle est continue en tout point de I .

3.9. Continuité et opérations :

Soient f et g deux fonctions continues en x_0 , alors :

- $f + g$ et fg sont continues en x_0 ,
- Si $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est continue en x_0 et vaut $\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$.

Si f est continue en x_0 et g continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0 .

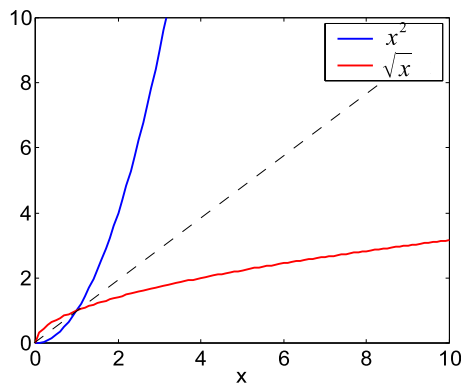


FIGURE 1. Fonctions réciproques.

3.10. Image d'un intervalle par une fonction continue :

Si f est une fonction continue sur un intervalle I , alors $f(I)$ est un intervalle.

3.10.1. Combinaison linéaire :

Si f est une fonction continue sur un intervalle fermé I , alors $f(I)$ est un intervalle fermé.

3.10.2. Conséquence :

Si une fonction f est continue sur $[a, b]$, et si $f(a)f(b) \leq 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ possède au moins une solution dans $[a, b]$.

3.11. Fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone :

Soit f une fonction continue et strictement monotone (croissante ou décroissante) sur un intervalle I . Alors :

- f est une bijection de I sur $f(I)$, sa réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone (resp. croissante ou décroissante) sur $f(I)$,
- Dans un repère orthonormé, les graphes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice des axes (voir figure 1).

4. Calcul intégral

4.1. Interprétation géométrique :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Alors $\int_a^b f(x)dx$ se lit "intégrale de a à b de $f(x)$, dx ". Elle correspond à l'aire du domaine du plan situé sous le graphique de f , comptée positivement pour la partie située au-dessus de l'axe des x , négativement pour la partie située en dessous (voir figure 2(a)).

4.2. Intégration de Riemann :

D'un point de vue numérique, il s'agit de calculer la limite de la somme des aires de tous les petits rectangles contenus sous la courbe, lorsque la largeur de ces rectangles tend vers 0 (voir figure 2(b)) :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \lim_{\delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \delta x f(x_k) \\ x &= a + k(b-a)/n, \\ \delta x &= (b-a)/n. \end{aligned}$$

Il existe plusieurs façons de calculer cette intégrale. Par limite inférieure (voir figure 3(a)) :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \\ x_1 &= a, x_n = b. \end{aligned}$$

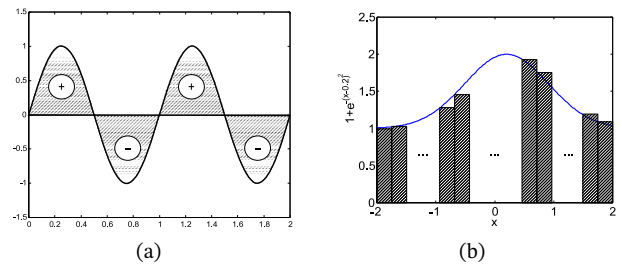


FIGURE 2. (a) Aire et Intégrale et (b) Intégration de Riemann.

Par limite supérieure (voir figure 3(b)) :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \\ x_1 &= a, x_n = b. \end{aligned}$$

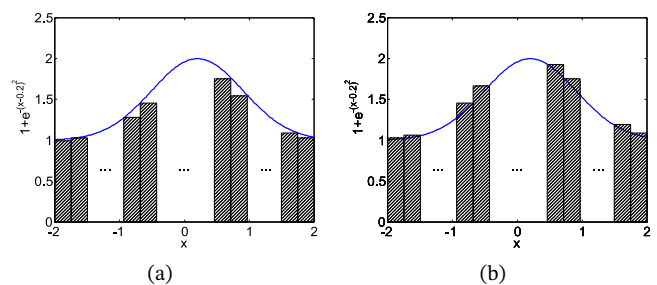


FIGURE 3. Limites (a) inférieure et (b) supérieure.

En utilisant les valeurs médianes et non nécessairement moyennes (voir figure 4(a)) :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right) \\ x_1 &= a, x_n = b. \end{aligned}$$

En utilisant les valeurs moyennes :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \\ x_1 &= a, x_n = b. \end{aligned}$$

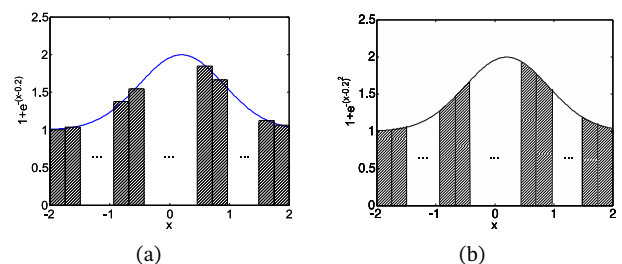


FIGURE 4. Limites (a) par valeurs médianes et (b) la méthode des trapèzes.

Par la méthode des trapèzes (voir figure 4(b)).

4.3. Propriétés du calcul intégral :

4.3.1. Linéarité :

L'intégration est une fonction linéaire :

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx. \quad (18)$$

4.3.2. Relation de Chasles :

L'intégrale de a à c d'une fonction $f(x)$ est égale à la somme de l'intégrale de a à b et de celle de b à c (figure 5(a)) :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (19)$$

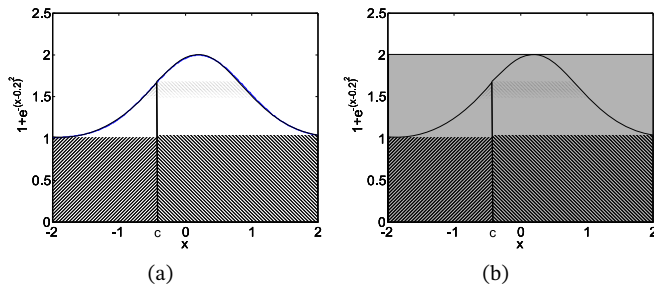


FIGURE 5. (a) Relation de Chasles et (b) Inégalité de la moyenne.

4.4. Majoration de l'intégrale :

4.4.1. Valeur absolue :

$$\text{Si } a < b, \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

4.4.2. Encadrement :

Si, pour tout $x \in [a, b]$, $m \leq f(x) \leq M$, alors :

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

4.4.3. Intégrale et moyenne :

Le nombre $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ est la valeur moyenne de f sur $[a, b]$.

4.4.4. Inégalité de la moyenne :

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq |b-a| \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Cette relation est évidente d'un point de vue géométrique (voir figure 5(b)).

5. Calcul de primitives

5.1. Primitives d'une fonction continue :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Une fonction F , définie sur I , est une primitive de f si elle est dérivable (de fonction dérivée F') sur I et si :

$$\forall x \in I, F'(x) = f(x). \quad (20)$$

Deux primitives d'une fonction f ne diffèrent que d'une constante. Si f est continue sur un intervalle I contenant a , la fonction F , définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f . Elle est l'unique

primitive de f qui s'annule en a . Pour toute primitive h de f sur un intervalle I :

$$\int_a^x f(t) dt = [h(t)]_a^x = h(x) - h(a). \quad (21)$$

5.2. Linéarité :

Si F et G sont des primitives respectives des fonctions f et g sur I , et λ et μ deux réels, alors, sur I , $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$.

5.3. Intégration par parties :

Soient u et v deux fonctions de classe C^1 (dérivables et à dérivées continues) sur un intervalle I , et a et b des réels de I . Alors :

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt. \quad (22)$$

5.4. Intégration par changement de variable :

Soit u une fonction de classe C^1 de $[\alpha, \beta]$ dans $[a, b]$, et f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors :

$$\int_\alpha^\beta f'(u(t))u'(t) dt = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x) dx. \quad (23)$$

Si de plus u est bijective :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f'(u(t))u'(t) dt. \quad (24)$$

Rappel : si $x = u(t)$, alors $dx = u'(t) dt$.

6. Intégrales généralisées

6.1. Fonction définie sur un intervalle non borné :

Soit une fonction f définie sur $[a, +\infty[$ et intégrable sur tout segment $[a, x]$. f est dite d'intégrale convergente sur $[a, +\infty[$ ou que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge ou existe si la fonction

$$x \mapsto \int_a^x f(t) dt \quad (25)$$

possède une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Ceci se note :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt = \int_a^{+\infty} f(t) dt. \quad (26)$$

Dans le cas contraire, l'intégrale est dite divergente.

6.2. Fonction définie sur un intervalle non borné :

De façon analogue :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^a f(t) dt = \int_{-\infty}^a f(t) dt. \quad (27)$$

Puis, avec a quelconque :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^a f(t) dt + \int_a^{+\infty} f(t) dt. \quad (28)$$

6.3. Fonction non bornée sur un intervalle borné :

Soit une fonction f intégrable tout segment $[x, b]$ de sur $]a, b]$. Si la limite

$$\lim_{x \rightarrow a} \int_x^b f(t) dt \quad (29)$$

existe, l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est dite convergente. Dans le cas contraire, elle est dite divergente. La définition est similaire pour une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$.

6.4. Règles de convergence :

Les règles suivantes sont présentées pour des fonctions positives. Des règles similaires peuvent être déduites pour des fonctions négatives.

6.4.1. Comparaison de fonctions :

Soient f et g intégrables sur tout segment et telles que $0 \leq f \leq g$ sur $[a, +\infty[$.

- Si $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge aussi.
- Si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ diverge aussi.

6.4.2. Équivalence de fonctions :

Soient f et g deux fonctions positives.

- Si $f(x) \sim_{+\infty} g(x)$ alors les intégrales $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ sont de même nature.
- Si $f(x) \sim_a g(x)$ alors les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.

6.4.3. Intégrales de Riemann :

Pour $[a, +\infty[$, avec $a > 0$:

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \text{ converge} \iff \alpha > 1. \quad (30)$$

Pour $]0, a]$, avec $a > 0$:

$$\int_0^a \frac{1}{t^\alpha} dt \text{ converge} \iff \alpha < 1. \quad (31)$$

7. Équations différentielles

7.1. Équations à variables séparables

Lorsque l'équation est de la forme :

$$f(x(t))x'(t) = g(t), \quad (32)$$

où f et g sont des fonctions données dont les primitives F et G sont connues, alors

$$F(x(t)) = G(t) + C. \quad (33)$$

Et si F possède une fonction réciproque F^{-1} , les solutions de l'ED sont fournies par :

$$x(t) = F^{-1}(G(t) + C). \quad (34)$$

7.2. Équations linéaires

Elles sont de la forme :

$$a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c(t), \quad (35)$$

où a , b et c sont des fonctions données continues sur un intervalle I . Pour la résolution, il sera supposé que l'étude se déroule sur un intervalle $J \subset I$ dans lequel a ne s'annule pas.

7.2.1. Théorème dû à la linéarité :

Toute solution de (35) est de la forme $x_p(t) + x_s(t)$ où $x_p(t)$ est une solution particulière de (35) et $x_s(t)$ la solution générale de l'équation homogène (sans second membre) associée :

$$a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0. \quad (36)$$

La résolution se déroule donc en deux étapes.

7.2.2. Résolution de l'équation homogène associée :

Il s'agit d'une équation à variables séparables. Ses solutions sont du type :

$$x_s(t) = Ke^{-F(t)} \quad \text{où} \quad F(t) = \int_{t_0}^t -\frac{b(u)}{a(u)} du \quad (37)$$

avec K une constante arbitraire et t_0 un élément quelconque de I . Elles comportent la fonction nulle et des fonctions qui ne s'annulent jamais.

7.2.3. Recherche d'une solution particulière :

Cette méthode s'appelle **méthode de variation de la constante**. $x_1(t)$ étant une solution non nulle de (36), une fonction auxiliaire inconnue $K(t)$ est introduite pour que $x(t) = K(t)x_1(t)$ soit solution de (35). Lors du calcul de $x'_1(t)$ puis du report de $x'(t)$ et $x(t)$ dans (35), $K(t)$ doit disparaître (auto-vérification) alors que $K'(t)$ doit subsister. Il est alors possible de déduire $K(t)$ puis $x(t)$. Il existe deux variantes équivalentes :

- Chercher tous les $K(t)$ avec une constante d'intégration puis reporter dans $x(t)$,
- Chercher un $K(t)$, reporter dans $x(t)$ et additionner avec $x_s(t)$.

8. ED linéaires du second ordre à coefficients constants

Elles sont de la forme :

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = f(t), \quad (38)$$

où a , b et c sont des constantes réelles données.

8.1. Théorème de Cauchy-Lipschitz :

Si des conditions initiales de la forme $x(t_0) = x_0$ et $x'(t_0) = x_1$ sont imposées, alors l'équation différentielle (38) admet une et une seule solution.

8.2. Théorèmes dus à la linéarité :

- Toute solution de (38) est de la forme $x_p(t) + x_s(t)$ où $x_p(t)$ est une solution particulière de (38) et $x_s(t)$ la solution générale de l'équation homogène (sans second membre) associée :

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0, \quad (39)$$

- Si x_1 (resp. x_2) est une solution particulière de

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = f_1(t) \text{ resp. } f_2(t), \quad (40)$$

alors, $x_1 + x_2$ est solution particulière de

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = f_1(t) + f_2(t). \quad (41)$$

8.3. Résolution de l'équation homogène :

La fonction $t \mapsto e^{rt}$ est solution de (39) si, et seulement si, r vérifie l'équation caractéristique :

$$ar^2 + br + c = 0. \quad (42)$$

Soit donc $\Delta = b^2 - 4ac$. Si $\Delta \neq 0$, (42) a deux racines (complexes) distinctes r_1 et r_2 , et :

$$x_s(t) = K_1 e^{r_1 t} + K_2 e^{r_2 t}, \quad (43)$$

où K_1 et K_2 sont des constantes quelconques. Si $\Delta < 0$, (42) a deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$, et :

$$x_s(t) = e^{\alpha t} (K_1 \cos(\beta t) + K_2 \sin(\beta t)), \quad (44)$$

où K_1 et K_2 sont des constantes quelconques. Il s'agit d'un cas particulier de la résolution précédente. Enfin, si $\Delta = 0$, (42) a une racine double r_0 , et :

$$x_s(t) = (K_1 t + K_2) e^{r_0 t}, \quad (45)$$

où K_1 et K_2 sont des constantes quelconques.

8.4. Recherche d'une solution particulière dans certains cas :

Si $f(t)$ est un polynôme $P(t)$ de degré n , il existe une solution particulière de (38) sous la forme d'un polynôme de degré

- n si $c \neq 0$,
- $n + 1$ si $c = 0$ et $b \neq 0$,
- $n + 2$ si $b = c = 0$ et $a \neq 0$.

La détermination de la solution se fait par identification. Si $f(t) = e^{kt}P(t)$ avec P un polynôme et k une constante, à travers le changement de variable

$$x(t) = e^{kt}z(t), \quad (46)$$

où z est une nouvelle fonction inconnue, l'équation est transformée en une autre du type précédent. Si $f(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t)P(t)$ ou $f(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t)P(t)$ avec α et β réels et P un polynôme à coefficients constants, la solution particulière est la partie réelle, ou la partie imaginaire, de la solution particulière obtenue pour l'équation de second membre $e^{(\alpha+i\beta)t}$.