

Algèbre linéaire

Master Sciences et Numérique pour la Santé^{1,†}

¹ Université de Montpellier, Faculté des Sciences

Résumé

Cette fiche didactique a pour objectif de synthétiser les notions et formules essentielles à l'utilisation de l'algèbre linéaire. Dans le cadre du Master, elle trouve ses applications dans les modules suivants : HAH807E - Chaîne d'Acquisition / Traitement du Signal, HAH710E - Ingénierie : Électronique, HAH802E - Capteurs et Traitement d'Images, HAH808E - Capteurs US pour le Biomédical, HAH805E - Robotique médicale, HAH806E - Neuroprothèse, HAH906E - Acquisition de données et traitement du signal pour le biomédical, HAH908E - Thermographie IR, détecteurs optiques et US, HAH909E - Robotique médicale 2, HAH910E - Neuroprothèse 2.

Keywords: HAH701E Prolégomènes de Mathématique, Algèbre Linéaire

Contact : Emmanuel Le Clézio *e-mail* : emmanuel.le-clezio@umontpellier.fr

DOI: <https://sns.edu.umontpellier.fr/>

1. Systèmes linéaires et matrices

Un système linéaire de deux équations à deux inconnues :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \quad (1)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \quad (2)$$

peut être réécrit sous la forme condensée $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$\mathbf{A}$ est alors une matrice de dimension 2×2 dont les éléments sont $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{(i,j) \in \{1,2\}}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Dans l'élément a_{ij} , i représente la ligne à laquelle se trouve a_{ij} , et j représente la colonne à laquelle se trouve a_{ij} . Un moyen mnémotechnique de s'en souvenir est de se rappeler qu'une matrice est écrite sous la forme "ligne-colonne". La généralisation à n dimensions est évidente. De manière générale :

- Une matrice de dimension $(1, n)$ est dite matrice ligne,
- Une matrice de dimension $(m, 1)$ est dite matrice colonne,
- Une matrice de dimension (m, m) est dite matrice carrée,
- Une matrice de dimension (m, n) , $m \neq n$, est dite matrice rectangulaire,
- une matrice est dite réelle ou complexe selon que ses éléments sont contenus dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2. Opérations sur les matrices

A) **Somme de deux matrices** : Soient $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ et $\mathbf{B} = [b_{kl}]$ deux matrices de dimensions $m \times n$, La matrice $\mathbf{C} = [c_{ij}]$, somme de $\mathbf{A}$ et de $\mathbf{B}$ est aussi de dimension $m \times n$ et est définie par :

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n. \quad (5)$$

Deux matrices de dimensions différentes ne peuvent être sommées. L'élément neutre de l'addition est la matrice nulle $[0]_{ij} = 0$, $\forall i, j$.

B) **Multiplication par un scalaire** : Pour multiplier une matrice par un scalaire, il suffit de multiplier chacun de ses éléments par ce scalaire :

$$\lambda \mathbf{A} = \lambda [a_{ij}]_{i,j} = [\lambda a_{ij}]_{i,j} = \mathbf{A} \lambda. \quad (6)$$

C) **Transposée d'une matrice** : Soit $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$, la matrice

transposée de $\mathbf{A}$, notée $\mathbf{A}^T$, appartient alors à $\mathbb{R}^{n \times m}$ et s'écrit :

$$\mathbf{A}_{ij}^T = a_{ji} \quad \forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n. \quad (7)$$

Il s'en suit que $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$.

D) **Adjointe d'une matrice** : Soit $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$, la matrice adjointe de $\mathbf{A}$, notée $\mathbf{A}^*$, appartient alors à $\mathbb{C}^{n \times m}$ et s'écrit :

$$\mathbf{A}_{ij}^* = \overline{a_{ji}} \quad \forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n. \quad (8)$$

E) **Produit de deux matrices** : Soient $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ et $\mathbf{B} = [b_{kl}]$ deux matrices de dimensions respectives $k \times l$ et $l \times m$ (notez que la dimension l est présente dans les deux matrices). La matrice $\mathbf{C} = [c_{ij}]$, produit de $\mathbf{A}$ et de $\mathbf{B}$ est de dimension $k \times m$ (la dimension l a disparu) et est définie par :

$$c_{ij} = \sum_{p=1}^l a_{ip} b_{pj} \quad \forall 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq m. \quad (9)$$

Du fait de leurs dimensions, il est possible de définir le produit matriciel $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$. Méthode visuelle : les matrices sont placées de la façon suivante et chaque élément ij du produit est écrit, au centre, en "projetant" la colonne j de $\mathbf{B}$ sur la ligne i de $\mathbf{A}$. **ATTENTION!** En général, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. Sous réserve de dimen-

$$\begin{array}{c} \text{j}^{\text{ème}} \text{ colonne} \\ \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{l1} & \dots & b_{lj} & \dots & b_{lm} \end{bmatrix} \\ \\ \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{il} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kl} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & c_{ij} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & \dots & c_{kj} & \dots & c_{km} \end{bmatrix} \\ \text{i}^{\text{ème}} \text{ ligne} & c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{il}b_{lj} \end{array} \end{array}$$

sions compatibles, le produit de plusieurs matrices est associatif : $\mathbf{ABC} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$. L'élément neutre de la multiplication est la matrice unité $\mathbf{I} : I_{ii} = 1$, $\forall i = j$, 0 sinon. Le produit de deux matrices est distributif à droite et à gauche par rapport à l'addition des matrices :

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}, \quad \text{et} \quad \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}. \quad (10)$$

F) **Transposée de la somme de deux matrices** : Soient $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ et $\mathbf{B} = [b_{kl}]$ deux matrices de même dimension, alors :

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T.$$

- G) **Transposée du produit de deux matrices** : Soient $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ et $\mathbf{B} = [b_{kl}]$ deux matrices de dimensions respectives $k \times l$ et $l \times m$, alors : $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$.

3. Matrices Spéciales :

- A) **Matrice carrée** : Une matrice est dite carrée si elle possède le même nombre de lignes que de colonnes.
- B) **Matrice symétrique** : Une matrice est dite symétrique si elle possède des éléments symétriques par rapport à la diagonale : $a_{ij} = a_{ji}$. Il s'agit nécessairement d'une matrice carrée et $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$.
- C) **Matrice antisymétrique** : Une matrice est dite antisymétrique si ses éléments symétriques par rapport à la diagonale sont opposés : $a_{ij} = -a_{ji}$. Il s'agit nécessairement d'une matrice carrée.
- D) **Matrice diagonale** : Une matrice est dite diagonale si ses éléments hors diagonale sont nuls : $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Il s'agit nécessairement d'une matrice carrée.
- E) **Matrice triangulaire** : Une matrice est dite triangulaire supérieure (resp. inférieure) si ses éléments situés sous (resp. sur) la diagonale sont nuls : $a_{ij} = 0$ si $i > j$ (resp. $i < j$). Il s'agit nécessairement d'une matrice carrée.
- F) **Matrice idempotente** : Une matrice est dite idempotente si : $\mathbf{AA}^T = \mathbf{A}$. Il s'agit nécessairement d'une matrice carrée.
- G) **Matrice de translation** : Dans un espace de dimension 3×3 , une matrice de translation, de dimension 4×4 , est définie par :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ telle que } \mathbf{T} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + t_1 \\ x_2 + t_2 \\ x_3 + t_3 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

- H) **Matrice de rotation** : Les matrices de rotation (de dimension 3×3) regroupent les trois projections d'une base orthonormée $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ dans une autre $(\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}')$. Les rotations 'canoniques' autour de $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ et $\mathbf{z}$ s'écrivent

$$\mathbf{Rot}(\mathbf{x}, \alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$\mathbf{Rot}(\mathbf{y}, \beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$\mathbf{Rot}(\mathbf{z}, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

4. Matrices partitionnées :

Soit $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{(m+n) \times (p+q)}$. Il est possible d'écrire :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

avec $\mathbf{A}_{11} \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $\mathbf{A}_{12} \in \mathbb{R}^{m \times q}$, $\mathbf{A}_{21} \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $\mathbf{A}_{22} \in \mathbb{R}^{n \times q}$.

4.1. Opérations :

Soient $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{(m+n) \times (p+q)}$ et $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{(p+q) \times 1}$:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_2 \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_2 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

4.2. Transposée :

$$\text{Soit } \mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{(m+n) \times (p+q)}, \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^T & \mathbf{A}_{21}^T \\ \mathbf{A}_{12}^T & \mathbf{A}_{22}^T \end{bmatrix}.$$

5. Déterminant d'une matrice :

Le déterminant d'une matrice carrée $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est un nombre, noté $\det(\mathbf{A})$ ou $|\mathbf{A}|$, défini par :

$$|\mathbf{A}| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} |\mathbf{A}_i|. \quad (17)$$

5.1. Propriétés :

- Lorsque le déterminant d'une matrice est nul, la matrice est dite singulière.
- $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$,
- $|\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^{-1}$,
- Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$, alors :

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}_{22}| |\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21}| \quad (18)$$

$$= |\mathbf{A}_{11}| |\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12}|. \quad (19)$$

5.2. Théorèmes :

- Si tous les éléments d'une ligne (colonne) d'une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont nuls, alors $|\mathbf{A}| = 0$,
- Si tous les éléments d'une ligne (colonne) d'une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont multipliés par un scalaire λ , alors $|\mathbf{B}| = \lambda |\mathbf{A}|$.
- Si $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est obtenue à partir de $\mathbf{A}$ en échangeant deux de ses lignes (colonnes), alors $|\mathbf{B}| = -|\mathbf{A}|$.
- Si $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est obtenue à partir de $\mathbf{A}$ en faisant passer la $i^{\text{ème}}$ ligne (colonne) par dessus la $p^{\text{ème}}$ ligne (colonne), alors $|\mathbf{B}| = (-1)^{(i-p)} |\mathbf{A}|$.
- Si deux lignes (colonnes) d'une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont identiques, alors $|\mathbf{A}| = 0$,
- Si aux les éléments d'une ligne (colonne) d'une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont ajoutés k fois les éléments d'une autre ligne (colonne), la valeur du déterminant reste inchangée.

6. Mineurs et cofacteurs d'une matrice :

Le mineur m_{ij} d'une matrice carrée $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est le déterminant de la partie restante de $\mathbf{A}$ lorsque sont "supprimés" la ligne i et la colonne j . Le cofacteur d'une matrice carrée $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, noté c_{ij} ou Δ_{ij} , est défini par :

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}. \quad (20)$$

La comatrice (matrice adjointe) d'une matrice carrée $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, notée $\tilde{\mathbf{A}}$, est définie par :

$$\tilde{\mathbf{A}} = [c_{ij}]^T. \quad (21)$$

7. Cofacteurs et déterminant d'une matrice :

7.1. Règles de calcul du déterminant à partir des cofacteurs :

La valeur du déterminant d'une matrice carrée $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la somme des n produits obtenus en multipliant chaque élément d'une ligne (colonne) donnée de la matrice par son cofacteur. En choisissant judicieusement la ligne (ou la colonne) par laquelle est effectué le développement, il est possible de simplifier largement les calculs. Les lignes (ou colonnes) possédant des éléments nuls sont particulièrement recherchées.

8. Résolution d'un système d'équations linéaires :

8.1. Règle de Kramer :

Soit un système linéaire de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Alors :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|}. \quad (22)$$

De même :

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{|A|}; \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{|A|}. \quad (23)$$

Cette règle peut être appliquée à n'importe quel système de n équations à n inconnues **pourvu que le déterminant de A soit non nul**.

9. Matrice inverse :

9.1. Définition :

Deux matrices carrées A et B sont inverses si leur produit est égal à la matrice identité :

$$AB = I. \quad (24)$$

B est alors notée A^{-1} et $BA = I$. La matrice inverse est utilisée dans la résolution des systèmes d'équations linéaires de la forme $Ax = y$. En effet, $x = A^{-1}y$ (attention, multiplication à gauche).

10. Matrice pseudo-inverse :

Il s'agit de l'extension aux systèmes non carrés du concept de matrice inverse. Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^m$, la pseudo inverse de A , notée A^+ satisfait aux conditions suivantes :

$$AA^+A = A, \quad (25)$$

$$A^+AA^+ = A^+, \quad (26)$$

$$(AA^+)^T = AA^+ \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad (27)$$

$$(A^+A)^T = A^+A \in \mathbb{R}^{n \times n}. \quad (28)$$

Il existe une matrice pseudo-inverse à gauche ($\in \mathbb{R}^{n \times m}$) et une pseudo-inverse à droite ($\in \mathbb{R}^{n \times m}$).

10.1. Propriétés de la matrice inverse :

Si le système est carré et $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (et $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$) non singulière(s) (déterminant non nul) :

$$A^{-1} = A^+, \quad (29)$$

$$(A^{-1})^{-1} = A, \quad (30)$$

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}, \quad (31)$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (32)$$

$$|A^{-1}| = |A|^{-1}. \quad (33)$$

La résolution du système est alors, $x = A^{-1}y$.

10.2. Calcul de la matrice inverse :

La matrice inverse A^{-1} d'une matrice carrée $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est donnée par la relation (matrice des cofacteurs ou adjointe divisée par le déterminant de A) :

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{|A|}. \quad (34)$$

Il faut donc que le déterminant de A soit non nul !

11. Rang d'une matrice :

Le rang d'une matrice correspond au nombre maximum de colonnes ou de lignes linéairement indépendantes. C'est aussi l'ordre du plus grand déterminant non nul. Une matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est dite de rang plein si $\text{rang}(A) = \min(m, n)$. Une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est inversible si son rang est égal à n . Quelle que soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A^T) = \text{rang}(AA^T) = \text{rang}(A^T A). \quad (35)$$

12. Trace d'une matrice :

La trace d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est égale à la somme des éléments de sa diagonale :

$$\text{trace}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}. \quad (36)$$

13. Valeurs et vecteurs propres d'une matrice :

13.1. Définition :

Soit une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Les valeurs propres λ_i de cette matrice sont les racines (solutions) de l'équation polynomiale :

$$|A - \lambda_i I| = 0. \quad (37)$$

L'ensemble des valeurs propres d'une matrice constitue son spectre. Les vecteurs propres v_i de la matrice se déduisent de :

$$Av_i = \lambda_i v_i. \quad (38)$$

Ils sont définis à une constante près.

13.2. Propriétés :

Soit une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$|A| = \prod_{i=1}^n \lambda_i, \quad (39)$$

$$\text{trace}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i. \quad (40)$$

14. Diagonalisation d'une matrice :

Si les valeurs propres d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont réelles et simples (toutes différentes, pas de racine multiple), il est possible de transformer A et de la "rendre" diagonale sous la forme :

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}. \quad (41)$$

Soit P la matrice formée des vecteurs propres :

$$P = [v_1 \dots v_i \dots v_n]. \quad (42)$$

Elle est appelée matrice modèle de P . La matrice D est alors définie par :

$$D = P^{-1}AP. \quad (43)$$

A est alors **conjuguée** par P . La diagonalisation permet de résoudre de façon élégante des problèmes qui peuvent sembler complexes au premier abord. Des solutions numériques sont souvent utilisées pour calculer les valeurs et vecteurs propres d'une matrice.