

Master Sciences et Numérique pour la Santé

Ingénierie des dispositifs pour la Santé

HAH701E

PROLÉGOMÈNES DE MATHÉMATIQUES

E. Le Clézio



Master Sciences et Numérique pour la Santé

Ingénierie des dispositifs pour la Santé

by

E. Le Clézio

Faculté des Sciences de Montpellier

Institut d'Electronique et des Systèmes

Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier 860 rue de Saint-Priest, 34095 Montpellier

Instructor :

e-mail :

Project Duration :

Faculty :

Pr. Emmanuel Le Clézio

emmanuel.le-clezio@umontpellier.fr

Septembre 2024

Université de Montpellier



Table des matières

1	Les nombres complexes	1
1.1	Ensemble des nombres complexes	1
1.1.1	Différents ensembles de nombres	1
1.1.2	L'imaginaire i	2
1.1.3	L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$	2
1.1.4	Parties réelle et imaginaire	2
1.1.5	Égalité entre deux nombres complexes	2
1.2	Représentation graphique et géométrie	2
1.2.1	Application	3
1.3	Conjugué, module et argument d'un nombre complexe	3
1.3.1	Propriétés de la conjugaison :	4
1.3.2	Théorème :	4
1.3.3	Définition : Module	4
1.3.4	Définition : Argument	4
1.3.5	Calcul de l'argument	4
1.3.6	Propriétés des modules :	5
1.3.7	Propriétés des arguments :	5
1.3.8	Remarque :	6
1.3.9	Propriétés des arguments :	6
1.4	Forme polaire	6
1.4.1	Écriture d'un nombre complexe :	6
1.4.2	Exponentielle complexe :	7
1.5	Formules de Moivre et d'Euler	7
1.5.1	Formules de Moivre :	7
1.5.2	Formules d'Euler :	7
1.6	Racines d'un nombre complexe	7
1.6.1	Racine carrée d'un nombre complexe :	7
1.6.2	Calcul d'une racine carrée :	7
1.7	Racines n^{eme} d'un nombre complexe	8
1.7.1	Calcul d'une racine n^{eme} :	8
1.8	Fonctions élémentaires d'un nombre complexe	8
1.8.1	Résolution d'une équation du second degré :	8
1.8.2	Fonctions exponentielles et sinusoïdales :	9
2	Algèbre linéaire	10
2.1	Systèmes linéaires et matrices	10
2.2	Opérations sur les matrices	11
2.2.1	Somme de deux matrices :	11
2.2.2	Multiplication par un scalaire :	11
2.2.3	Transposée d'une matrice :	11
2.2.4	Adjointe d'une matrice :	11
2.2.5	Produit de deux matrices :	12
2.2.6	Transposée de la somme de deux matrices :	13
2.2.7	Transposée du produit de deux matrices :	13
2.3	Matrices Spéciales :	13
2.3.1	Matrice carrée :	13
2.3.2	Matrice symétrique :	13
2.3.3	Matrice antisymétrique :	14
2.3.4	Matrice diagonale :	14

2.3.5	Matrice triangulaire :	14
2.3.6	Matrice idempotente :	14
2.3.7	Matrice de translation :	15
2.3.8	Matrice de rotation :	15
2.4	Matrices partitionnées :	16
2.4.1	Opérations :	16
2.4.2	Transposée :	16
2.5	Déterminant d'une matrice :	16
2.5.1	Propriétés :	16
2.5.2	Théorèmes :	16
2.6	Mineurs et cofacteurs d'une matrice :	17
2.7	Cofacteurs et déterminant d'une matrice :	17
2.7.1	Règles de calcul du déterminant à partir des cofacteurs :	17
2.8	Résolution d'un système d'équations linéaires :	18
2.8.1	Règle de Kramer :	18
2.9	Matrice inverse :	19
2.9.1	Définition :	19
2.10	Matrice pseudo-inverse :	19
2.10.1	Propriétés de la matrice inverse :	19
2.10.2	Calcul de la matrice inverse :	19
2.11	Rang d'une matrice :	20
2.11.1	Propriétés :	20
2.12	Trace d'une matrice :	20
2.13	Valeurs et vecteurs propres d'une matrice :	20
2.13.1	Définition :	20
2.13.2	Propriétés :	20
2.14	Diagonalisation d'une matrice :	20
3	Analyse	22
3.1	Suites de nombres réels :	22
3.1.1	Suites monotones :	22
3.1.2	Suites bornées :	22
3.1.3	Définition de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$:	22
3.1.4	Définition de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$:	22
3.1.5	Définition de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$:	23
3.1.6	Opérations sur les suites convergentes :	23
3.1.7	Image d'une suite convergente :	23
3.1.8	Relation d'ordre :	23
3.1.9	Théorème d'encadrement (ou des gendarmes) :	23
3.1.10	Existence de limites :	23
3.2	Suites Particulières :	24
3.2.1	Suites arithmétiques :	24
3.2.2	Suites géométriques :	24
3.2.3	Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 :	25
3.3	Fonctions d'une variable réelle :	25
3.3.1	Sens de variation :	25
3.3.2	Parité, périodicité :	25
3.3.3	Limites :	25
3.3.4	Propriétés des limites :	26
3.3.5	Fonctions équivalentes :	26
3.3.6	Propriétés des fonctions équivalentes :	26
3.3.7	Fonctions équivalentes classiques :	26
3.3.8	Continuité :	27
3.3.9	Continuité et opérations :	27
3.3.10	Image d'un intervalle par une fonction continue :	27
3.3.11	Fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone :	27

3.4	Calcul intégral	28
3.4.1	Interprétation géométrique :	28
3.4.2	Intégration de Riemann :	28
3.4.3	Propriétés du calcul intégral :	31
3.4.4	Majoration de l'intégrale :	32
3.5	Calcul de primitives	32
3.5.1	Primitives d'une fonction continue :	32
3.5.2	Linéarité :	32
3.5.3	Intégration par parties :	32
3.5.4	Intégration par changement de variable :	33
3.6	Intégrales généralisées	33
3.6.1	Fonction définie sur un intervalle non borné :	33
3.6.2	Fonction définie sur un intervalle non borné :	33
3.6.3	Fonction non bornée sur un intervalle borné :	33
3.6.4	Règles de convergence :	34
3.7	Équations différentielles	34
3.7.1	Équations à variables séparables	35
3.7.2	Équations linéaires	35
3.8	ED linéaires du second ordre à coefficients constants	36
3.8.1	Théorème de Cauchy-Lipschitz :	36
3.8.2	Théorèmes dus à la linéarité :	36
3.8.3	Résolution de l'équation homogène :	37
3.8.4	Recherche d'une solution particulière dans certains cas :	37
3.9	Exemples de modélisation	37

Les nombres complexes

1.1. Ensemble des nombres complexes

Une des premières utilisations des nombres complexes a été réalisée par Scipione Dal Ferro (6 février 1465 – 5 novembre 1526) au début du XVI^{me} siècle. Celui-ci s'intéressait à la résolution d'équations polynomiales d'ordre 3 (équations cubiques) et en particulier à l'équation $x^3 + px = q$. Il montra que la solution peut s'écrire sous la forme :

$$x = \sqrt[3]{\frac{q - \sqrt{q^2 + 4p^3/27}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{q + \sqrt{q^2 + 4p^3/27}}{2}}. \quad (1.1)$$

En fonction des signes de p et q et de leur rapport p/q , x peut alors prendre des valeurs non réelles¹. À la fin du XVI^{me} siècle, Raphaël Bombelli applique la méthode de résolution de Dal Ferro à l'équation $x^3 - 15x = 4$ et démontre que la résolution nécessite la définition de la racine d'un nombre complexe :

$$x = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}. \quad (1.2)$$

Attention, la notation $\sqrt{-1}$ n'a pas de sens clair mathématique et ne doit pas être utilisée. Elle n'est employée ici que pour montrer la nécessité de la création d'un nouveau type de nombre.

1.1.1. Différents ensembles de nombres

Au fil des siècles et de l'avancée des recherches mathématiques, différentes familles de nombres ont été créées. La plupart de ces créations résulte du fait que certaines équations ne possédaient pas de solution dans les ensembles pré-définis. Il devenait alors nécessaire d'imaginer de nouveaux ensembles englobant les premiers et intégrant, comme briques de base, les solutions de ces équations. Les ensembles de nombres les plus classiques actuellement sont les suivants :

- Ensemble des nombres entiers $\mathbb{N}$:
 - 0, 1, 2, 3, ...
 - L'équation $x + 1 = 0$ n'a pas de solution.
- Ensemble des nombres entiers relatifs $\mathbb{Z}$:
 - ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...
 - L'équation $2x + 1 = 0$ n'a pas de solution.
- Ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$:
 - ex : $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{3}$, 1 ...
 - L'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution.
- Ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$:

1. Notez que les termes "réel", "imaginaire" et "complexe" correspondent aux croyances de l'époque qui supposaient que les nombres réels possédaient une certaine réalité que les nombres imaginaires et complexes ne pouvaient revendiquer.

- ex : $\mathbb{Q}$ + les irrationnels : $\pi, \sqrt{2} \dots$
- L'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solution.
- Ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$:
 - ex : $\mathbb{R} + i\mathbb{R}$: $1, 1 + i, \pi - 2i, \sqrt{2} \dots$
 - Toutes les équations polynomiales possèdent un nombre de solutions égal à leur degré.

1.1.2. L'imaginaire i

Pour simplifier les choses, la création des nombres complexes provient du fait que l'équation $x^2 = -1$ ne possède pas de solution dans $\mathbb{R}$. **Imaginons** alors qu'elle en possède une et appelons la i comme **imaginaire**. Par conséquent :

$$i^2 = -1. \quad (1.3)$$

L'équation $x^2 = -1$ se résout alors :

$$x^2 + 1 = 0, \quad (1.4)$$

$$x^2 - i^2 = 0, \quad (1.5)$$

$$(x + i)(x - i) = 0. \quad (1.6)$$

Elle possède donc deux solutions i et $-i$. **Attention**, comme noté précédemment, l'écriture $\sqrt{-1}$ n'a pas de sens puisqu'il existe deux racines de -1 .

1.1.3. L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

L'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, est alors défini comme l'ensemble des couples $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Il inclut un élément, noté $(0, 1) = i$, tel que $i^2 = -1$. Dans $\mathbb{C}$, les règles usuelles d'addition et de multiplication se conservent. Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit aussi de manière unique $z = a + ib$ où a et b sont réels.

1.1.4. Parties réelle et imaginaire

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, a est la partie réelle de z et est notée $a = \operatorname{Re}(z)$. De même, b est la partie imaginaire de z et est notée $b = \operatorname{Im}(z)$. **Attention**, la partie imaginaire de z est un nombre réel ! Tout nombre complexe de la forme $z = ib$ est un imaginaire pur. L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$. La notion d'ordre n'existe plus dans $\mathbb{C}$. Cela signifie qu'il n'est pas possible de dire qu'un nombre complexe est plus grand, ou plus petit, qu'un autre.

1.1.5. Égalité entre deux nombres complexes

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes. Leur égalité est alors équivalente à l'égalité simultanée de leurs parties réelles et imaginaires :

$$z = z' \Leftrightarrow a = a' \text{ et } b = b'. \quad (1.7)$$

Application :

Soient les nombres complexes $z_1 = 2 - i$ et $z_2 = 1 + 2i$.

1. Quelles sont les parties réelles et imaginaires de z_1 et z_2 ?
2. Calculer $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 * z_2$ et $\frac{z_1}{z_2}$.

1.2. Représentation graphique et géométrie

À tout nombre complexe $z = a + ib$ est associé un point $M(a; b)$ du plan. Le point $M(a; b)$ est appelé l'image du nombre z . z est l'affixe du point $M(a; b)$ ("affixe" est féminin). Il est noté $z = \operatorname{aff}(M)$. Comme présenté sur la figure 1.1(a), à tout nombre complexe z peut aussi être associé un vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

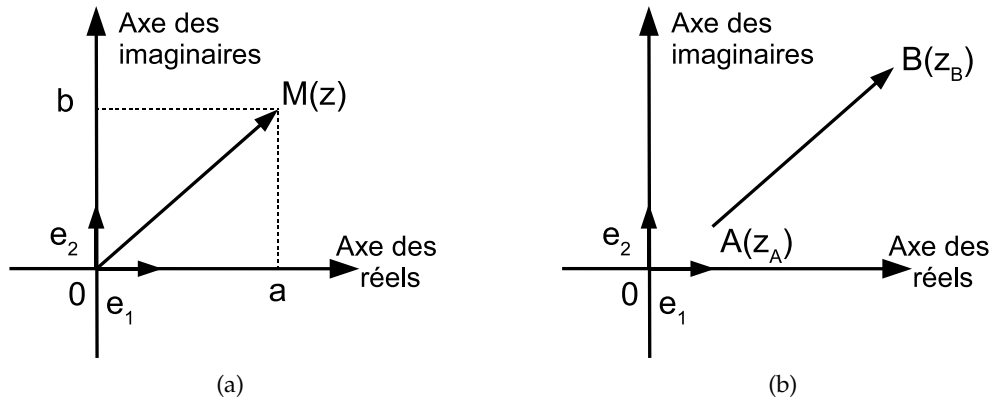
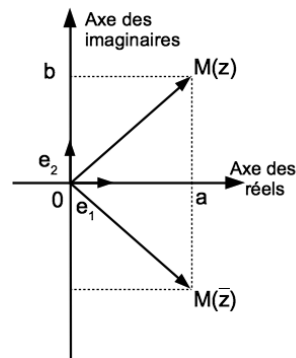
FIGURE 1.1: (a) Plan complexe et (b) affixe du vecteur $\vec{AB}$.

FIGURE 1.2: Nombres conjugués.

1.2.1. Application

Soient z_A et z_B les affixes des points A et B , alors, l'affixe du vecteur est ((voir figure 1.1(b)) :

$$\text{aff}(\vec{AB}) = z_B - z_A. \quad (1.8)$$

Cela permet de traduire les problèmes géométriques en problèmes algébriques.

1.3. Conjugué, module et argument d'un nombre complexe

Le conjugué d'un nombre complexe $z = a + ib$ est le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$. Certaines relations découlent de la définition du conjugué d'un nombre complexe. Entre autres :

- $\text{Re}(z) = \text{Re}(\bar{z})$ et $\text{Im}(z) = -\text{Im}(\bar{z})$,
- $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$,
- $z - \bar{z} = 2i \text{Im}(z)$,
- z est réel $\Leftrightarrow z = \bar{z}$,
- z est imaginaire pur $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$.

Ceci implique aussi la relation géométrique visible sur la figure 1.2.

1.3.1. Propriétés de la conjugaison :

Différentes propriétés de la conjugaison sont à connaître :

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}, \quad (1.9)$$

$$\overline{-z} = -\bar{z}, \quad (1.10)$$

$$\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'}, \quad (1.11)$$

$$\overline{z^n} = \bar{z}^n, \quad (1.12)$$

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}. \quad (1.13)$$

Application :

Soient les nombres complexes $z_1 = 2 - i$ et $z_2 = 1 + 2i$.

1. Quels sont les conjugués $\bar{z}_1$ et $\bar{z}_2$ de z_1 et z_2 ?
2. Vérifier que les relations ci-dessus sont bien vérifiées.

1.3.2. Théorème :

Pour tout nombre complexe $z = a + ib$, $\bar{z}$ est un nombre complexe tel que $z\bar{z}$ est un nombre réel égal à :

$$z\bar{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}. \quad (1.14)$$

Application :

Soit le nombre complexe $z = a + ib$.

1. Calculer $z\bar{z}$.

1.3.3. Définition : Module

Le module d'un nombre complexe $z = a + ib$ est le nombre **réel positif** :

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (1.15)$$

Question :

La définition précédente aurait-elle pu être prévue par un raisonnement géométrique ?

1.3.4. Définition : Argument

L'argument d'un nombre complexe **non nul** $z = a + ib$ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{e}_1, \vec{OM})$ (voir figure 1.3(a)). Il est noté $\theta = \arg(z)$. Un nombre complexe possède en fait une infinité d'arguments de la forme $\theta \pm 2k\pi$. Ceci est noté $\theta [2\pi]$, lu θ **modulo** 2π . L'argument contenu dans $]-\pi, \pi]$ est appelé argument principal. Trois cas spécifiques sont à connaître : le nombre complexe 0 ne possède pas d'argument ; un nombre réel pur possède un argument nul modulo π ; un nombre imaginaire pur possède un argument égal à $\frac{\pi}{2} [\pi]$.

1.3.5. Calcul de l'argument

Les figures 1.3(a) et 1.3(b) montrent que quelque soit θ :

$$\cos \theta = \frac{a}{|z|}, \quad (1.16)$$

$$\sin \theta = \frac{b}{|z|}. \quad (1.17)$$

Attention, a et b peuvent être négatifs. De plus, la fonction $\arccos \frac{a}{|z|}$ sur la calculatrice ne fournit que la valeur absolue de θ . Le signe de la valeur principale de θ est alors égal au signe du $\sin \theta$.

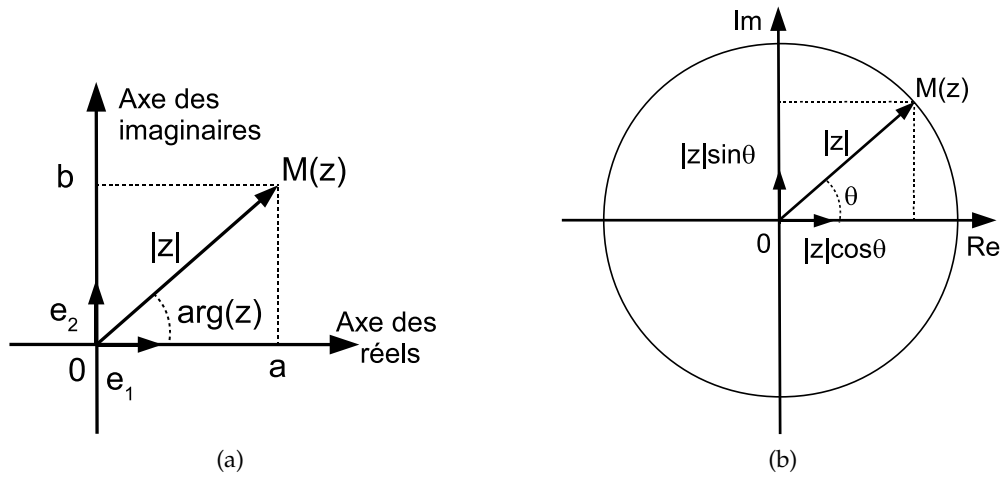


FIGURE 1.3: (a) Module et argument et (b) Cercle Trigonométrique.

Application :

Soient les nombres complexes $z_1 = 2 - i$ et $z_2 = 1 + 2i$.

1. Calculer leurs modules et arguments.

1.3.6. Propriétés des modules :

Pour tous nombres complexes z et z' :

- Module d'un produit :

$$|zz'| = |z||z'|. \quad (1.18)$$

- Conséquence : si $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda z| = |\lambda||z|$,

- Module d'un quotient :

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}. \quad (1.19)$$

- Conséquence : pour tout $z \neq 0$, $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$,

- Inégalité triangulaire :

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|. \quad (1.20)$$

1.3.7. Propriétés des arguments :

Pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}^*$ (voir figure 1.4) :

- Argument du conjugué :

$$\arg(\bar{z}) = -\arg(z) [2\pi]. \quad (1.21)$$

- Argument de l'opposé :

$$\arg(-z) = \arg(z) + \pi [2\pi]. \quad (1.22)$$

- Argument de l'opposé du conjugué :

$$\arg(-\bar{z}) = \pi - \arg(z) [2\pi]. \quad (1.23)$$

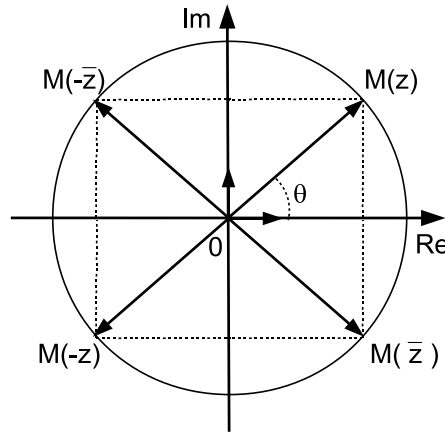


FIGURE 1.4: Arguments du conjugué et de l'opposé.

1.3.8. Remarque :— Si $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\arg(\lambda z) = \arg(z) [2\pi], \quad (1.24)$$

— Si $\lambda \in \mathbb{R}_-^*$:

$$\arg(\lambda z) = \arg(z) + \pi [2\pi], \quad (1.25)$$

1.3.9. Propriétés des arguments :Pour tous nombres complexes $z, z' \in \mathbb{C}^*$:

— Argument d'un produit :

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') [2\pi]. \quad (1.26)$$

— Argument de l'inverse :

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) [2\pi]. \quad (1.27)$$

— Argument d'un quotient :

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') [2\pi]. \quad (1.28)$$

— Argument d'une puissance :

$$\arg(z^n) = n\arg(z) [2\pi] \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (1.29)$$

1.4. Forme polaire**1.4.1. Ecriture d'un nombre complexe :**

Du fait des propriétés qui ont été précédemment énoncées, il apparaît que plusieurs écritures d'un nombre complexe peuvent cohabiter et il appartient à l'utilisateur d'employer la forme la plus judicieuse en fonction de la situation rencontrée :

— Forme cartésienne ou algébrique :

$$z = a + ib. \quad (1.30)$$

— Forme polaire :

$$z = |z|(\cos(\theta) + i \sin(\theta)), \quad (1.31)$$

$$z = |z|e^{i\theta}. \quad (1.32)$$

Il peut-être ici judicieux de noter que les équations 1.16 et 1.17 sont en accord avec les relations ci-dessus et qu'en particulier :

$$a = \operatorname{Re}(z) = |z| \cos(\theta), \quad (1.33)$$

$$b = \operatorname{Im}(z) = |z| \sin(\theta). \quad (1.34)$$

1.4.2. Exponentielle complexe :

Pour tout réel θ , le nombre complexe $\cos(\theta) + i \sin(\theta)$ est noté $e^{i\theta}$. Les propriétés de la fonction exponentielle sont alors conservées. En particulier :

— Exponentielle d'une somme :

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}. \quad (1.35)$$

— Exponentielle d'une soustraction :

$$e^{i(\theta-\theta')} = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}. \quad (1.36)$$

— Puissance d'une exponentielle :

$$(e^{i\theta})^n = e^{ni\theta} \quad \text{pour } n \in \mathbb{Z}. \quad (1.37)$$

1.5. Formules de Moivre et d'Euler

Ces formules permettent de fortement simplifier la résolution de certains problèmes. La contrepartie à cette aide précieuse est qu'elles sont à connaître. Il peut cependant être utile de s'aider du cercle trigonométrique (figure 1.5) pour les retrouver.

1.5.1. Formules de Moivre :

Pour tout réel θ et tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta), \quad (1.38)$$

$$(\cos \theta - i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) - i \sin(n\theta). \quad (1.39)$$

1.5.2. Formules d'Euler :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad (1.40)$$

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \quad (1.41)$$

1.6. Racines d'un nombre complexe

1.6.1. Racine carrée d'un nombre complexe :

Pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$, est appelée racine carrée complexe de z tout nombre complexe z' , tel que $z'^2 = z$. Il existe exactement deux racines carrées de tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$. L'écriture $\sqrt{a+ib}$ n'a donc pas de sens et lui sera préféré $(a+ib)^{1/2}$ (qui correspond à deux nombres complexes!).

1.6.2. Calcul d'une racine carrée :

D'après l'équation (1.37), pour tout nombre complexe $z = |z|e^{i(\theta+2k\pi)} \in \mathbb{C}$, avec $k \in \mathbb{Z}$:

$$z^{1/2} = \sqrt{|z|} e^{i(\frac{\theta}{2} + k\pi)}. \quad (1.42)$$

Cette écriture démontre bien l'existence de deux nombres complexes $\sqrt{|z|} e^{i(\frac{\theta}{2} + 2k\pi)}$ et $\sqrt{|z|} e^{i(\frac{\theta}{2} + \pi + 2k\pi)}$.

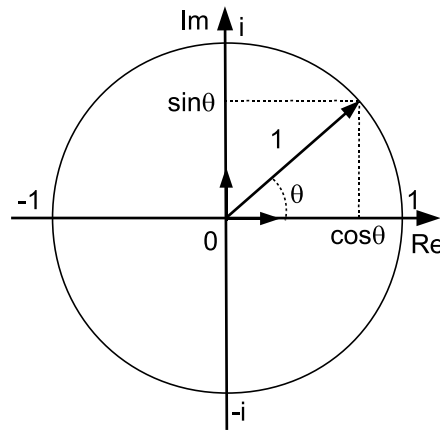


FIGURE 1.5: Cercle Trigonométrique.

Application :

1. Déterminer, dans le plan complexe, les positions des deux racines carrées d'un nombre complexe z . Vous vous aiderez du cercle trigonométrique pour cela.

1.7. Racines n^{eme} d'un nombre complexe

Pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$, est appelée racine n^{eme} complexe de z tout nombre complexe z' , tel que $z'^n = z$. Il existe exactement n racines n^{eme} de tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$. L'écriture $\sqrt[n]{a+ib}$ n'a donc pas de sens et lui sera préféré $(a+ib)^{1/n}$ (qui correspond à n nombres complexes!).

1.7.1. Calcul d'une racine n^{eme} :

D'après l'équation (1.37), pour tout nombre complexe $z = |z|e^{i(\theta+2k\pi)} \in \mathbb{C}$, avec $k \in \mathbb{Z}$:

$$z^{1/n} = \sqrt[n]{|z|}e^{i(\frac{\theta+2k\pi}{n})}. \quad (1.43)$$

Application :

1. Déterminer, dans le plan complexe, les positions des racines n^{eme} d'un nombre complexe z . Vous vous aiderez du cercle trigonométrique pour cela.

1.8. Fonctions élémentaires d'un nombre complexe**1.8.1. Résolution d'une équation du second degré :**

Soit une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$. Son discriminant Δ est de la forme $\Delta = b^2 - 4ac$. Si $\Delta > 0$, l'équation possède **exactement** deux solutions réelles :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}. \quad (1.44)$$

Si $\Delta = 0$, l'équation possède une racine double : $x = \frac{-b}{2a}$. Si $\Delta < 0$, l'équation possède **exactement** deux solutions complexes conjuguées :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}. \quad (1.45)$$

Conséquences : Dans $\mathbb{C}$, une équation polynomiale d'ordre n possède toujours **exactement** n racines (complexes).

1.8.2. Fonctions exponentielles et sinusoidales :

Des relations précédemment exposées, il est possible de déduire les propriétés de fonctions de nombres complexes, et en particulier de la fonction exponentielle et des fonctions sinusoidales.

— Fonction exponentielle : Soit $z = x + iy$ un nombre complexe quelconque.

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y)). \quad (1.46)$$

— Fonctions sinusoidales : Elles sont reconstruites à partir des formules d'Euler. Exemple :

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \quad (1.47)$$

Application :

1. Rappeler l'expression de $\sin(z)$ en fonction de e^{iz} et e^{-iz} .

2

Algèbre linéaire

2.1. Systèmes linéaires et matrices

Soit un système linéaire de deux équations à deux inconnues :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \quad (2.1)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \quad (2.2)$$

Il peut être réécrit sous la forme condensée :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Sous une forme condensée, cette expression devient :

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}. \quad (2.4)$$

$\mathbf{A}$ est alors une matrice de dimension 2×2 :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Ses éléments sont définis par :

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{(i,j) \in \{1,2\}}. \quad (2.6)$$

Dans l'élément a_{ij} , i représente la ligne à laquelle se trouve a_{ij} , et j représente la colonne à laquelle se trouve a_{ij} . Un moyen mnémotechnique de s'en souvenir est de se rappeler qu'une matrice est écrite sous la forme "ligne-colonne". Par généralisation, une matrice $\mathbf{A}$ de dimension $m \times n$ est définie par :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(m-1)1} & a_{(m-1)2} & \dots & a_{(m-1)(n-1)} & a_{(m-1)n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m(n-1)} & a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

De manière générale :

- Une matrice de dimension $(1, n)$ est dite matrice ligne,
- Une matrice de dimension $(m, 1)$ est dite matrice colonne,
- Une matrice de dimension (m, m) est dite matrice carrée,
- Une matrice de dimension (m, n) , $m \neq n$, est dite matrice rectangulaire,
- une matrice est dite réelle ou complexe selon que ses éléments sont contenus dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.2. Opérations sur les matrices

2.2.1. Somme de deux matrices :

Soient $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ et $\mathbf{B} = [b_{kl}]$ deux matrices de dimensions $m \times n$, La matrice $\mathbf{C} = [c_{ij}]$, somme de $\mathbf{A}$ et de $\mathbf{B}$ est aussi de dimension $m \times n$ et est définie par :

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n. \quad (2.8)$$

Deux matrices de dimensions différentes ne peuvent être sommées. L'élément neutre de l'addition est la matrice nulle $[0]_{ij} = 0, \quad \forall i, j$.

Application :

Calculer $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 4 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 7 & -6 \\ 1 & -4 & 3 \\ 11 & -13 & 2 \end{bmatrix}$.

2.2.2. Multiplication par un scalaire :

Pour multiplier une matrice par un scalaire, il suffit de multiplier chacun de ses éléments par ce scalaire :

$$\lambda \mathbf{A} = \lambda [a_{ij}]_{i,j} = [\lambda a_{ij}]_{i,j} = \mathbf{A} \lambda. \quad (2.9)$$

Application :

Calculer $3 \begin{bmatrix} 5 & 7 & -6 \\ 1 & -4 & 3 \\ 11 & -13 & 2 \end{bmatrix}$.

2.2.3. Transposée d'une matrice :

Soit $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (de dimension $m \times n$), la matrice transposée de $\mathbf{A}$, notée $\mathbf{A}^T$, appartient alors à $\mathbb{R}^{n \times m}$ (est de dimension $n \times m$) et s'écrit :

$$\mathbf{A}_{ij}^T = a_{ji} \quad \forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n. \quad (2.10)$$

Il s'en suit que :

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}. \quad (2.11)$$

Application :

Quelle est la transposée de $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 9 \\ -3 & 4 & -5 \end{bmatrix}$?

2.2.4. Adjointe d'une matrice :

Soit $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$ (de dimension $m \times n$), la matrice adjointe de $\mathbf{A}$, notée $\mathbf{A}^*$, appartient alors à $\mathbb{C}^{n \times m}$ (est de dimension $n \times m$) et s'écrit :

$$\mathbf{A}_{ij}^* = \overline{a_{ji}} \quad \forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n. \quad (2.12)$$

Application :

Quelle est la matrice adjointe de $\begin{bmatrix} 6+i & 0 & 9-i \\ -3i & 4 & -5 \end{bmatrix}$?

2.2.5. Produit de deux matrices :

Soient $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ et $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ deux matrices de dimensions respectives $k \times l$ et $l \times m$ (notez que la dimension l est présente dans les deux matrices). La matrice $\mathbf{C} = [c_{ij}]$, produit de $\mathbf{A}$ et de $\mathbf{B}$ est de dimension $k \times m$ (la dimension l a disparu) et est définie par :

$$c_{ij} = \sum_{p=1}^l a_{ip} b_{pj} \quad \forall 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq m. \quad (2.13)$$

Du fait de leurs dimensions, il est possible de définir le produit matriciel $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$.

Application :

Soit le produit de matrices suivant :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

1. Déterminer les expressions de c_{11} , c_{12} , c_{21} et c_{22} .
2. Faire l'application avec les matrices suivantes :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Il peut être utile d'avoir une visualisation de la multiplication de deux matrices. Pour cela, les matrices sont placées de la façon suivante et chaque élément ij du produit est écrit, au centre, en "projetant" la colonne j de $\mathbf{B}$ sur la ligne i de $\mathbf{A}$.

$$\begin{array}{ccc} & & j^{\text{me}} \text{ colonne} \\ & & \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & \mathbf{b_{1j}} & \dots & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{l1} & \dots & \mathbf{b_{lj}} & \dots & b_{lm} \end{bmatrix} \\ & & \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a_{i1}} & \dots & \mathbf{a_{il}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kl} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \mathbf{c_{ij}} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{k1} & \dots & c_{kj} & \dots & c_{km} \end{bmatrix} & \\ i^{\text{me}} \text{ ligne} & c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{il}b_{lj} & \end{array}$$

ATTENTION! Le produit de deux matrices n'est pas commutatif. En général, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ (ne serait-ce qu'au niveau des dimensions). Sous réserve de dimensions compatibles, le produit de plusieurs matrices est associatif. Exemple :

$$\mathbf{ABC} = \mathbf{A(BC)} = (\mathbf{AB})\mathbf{C}. \quad (2.16)$$

L'élément neutre de la multiplication est la matrice unité $\mathbf{I}$:

$$\mathbf{I}_{ii} = 1, \quad \forall i = j, \quad (2.17)$$

$$\mathbf{I}_{ij} = 0, \quad \forall i \neq j. \quad (2.18)$$

Le produit de deux matrices est distributif à droite et à gauche par rapport à l'addition des matrices :

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}, \quad (2.19)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}. \quad (2.20)$$

Application :

Une certaine espèce d'insectes se comporte de la manière suivante : en moyenne, la moitié de la population meurt à la fin de la première année de vie. Parmi les survivants, les $\frac{2}{3}$ meurent au bout de la seconde année de vie. Le reste meurt à la fin de la troisième année, mais chaque femelle a auparavant donné naissance en moyenne à 6 individus femelles. Le recensement de la population donne, pour l'année 2012 : x_n individus dans la première année de vie, y_n individus dans la seconde année de vie et z_n individus dans la dernière année de vie.

1. Déterminer la matrice $\mathbf{A}$ telle que :

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

2. Calculer $\mathbf{A}^2$ et $\mathbf{A}^3$.
3. Quelles conclusions peuvent en être tirées sur l'évolution de la population des insectes ?

2.2.6. Transposée de la somme de deux matrices :

Soient $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ et $\mathbf{B} = [b_{kl}]$ deux matrices de même dimension, alors :

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T. \quad (2.22)$$

2.2.7. Transposée du produit de deux matrices :

Soient $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ et $\mathbf{B} = [b_{kl}]$ deux matrices de dimensions respectives $k \times l$ et $l \times m$, alors :

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T. \quad (2.23)$$

2.3. Matrices Spéciales :**2.3.1. Matrice carrée :**

Une matrice est dite carrée si elle possède le même nombre de lignes que de colonnes.

Exemple :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 15 & 21 & -18 \\ 6 & -12 & 9 \\ 33 & -39 & 6 \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

2.3.2. Matrice symétrique :

Une matrice est dite symétrique si elle possède des éléments symétriques par rapport à la diagonale :

$$a_{ij} = a_{ji}. \quad (2.25)$$

Il s'agit nécessairement d'une matrice carrée et $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$.

Exemple :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 15 & 6 & 33 \\ 6 & -12 & 9 \\ 33 & 9 & 6 \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

2.3.3. Matrice antisymétrique :

Une matrice est dite antisymétrique si ses éléments symétriques par rapport à la diagonale sont opposés :

$$a_{ij} = -a_{ji}. \quad (2.27)$$

Il s'agit nécessairement d'une matrice carrée.

Exemple :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 15 & -6 & 33 \\ 6 & 0 & 9 \\ -33 & -9 & -6 \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

2.3.4. Matrice diagonale :

Une matrice est dite diagonale si ses éléments hors diagonale sont nuls :

$$a_{ij} = 0 \quad \text{si } i \neq j. \quad (2.29)$$

Il s'agit nécessairement d'une matrice carrée.

Exemple :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

2.3.5. Matrice triangulaire :

Une matrice est dite triangulaire supérieure (resp. inférieure) si ses éléments situés sous (resp. sur) la diagonale sont nuls :

$$a_{ij} = 0 \quad \text{si } i > j \text{ (resp. } i < j \text{)}. \quad (2.31)$$

Il s'agit nécessairement d'une matrice carrée.

Exemple :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 15 & 8 & -3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & -6 \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

2.3.6. Matrice idempotente :

Une matrice est dite idempotente si :

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}. \quad (2.33)$$

Il s'agit nécessairement d'une matrice carrée.

Exemple :

$$\mathbf{I}. \quad (2.34)$$

2.3.7. Matrice de translation :

Dans un espace de dimension 3×3 , une matrice de translation, de dimension 4×4 , est définie par :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

Il vient alors :

$$\mathbf{T} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + t_1 \\ x_2 + t_2 \\ x_3 + t_3 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

2.3.8. Matrice de rotation :

Les matrices de rotation (de dimension 3×3) regroupent les trois projections d'une base orthonormée $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ dans une autre $(\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}')$. Les rotations 'canoniques' autour de $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ et $\mathbf{z}$ s'écrivent :

$$\mathbf{Rot}(\mathbf{x}, \alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad (2.37)$$

$$\mathbf{Rot}(\mathbf{y}, \beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}, \quad (2.38)$$

$$\mathbf{Rot}(\mathbf{z}, \gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

La base orthonormée $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ est donc transformée en une autre $(\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{z}')$ selon (par exemple pour $\mathbf{Rot}(\mathbf{x}, \alpha)$) :

$$\mathbf{Rot}(\mathbf{x}, \alpha) = \begin{matrix} & \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z} \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{x}' \dots & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{y}' \dots & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \mathbf{z}' \dots & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{matrix} \quad (2.40)$$

Application :

À l'aide des matrices de rotation définies ci-dessus :

1. Déterminer les expressions des trois matrices de rotation de 90° autour des axes principaux.
2. En les appliquant successivement au vecteur $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$, quelles sont les conséquences sur ses composantes ?
3. Déterminer les expressions des trois matrices de rotation de 60° autour des axes principaux.
4. En les appliquant successivement au vecteur $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$, quelles sont les conséquences sur ses composantes ?
5. Faire l'application avec les vecteurs (réaliser un schéma) :
 - (a) $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$,
 - (b) $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.
6. Comment modéliser une rotation autour d'un axe non principal ?

2.4. Matrices partitionnées :

Il peut parfois être intéressant de partitionner une matrice en sous-blocs. Soit donc $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{(m+n) \times (p+q)}$. Il est possible d'écrire :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad (2.41)$$

avec $\mathbf{A}_{11} \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $\mathbf{A}_{12} \in \mathbb{R}^{m \times q}$, $\mathbf{A}_{21} \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $\mathbf{A}_{22} \in \mathbb{R}^{n \times q}$. Il est naturellement possible de partitionner $\mathbf{A}$ en plus de sous-blocs.

2.4.1. Opérations :

Soient $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{(m+n) \times (p+q)}$ et $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{(p+q) \times 1}$. Il est possible d'écrire :

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_2 \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_2 \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

2.4.2. Transposée :

Soit $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{(m+n) \times (p+q)}$. $\mathbf{A}^T$ s'écrit :

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^T & \mathbf{A}_{21}^T \\ \mathbf{A}_{12}^T & \mathbf{A}_{22}^T \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

2.5. Déterminant d'une matrice :

Le déterminant d'une matrice carrée $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est un nombre, noté $\det(\mathbf{A})$ ou $|\mathbf{A}|$, défini par :

$$|\mathbf{A}| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} |\mathbf{A}_i|. \quad (2.44)$$

Application :

1. Calculer $|\mathbf{A}|$ pour une matrice carrée de dimension $n = 2$.
2. Faire l'application avec $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$.
3. Calculer $|\mathbf{A}|$ pour une matrice carrée de dimension $n = 3$.
4. Faire l'application avec $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 1 \\ 0,1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -0,5 \end{bmatrix}$.

2.5.1. Propriétés :

- Lorsque le déterminant d'une matrice est nul, la matrice est dite singulière.
- $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$,
- $|\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^{-1}$,
- Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$, alors :

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}_{22}||\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}| \quad (2.45)$$

$$= |\mathbf{A}_{11}||\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}|. \quad (2.46)$$

2.5.2. Théorèmes :

- Si tous les éléments d'une ligne (colonne) d'une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont nuls, alors $|\mathbf{A}| = 0$,
- Si tous les éléments d'une ligne (colonne) d'une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont multipliés par un scalaire λ , alors $|\mathbf{B}| = \lambda|\mathbf{A}|$.

- Si $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est obtenue à partir de $\mathbf{A}$ en échangeant deux de ses lignes (colonnes), alors $|\mathbf{B}| = -|\mathbf{A}|$.
- Si $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est obtenue à partir de $\mathbf{A}$ en faisant passer la $i^{\text{ème}}$ ligne (colonne) par dessus la $p^{\text{ème}}$ ligne (colonne), alors $|\mathbf{B}| = (-1)^{(i-p)}|\mathbf{A}|$.
- Si deux lignes (colonnes) d'une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont identiques, alors $|\mathbf{A}| = 0$.
- Si aux les éléments d'une ligne (colonne) d'une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont ajoutés k fois les éléments d'une autre ligne (colonne), la valeur du déterminant reste inchangée.

2.6. Mineurs et cofacteurs d'une matrice :

Le mineur m_{ij} d'une matrice carrée $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est le déterminant de la partie restante de $\mathbf{A}$ lorsque sont "supprimés" la ligne i et la colonne j . Le cofacteur d'une matrice carrée $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, noté c_{ij} ou Δ_{ij} , est défini par :

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}. \quad (2.47)$$

La comatrice (matrice adjointe) d'une matrice carrée $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, notée $\tilde{\mathbf{A}}$, est définie par :

$$\tilde{\mathbf{A}} = [c_{ij}]^T. \quad (2.48)$$

2.7. Cofacteurs et déterminant d'une matrice :

2.7.1. Règles de calcul du déterminant à partir des cofacteurs :

La valeur du déterminant d'une matrice carrée $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la somme des n produits obtenus en multipliant chaque élément d'une ligne (colonne) donnée de la matrice par son cofacteur.

Application :

1. Vérifier la validité de la règle ci-dessus en vérifiant le calcul suivant :

$$\begin{aligned} & \left| \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \right| = \\ & a_{11} \left| \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \right| + a_{21} \left(- \left| \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \right| \right) + a_{31} \left| \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \right| \\ & = -a_{12} \left| \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} \right| + a_{22} \left| \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} \right| - a_{32} \left| \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{bmatrix} \right|. \end{aligned}$$

Conséquence :

En choisissant judicieusement la ligne (ou la colonne) par laquelle est effectué le développement, il est possible de simplifier largement les calculs. Les lignes (ou colonnes) possédant des éléments nuls sont particulièrement recherchées.

Application :

1. Calculer $|\mathbf{A}|$ pour une matrice carrée de dimension $n = 2$.
2. Faire l'application avec :

$$\begin{aligned} \text{(a) } \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \\ \text{(b) } \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

3. Calculer $|\mathbf{A}|$ pour une matrice carrée de dimension $n = 3$.
4. Faire l'application avec :

$$(a) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 15 & -6 & 33 \\ 6 & 0 & 9 \\ -33 & -9 & -6 \end{bmatrix},$$

$$(b) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 1 \\ 0,1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -0,5 \end{bmatrix}.$$

2.8. Résolution d'un système d'équations linéaires :

2.8.1. Règle de Kramer :

Soit un système linéaire de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Alors :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|}. \quad (2.49)$$

De même :

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|}; \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|}. \quad (2.50)$$

Cette règle peut être appliquée à n'importe quel système de n équations à n inconnues **pourvu que le déterminant de $\mathbf{A}$ soit non nul**.

Application :

Une population de souris contient 100 individus. Elle est composée de mâles de couleur grise et de femelles blanches. Au bout d'un mois de développement non contrôlé, le nombre d'individus au sein de la population est de 284. Au cours de l'expérience, 25% des reproductions ont conduit à une souris blanche. Sachant qu'aucune souris n'est morte pendant l'expérience, et que les populations de mâles et de femelles ont été multipliées respectivement par 2 et 3 :

1. Déterminer le nombre de mâles et le nombre de femelles au début de l'expérience.
2. Déterminer le nombre de souris grises et le nombre de souris blanches à la fin de l'expérience.

Application :

Un agriculteur a livré à sa coopérative 30 tonnes de blé, 45 tonnes de tournesol et 75 tonnes de sorgho. Il a reçu, en échange, 234 M€. Le prix de la tonne de blé est la moyenne du prix de la tonne de tournesol et du prix de la tonne de sorgho. D'autre part, s'il avait livré une tonne de chacun de ces produits, il aurait reçu 5,1 M€.

1. Quel est le prix payé à la tonne de chacun des produits livrés ?

2.9. Matrice inverse :

2.9.1. Définition :

Deux matrices carrées **A** et **B** sont inverses si leur produit est égal à la matrice identité :

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I}. \quad (2.51)$$

B est alors notée $\mathbf{A}^{-1}$ et $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$. La matrice inverse est utilisée dans la résolution des systèmes d'équations linéaires de la forme $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$. En effet, $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$ (attention, multiplication à gauche).

2.10. Matrice pseudo-inverse :

Il s'agit de l'extension aux systèmes non carrés du concept de matrice inverse. Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, la pseudo inverse de **A**, notée $\mathbf{A}^+$ satisfait aux conditions suivantes :

$$\mathbf{AA}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}, \quad (2.52)$$

$$\mathbf{A}^+\mathbf{AA}^+ = \mathbf{A}^+, \quad (2.53)$$

$$(\mathbf{AA}^+)^T = \mathbf{AA}^+ \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad (2.54)$$

$$(\mathbf{A}^+\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^+\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}. \quad (2.55)$$

Il existe une matrice pseudo-inverse à gauche ($\in \mathbb{R}^{n \times m}$) et une pseudo-inverse à droite ($\in \mathbb{R}^{n \times m}$). La résolution du système est alors, $\mathbf{x} = \mathbf{A}^+\mathbf{y}$ (attention, la solution n'existe pas forcément). La matrice pseudo-inverse à gauche permet de résoudre les problèmes sur-dimensionnés (plus d'équations que d'inconnues). Elle minimise l'erreur quadratique moyenne (solution la plus proche de **y** au sens des moindres carrés). La matrice pseudo-inverse à droite permet de résoudre les problèmes sous-dimensionnés (moins d'équations que d'inconnues). Elle minimise la norme quadratique moyenne.

2.10.1. Propriétés de la matrice inverse :

Si le système est carré et $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (et $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$) non singulière(s) (déterminant non nul) :

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^+, \quad (2.56)$$

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}, \quad (2.57)$$

$$(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}, \quad (2.58)$$

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}, \quad (2.59)$$

$$|\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^{-1}. \quad (2.60)$$

La résolution du système est alors, $\mathbf{x} = \mathbf{A}^+\mathbf{y}$.

2.10.2. Calcul de la matrice inverse :

La matrice inverse $\mathbf{A}^{-1}$ d'une matrice carrée $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est donnée par la relation (matrice des cofacteurs ou adjointe divisée par le déterminant de **A**) :

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\tilde{\mathbf{A}}}{|\mathbf{A}|}. \quad (2.61)$$

Il faut donc que le déterminant de **A** soit non nul ! Sinon, le système n'a pas de solution. La matrice est alors dite régulière ou non singulière. Il existe d'autres méthodes pour calculer l'inverse d'une matrice, comme celle du pivot de Gauss.

Application :

En reprenant l'exercice précédent sur la livraison de céréales par un agriculteur à sa coopérative :

1. Déterminer la matrice inverse de la matrice du système résolu.
2. Vérifier la validité de votre calcul et résolvant de nouveau le problème à partir de la matrice inverse.

2.11. Rang d'une matrice :

Le rang d'une matrice correspond au nombre maximum de colonnes ou de lignes linéairement indépendantes. C'est aussi l'ordre du plus grand déterminant non nul. Une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est dite de rang plein si $\text{rang}(\mathbf{A}) = \min(m, n)$. Une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est inversible si son rang est égal à n .

2.11.1. Propriétés :

Quelle que soit la matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}^T) = \text{rang}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) = \text{rang}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}). \quad (2.62)$$

2.12. Trace d'une matrice :

La trace d'une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est égale à la somme des éléments de sa diagonale :

$$\text{trace}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{ii}. \quad (2.63)$$

Application :

1. Démontrer la propriété suivante :

$$\text{— } \text{trace}(\mathbf{AB}) = \text{trace}(\mathbf{BA}) :$$

2.13. Valeurs et vecteurs propres d'une matrice :

2.13.1. Définition :

Soit une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Les valeurs propres λ_i de cette matrice sont les racines (solutions) de l'équation polynomiale :

$$|\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}| = 0. \quad (2.64)$$

L'ensemble des valeurs propres d'une matrice constitue son spectre. Les vecteurs propres $\mathbf{v}_i$ de la matrice se déduisent de :

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i. \quad (2.65)$$

Ils sont définis à une constante près.

2.13.2. Propriétés :

Soit une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$|\mathbf{A}| = \prod_{i=1}^n \lambda_i, \quad (2.66)$$

$$\text{trace}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i. \quad (2.67)$$

2.14. Diagonalisation d'une matrice :

Si les valeurs propres d'une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont réelles et simples (toutes différentes, pas de racine multiple), il est possible de transformer $\mathbf{A}$ et de la "rendre" diagonale sous la forme :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \lambda_n \end{bmatrix}. \quad (2.68)$$

Soit $\mathbf{P}$ la matrice formée des vecteurs propres :

$$\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_i \dots \mathbf{v}_n]. \quad (2.69)$$

Elle est appelée matrice modèle de $\mathbf{P}$. La matrice $\mathbf{D}$ est alors définie par :

$$\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}. \quad (2.70)$$

$\mathbf{A}$ est alors **conjuguée** par $\mathbf{P}$. La diagonalisation permet de résoudre de façon élégante des problèmes qui peuvent sembler complexes au premier abord. Des solutions numériques sont souvent utilisées pour calculer les valeurs et vecteurs propres d'une matrice.

3

Analyse

3.1. Suites de nombres réels

Une suite numérique est une application u de $\mathbb{N}$, privé éventuellement d'un nombre fini d'éléments, dans $\mathbb{R}$. La notation u_n est souvent préférée à $u(n)$ pour le terme général de la suite (u_n) . Une suite (u_n) est souvent définie par l'expression de son terme général ou par une relation de récurrence.

Exemples :

- $u_n = \frac{1}{n}$,
- $u_n = \frac{n^2+2}{-3n^3}$,
- $u_n = \ln(\cos^2(n)) + 2\frac{1}{n^2}e^{\sqrt{n}}$.

Application :

1. Un couple de lapins produit chaque mois un nouveau couple qui ne devient productif qu'à partir du deuxième mois de son existence. En supposant une fidélité des couples et pas de mortalité, combien de lapins auront été produits au bout d'un an ?
2. Quelle est l'expression de la suite permettant de définir le nombre de lapins en fonction du nombre de mois ?

3.1.1. Suites monotones :

- Une suite (u_n) est stationnaire si $u_n = u_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$,
- Une suite (u_n) est croissante si $u_n \leq u_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$,
- Une suite (u_n) est décroissante si $u_n \geq u_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$,

3.1.2. Suites bornées :

- Une suite (u_n) est majorée si $\exists M \in \mathbb{R}$, tel que $u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$,
- Une suite (u_n) est minorée si $\exists m \in \mathbb{R}$, tel que $u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}$,
- Une suite (u_n) est bornée si elle est majorée et minorée :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad |u_n| \leq M, \quad \forall n. \quad (3.1)$$

3.1.3. Définition de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$:

Si tout intervalle ouvert contenant un nombre donné $l \in \mathbb{R}$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, la suite est dite convergente vers l .

3.1.4. Définition de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$:

Si tout intervalle du type $]A, +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, la suite est dite divergente vers $+\infty$.

3.1.5. Définition de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$:

Si tout intervalle du type $] -\infty, -A]$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, (u_n) est dite divergente vers $-\infty$.

3.1.6. Opérations sur les suites convergentes :**Combinaison linéaire :**

λ et μ étant des réels, si (u_n) converge vers l_1 , et si (v_n) converge vers l_2 , alors, la suite $(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge vers $\lambda l_1 + \mu l_2$.

Produit :

Si (u_n) converge vers l_1 , et si (v_n) converge vers l_2 , alors, la suite $(u_n v_n)$ converge vers $l_1 l_2$.

Quotient :

Si (u_n) converge vers l_1 , et si (v_n) converge vers $l_2 \neq 0$, alors, la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers $\frac{l_1}{l_2}$.

3.1.7. Image d'une suite convergente :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , et a un point de I . f a pour limite l au point a si, et seulement si, pour toute suite (x_n) convergeant vers a , la suite $(f(x_n))$ converge vers l , finie ou non. Pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite lorsque x tend vers a , il suffit donc de fournir un seul exemple de suite (x_n) qui tende vers a et telle que $(f(x_n))$ soit divergente ou ne tende pas vers l .

3.1.8. Relation d'ordre :

Si (u_n) converge vers l_1 , et si (v_n) converge vers l_2 , et si $u_n \leq v_n, \forall n$, alors $l_1 \leq l_2$.

3.1.9. Théorème d'encadrement (ou des gendarmes) :

Si (u_n) et (v_n) sont des suites convergeantes vers la même limite l , et si $u_n \leq w_n \leq v_n, \forall n$, alors (w_n) a pour limite l .

3.1.10. Existence de limites :**Convergence des suites monotones :**

- Toute suite croissante et majorée par un M donné est convergente vers une limite $l \leq M$,
- Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$,
- Toute suite décroissante et minorée par un m donné est convergente vers une limite $l \geq m$,
- toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

Suites extraites :

- Une suite (v_n) est dite extraite d'une suite (u_n) si elle est définie par $v_n = u_{h(n)}$ où h est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$,
- (v_n) est aussi appelée sous-suite (u_n) .
- Si (u_n) est une suite convergente de limite l , alors toute sous-suite extraite de (u_n) est aussi convergente et converge vers l ,
- Si deux suites extraites de (u_n) ont des limites distinctes, alors (u_n) est divergente,
- Si deux suites extraites de (u_n) ont la même limite, il n'est possible de conclure que si elles recouvrent tout (u_n) .

Suites adjacentes :

- Deux suites, (u_n) et (v_n) , sont adjacentes si (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$,
- Si deux suites sont adjacentes, elles convergent et possèdent la même limite.

Application :

Soit u_n l'effectif d'une population à la génération n . Cette population suit une croissance logistique si le passage de la génération n à la génération suivante obéit à la formule suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = a u_n \left(1 - \frac{u_n}{K}\right). \quad (3.2)$$

1. Interpréter les constantes a et K lorsque l'effectif est très inférieur à K ou, au contraire, très voisin de K .
2. Qu'arrive-t-il si u_n devient le double de K ?
3. Qu'arrive-t-il si $u_n = 1,5K$?
4. En partant de $u_1 = 100$ et en choisissant $K = 1000$, visualiser et commenter l'évolution de la population suivant diverses valeurs de a :

$$a = 1,2 \quad ; \quad a = 1,8 \quad ; \quad a = 2,2 \quad ; \quad a = 2,8.$$

5. Avec $K = 100$ et $u_1 = 10$, représenter la génération des premières valeurs de u_n en s'appuyant sur la représentation graphique de la fonction f du modèle :
 - (a) avec $a = 1,2$,
 - (b) avec $a = 2,8$.

3.2. Suites Particulières

3.2.1. Suites arithmétiques :

Une suite (u_n) est arithmétique de raison r si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r. \quad (3.3)$$

Pour montrer qu'une suite est arithmétique, il faut montrer que la différence de deux termes consécutifs est constante (ne dépend pas de n). La forme générale d'une suite arithmétique est $u_n = u_0 + nr$. La somme des n premiers termes est donnée par :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = n \frac{u_0 + u_{n-1}}{2}. \quad (3.4)$$

Application :

Cinq personnes se trouvent dans une pièce. L'une d'entre elles remarque que leurs âges sont en progression arithmétique. Sachant que la somme des carrés de leurs âges est égale à l'année où se passe cette histoire (à savoir 1980) et qu'à elles toutes, les personnes totalisent 90 années, quel est l'âge de chacune des personnes ?

3.2.2. Suites géométriques :

Une suite (u_n) est géométrique de raison $q \neq 0$ si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q u_n. \quad (3.5)$$

Pour montrer qu'une suite est géométrique, il faut montrer que le quotient de deux termes consécutifs est constant (ne dépend pas de n). La forme générale d'une suite géométrique est $u_n = u_0 q^n$. La somme des n premiers termes est donnée par :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad \text{si } q \neq 1, \quad (3.6)$$

$$= n u_0, \quad \text{si } q = 1. \quad (3.7)$$

La suite (u_n) converge vers 0 si $|q| < 1$. Elle est stationnaire si $q = 1$. Elle diverge dans les autres cas.

Application :

1. La taille d'un nénuphar double chaque jour. Au bout de 40 jours, il a recouvert tout l'étang. Au bout de combien de jours avait-il recouvert la moitié de l'étang ?
2. Au cours d'une bourse aux livres, un manuel scolaire perd chaque année 12% de sa valeur. Un livre a été acheté neuf en 2005, il coûtait alors 150€. Quel est son prix à la bourse aux livres de 2010 ?
3. Quel sera son prix en 2015 ?

3.2.3. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 :

Les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 sont déterminées par la connaissance de leurs deux premiers termes u_0 et u_1 , ainsi que d'une relation du type :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0, \quad (3.8)$$

où a , b , et c sont des constantes réelles. Elles peuvent se décomposer sous la forme de sommes de suites géométriques de manière à en simplifier l'étude.

3.3. Fonctions d'une variable réelle

f est une fonction définie sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

3.3.1. Sens de variation :

f est croissante sur un intervalle I si $I \subset D$ et :

$$\forall x_1 \in I, \forall x_2 \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2). \quad (3.9)$$

f est décroissante sur un intervalle I si $I \subset D$ et :

$$\forall x_1 \in I, \forall x_2 \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2). \quad (3.10)$$

Avec des inégalités strictes, f est dite strictement croissante ou strictement décroissante. f est monotone sur un intervalle I si elle n'est que croissante ou que décroissante sur I .

3.3.2. Parité, périodicité :

f est paire si :

$$\forall x \in D, \quad -x \in D \text{ et } f(x) = f(-x), \quad (3.11)$$

Son graphe est alors symétrique par rapport à O_y . f est impaire si :

$$\forall x \in D, \quad -x \in D \text{ et } f(x) = -f(-x), \quad (3.12)$$

Son graphe est alors symétrique par rapport à O . f est périodique de période T si :

$$\forall x \in D, \quad x + T \in D \text{ et } f(x + T) = f(x), \quad (3.13)$$

Son graphe est alors invariant de vecteurs $kT\vec{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

3.3.3. Limites :

Par définition :

- f admet une limite l lorsque x tend vers a signifie qu'il est possible d'obtenir $f(x)$ aussi proche de l que souhaité à condition de prendre x suffisamment voisin de a . Ceci est noté : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.
- f admet comme limite $\pm\infty$ lorsque x tend vers a signifie que $f(x)$ peut être aussi grand (en positif ou en négatif) que souhaité pourvu que x soit suffisamment proche de a . Ceci est noté : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Application :

Les fonctions suivantes possèdent-elles des limites en $x = 0$, lorsque x tend vers $\pm\infty$ ou en tout autre point ?

1. $f_1 = x^4 + x^2 - 1$,
2. $f_2 = \frac{x^2-1}{x+1}$,
3. $f_3 = \frac{\sqrt{x}}{2x-1}$.

3.3.4. Propriétés des limites :**Théorème d'encadrement ou des gendarmes**

Soient f , g et h trois fonctions définies au voisinage de x_0 et vérifiant $f \leq g \leq h$. Si f et h ont la même limite l (finie ou infinie) lorsque x tend vers x_0 alors g a pour limite l lorsque $x \rightarrow x_0$.

Opérations algébriques

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 et y admettant des limites l et m , et λ un réel. Alors, les fonctions $f + g$, λf et $f g$ admettent pour limites respectives lorsque $x \rightarrow x_0$: $l + m$, λl et lm . De plus, si $m \neq 0$, $1/g$ admet pour limite $1/m$.

Fonction composée

Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 et telle que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = u_0$. Soit une seconde fonction g définie au voisinage de u_0 et telle que $\lim_{u \rightarrow u_0} g(u) = v$. Alors la fonction $g \circ f$ est définie au voisinage de x_0 et :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = v. \quad (3.14)$$

3.3.5. Fonctions équivalentes :

Soient f et g deux fonctions définies sur I et x_0 un point, fini ou non, appartenant à I ou extrémité de I . Si $\frac{f}{g}$ est définie au voisinage de x_0 , sauf peut-être en x_0 , il est dit que f et g sont équivalentes au voisinage de x_0 si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. \quad (3.15)$$

Ceci est noté : $f \sim g$ ou $f \sim_{x_0} g$.

3.3.6. Propriétés des fonctions équivalentes :

- Si $f_1 \sim_{x_0} g_1$ et $f_2 \sim_{x_0} g_2$, alors $f_1 f_2 \sim_{x_0} g_1 g_2$ et $f_1/f_2 \sim_{x_0} g_1/g_2$.
- Si $f \sim_{x_0} g$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.
- Pour chercher la limite d'un produit ou d'un quotient, il est possible de remplacer chacune des fonctions par une fonction équivalente, choisie pour simplifier le calcul. Attention, ceci ne doit pas être fait dans les sommes ou les fonctions composées.

3.3.7. Fonctions équivalentes classiques :

$$e^x - 1 \sim_0 x \quad ; \quad \sin x \sim_0 x \quad ; \quad 1 - \cos x \sim_0 \frac{x^2}{2} \quad ; \quad (3.16)$$

$$\ln(1+x) \sim_0 x \quad ; \quad \tan x \sim_0 x \quad ; \quad (1+x)^\alpha \sim_0 1 + \alpha x \quad (3.17)$$

Une fonction polynôme est équivalente à :

- Son terme de plus haut degré lorsque x tend vers $\pm\infty$,
- Son terme de plus bas degré lorsque x tend vers 0.

Question :

1. Quel est l'intérêt de ce genre de relation ?
2. Donner un exemple pratique.

3.3.8. Continuité :

Une fonction f est continue en un point x_0 si, et seulement si,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (3.18)$$

(voir figures 3.1(a) et 3.1(b)). Une fonction f définie sur un intervalle ou une réunion d'intervalles I est continue sur I si elle est continue en tout point de I .

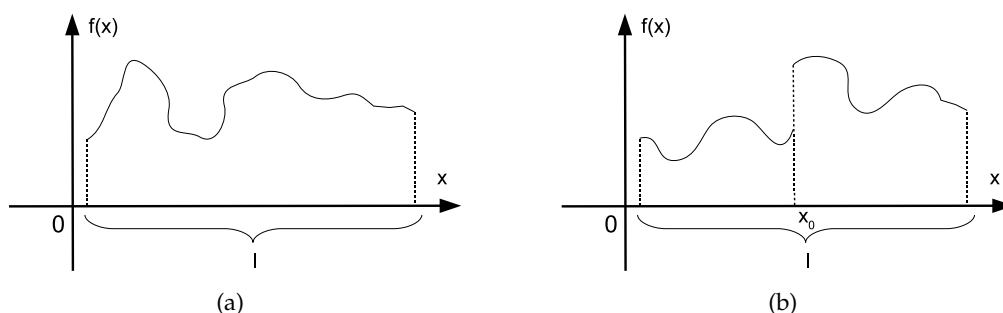


FIGURE 3.1: Fonctions (a) continue et (b) discontinue.

3.3.9. Continuité et opérations :

Soient f et g deux fonctions continues en x_0 , alors :

- $f + g$ et $f g$ sont continues en x_0 ,
- Si $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est continue en x_0 et vaut $\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$.

Si f est continue en x_0 et g continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0 .

3.3.10. Image d'un intervalle par une fonction continue :

Si f est une fonction continue sur un intervalle I , alors $f(I)$ est un intervalle.

Combinaison linéaire :

Si f est une fonction continue sur un intervalle fermé I , alors $f(I)$ est un intervalle fermé.

Conséquence :

Si une fonction f est continue sur $[a, b]$, et si $f(a)f(b) \leq 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ possède au moins une solution dans $[a, b]$.

3.3.11. Fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone :

Soit f une fonction continue et strictement monotone (croissante ou décroissante) sur un intervalle I . Alors :

- f est une bijection de I sur $f(I)$, sa réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone (resp. croissante ou décroissante) sur $f(I)$,
- Dans un repère orthonormé, les graphes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice des axes (voir figure 3.2).

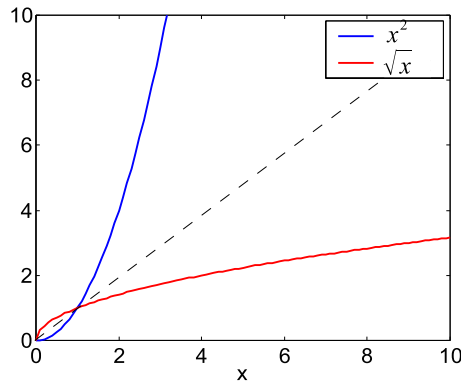


FIGURE 3.2: Fonctions réciproques.

3.4. Calcul intégral

3.4.1. Interprétation géométrique :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Alors $\int_a^b f(x)dx$ se lit "intégrale de a à b de $f(x)$, dx ". Elle correspond à l'aire du domaine du plan situé sous le graphique de f , comptée positivement pour la partie située au-dessus de l'axe des x , négativement pour la partie située en dessous (voir figure 3.3(a)).

3.4.2. Intégration de Riemann :

D'un point de vue numérique, il s'agit de calculer la limite de la somme des aires de tous les petits rectangles contenus sous la courbe, lorsque la largeur de ces rectangles tend vers 0 (voir figure 3.3(b)) :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x) \delta x$$

$$x = a + k(b-a)/n,$$

$$\delta x = (b-a)/n.$$

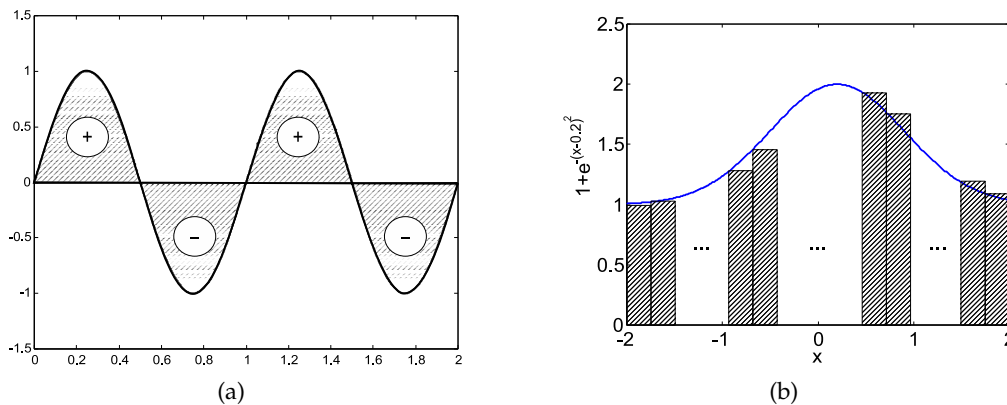


FIGURE 3.3: (a) Aire et Intégrale et (b) Intégration de Riemann.

Il existe plusieurs façons de calculer cette intégrale. Par limite inférieure (voir figure 3.4(a)) :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

$$x_1 = a, x_n = b.$$

Par limite supérieure (voir figure 3.4(b)) :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

$$x_1 = a, x_n = b.$$

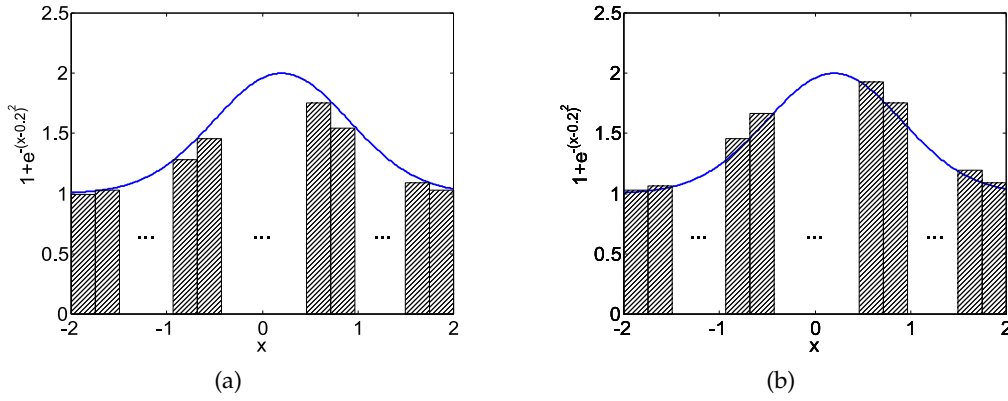


FIGURE 3.4: Limites (a) inférieure et (b) supérieure.

En utilisant les valeurs médianes et non nécessairement moyennes (voir figure 3.5(a)) :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)$$

$$x_1 = a, x_n = b.$$

En utilisant les valeurs moyennes :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$$

$$x_1 = a, x_n = b.$$

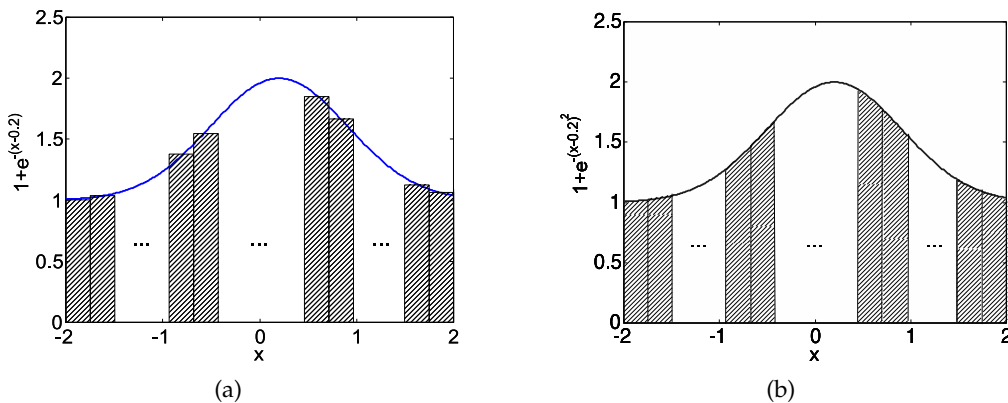


FIGURE 3.5: Limites (a) par valeurs médianes et (b) la méthode des trapèzes.

Par la méthode des trapèzes (voir figure 3.5(b)). Un intérêt pratique de ces calculs pour le médical réside, par exemple, dans la mesure d'aires ou de volumes comme cela peut être visualisé sur les figures 3.6(a) à 3.7(d).

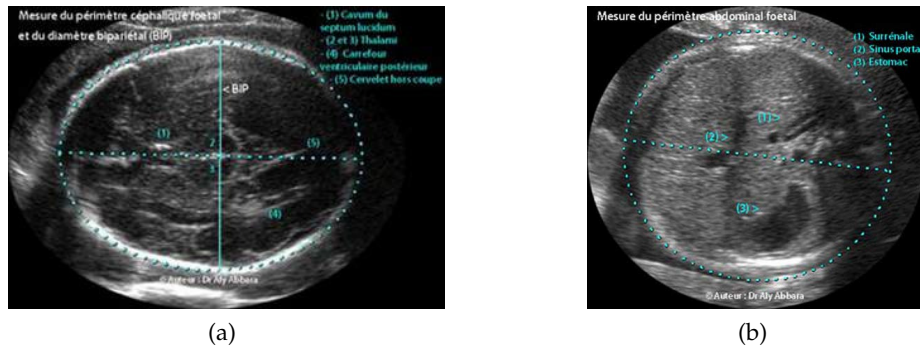


FIGURE 3.6: Echographies fœtales et mesures associées.

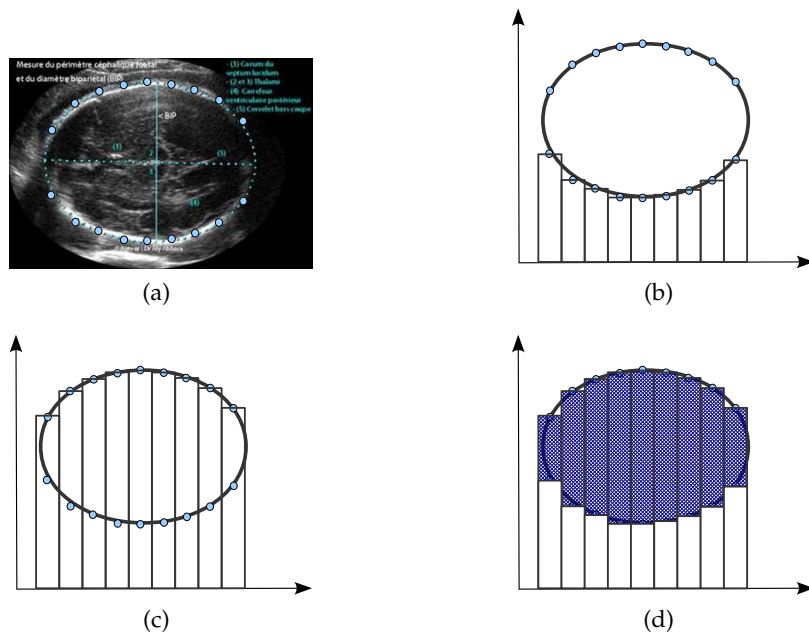


FIGURE 3.7: (a) Echographie fœtale et principes de mesures de surfaces associés.

De plus, si $f(t)$ désigne l'évolution temporelle d'un débit, par exemple le débit de sang à travers une artère ou de médicament à travers une perfusion, alors $\int_a^b f(t)dt$ correspond à la quantité de fluide débitée entre les instants a et b . À titre d'exemple, le POUSSE SERINGUE - PHOENIX M-CP - CE 0459 (figure 3.8) permet de :

- sélectionner le volume à perfuser, le temps de perfusion et le débit,
- sélectionner une bibliothèque de médicaments,
- monitorer de la pression de perfusion,
- sélectionner un seuil de l'alarme d'occlusion réglable.

Il nécessite donc, pour certaines de ces fonctions, la réalisation de calculs d'intégrales.



FIGURE 3.8: POUSSE SERINGUE - PHOENIX M-CP - CE 0459.

Application :

1. Pour chacune des méthodes présentées ci-dessus, écrire un algorithme de calcul de l'intégrale d'une fonction f quelconque.
2. Appliquer cet algorithme aux calculs suivants :
 - (a) $\int_0^{2\pi} \sin(x) dx$,
 - (b) $\int_0^1 x \cos(x) dx$.
3. Quels problèmes sont apparus lors des calculs ?
4. Quelle est la solution la plus appropriée ?

3.4.3. Propriétés du calcul intégral :**Linéarité :**

L'intégration est une fonction linéaire :

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx. \quad (3.19)$$

Relation de Chasles :

L'intégrale de a à c d'une fonction $f(x)$ est égale à la somme de l'intégrale de a à b et de celle de b à c (figure 3.9(a)) :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (3.20)$$

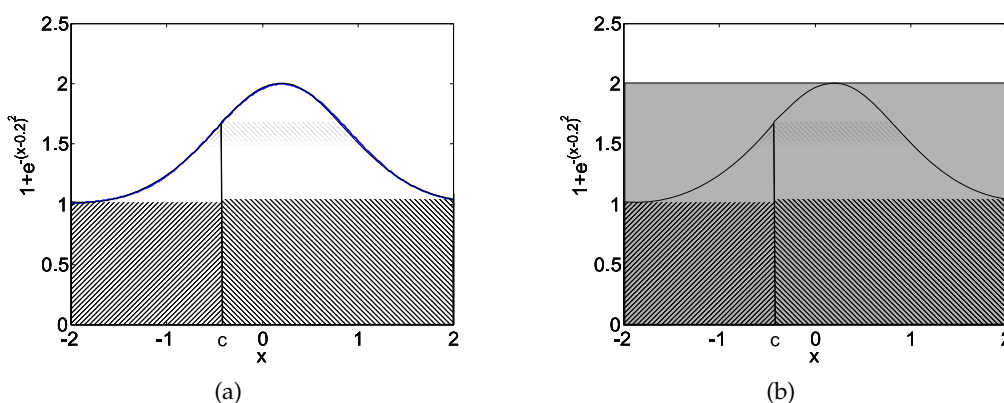


FIGURE 3.9: (a) Relation de Chasles et (b) Inégalité de la moyenne.

3.4.4. Majoration de l'intégrale :**Valeur absolue :**

$$\text{Si } a < b, \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Encadrement :Si, pour tout $x \in [a, b]$, $m \leq f(x) \leq M$, alors :

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

Intégrale et moyenne :Le nombre $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ est la valeur moyenne de f sur $[a, b]$.**Inégalité de la moyenne :**

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq |b-a| \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Cette relation est évidente d'un point de vue géométrique (voir figure 3.9(b)).

3.5. Calcul de primitives**3.5.1. Primitives d'une fonction continue :**Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Une fonction F , définie sur I , est une primitive de f si elle est dérivable (de fonction dérivée F') sur I et si :

$$\forall x \in I, F'(x) = f(x). \quad (3.21)$$

Deux primitives d'une fonction f ne diffèrent que d'une constante. Si f est continue sur un intervalle I contenant a , la fonction F , définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f . Elle est l'unique primitive de f qui s'annule en a . Pour toute primitive h de f sur un intervalle I :

$$\int_a^x f(t) dt = [h(t)]_a^x = h(x) - h(a). \quad (3.22)$$

Le calcul d'intégrales se ramène donc à la recherche de fonctions primitives. Pour toute fonction f admettant une dérivée continue sur I :

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt. \quad (3.23)$$

3.5.2. Linéarité :Si F et G sont des primitives respectives des fonctions f et g sur I , et λ et μ deux réels, alors, sur I , $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$.**3.5.3. Intégration par parties :**Soient u et v deux fonctions de classe C^1 (dérivables et à dérivées continues) sur un intervalle I , et a et b des réels de I . Alors :

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt. \quad (3.24)$$

Application :

1. Pour calculer $\int_a^b P(t) \sin(\alpha t + \beta) dt$, prendre $v(t) = P(t)$ et $u'(t) = \sin(\alpha t + \beta)$,
2. Pour calculer $\int_a^b P(t) \cos(\alpha t + \beta) dt$, prendre $v(t) = P(t)$ et $u'(t) = \cos(\alpha t + \beta)$.

3.5.4. Intégration par changement de variable :

Soit u une fonction de classe C^1 de $[\alpha, \beta]$ dans $[a, b]$, et f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(u(t)) u'(t) dt = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x) dx. \quad (3.25)$$

Si de plus u est bijective :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(t)) u'(t) dt. \quad (3.26)$$

Rappel : si $x = u(t)$, alors $dx = u'(t) dt$.

3.6. Intégrales généralisées**3.6.1. Fonction définie sur un intervalle non borné :**

Soit une fonction f définie sur $[a, +\infty[$ et intégrable sur tout segment $[a, x]$. f est dite d'intégrale convergente sur $[a, +\infty[$ ou que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge ou existe si la fonction

$$x \mapsto \int_a^x f(t) dt \quad (3.27)$$

possède une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Ceci se note :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt = \int_a^{+\infty} f(t) dt. \quad (3.28)$$

Dans le cas contraire, l'intégrale est dite divergente.

3.6.2. Fonction définie sur un intervalle non borné :

De façon analogue :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^a f(t) dt = \int_{-\infty}^a f(t) dt. \quad (3.29)$$

Puis, avec a quelconque :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^a f(t) dt + \int_a^{+\infty} f(t) dt. \quad (3.30)$$

3.6.3. Fonction non bornée sur un intervalle borné :

Soit une fonction f intégrable tout segment $[x, b]$ de sur $]a, b]$. Si la limite

$$\lim_{x \rightarrow a} \int_x^b f(t) dt \quad (3.31)$$

existe, l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est dite convergente. Dans le cas contraire, elle est dite divergente. La définition est similaire pour une fonction définie sur un intervalle $[a, b[$.

3.6.4. Règles de convergence :

Les règles suivantes sont présentées pour des fonctions positives. Des règles similaires peuvent être déduites pour des fonctions négatives.

Comparaison de fonctions :

Soient f et g intégrables sur tout segment et telles que $0 \leq f \leq g$ sur $[a, +\infty[$.

- Si $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge aussi.
- Si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ diverge aussi.

Équivalence de fonctions :

Soient f et g deux fonctions positives.

- Si $f(x) \sim_{+\infty} g(x)$ alors les intégrales $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ sont de même nature.
- Si $f(x) \sim_a g(x)$ alors les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.
- Il est important que les fonctions soient de même signe au voisinage du problème étudié. Sinon, les fonctions peuvent être équivalentes, mais leurs intégrales de natures différentes.

Intégrales de Riemann :

Pour $[a, +\infty[$, avec $a > 0$:

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \text{ converge} \iff \alpha > 1. \quad (3.32)$$

Pour $]0, a]$, avec $a > 0$:

$$\int_0^a \frac{1}{t^\alpha} dt \text{ converge} \iff \alpha < 1. \quad (3.33)$$

3.7. Équations différentielles

De nombreux problèmes ne peuvent se résoudre que sous la forme d'une équation différentielle (ED), c'est-à-dire d'une équation regroupant certains termes ainsi que leurs dérivées. Des méthodes spécifiques ont été développées permettant de simplifier la résolution de ces problèmes en fonction de la forme de l'équation différentielle correspondante.

Exemple :

Soit une maladie contagieuse dans une population. Trois sous-ensembles peuvent être identifiés :

- $S(t)$: nombre d'individus sains,
- $I(t)$: nombre d'individus malades,
- $R(t)$: nombre d'individus morts, ou guéris et immunisés contre la maladie.

Les données de modélisation sont les suivantes :

- Contamination proportionnelle au nombre de rencontres entre individus sains et malades,
- Les malades ont une certaine probabilité de guérir par unité de temps.

La mise en équations impose alors :

$$\partial_t S = -rSI, \quad (3.34)$$

$$\partial_t I = rSI - aI, \quad (3.35)$$

$$\partial_t R = aI. \quad (3.36)$$

Ceci est clairement un système d'équations différentielles couplées. Remarque : $S + I + R$ ne dépend pas du temps (conservation du nombre d'individus).

3.7.1. Équations à variables séparables

Lorsque l'équation est de la forme :

$$f(x(t))x'(t) = g(t), \quad (3.37)$$

où f et g sont des fonctions données dont les primitives F et G sont connues, alors

$$F(x(t)) = G(t) + C. \quad (3.38)$$

Et si F possède une fonction réciproque F^{-1} , les solutions de l'ED sont fournies par :

$$x(t) = F^{-1}(G(t) + C). \quad (3.39)$$

3.7.2. Équations linéaires

Elles sont de la forme :

$$a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c(t), \quad (3.40)$$

où a , b et c sont des fonctions données continues sur un intervalle I . Pour la résolution, il sera supposé que l'étude se déroule sur un intervalle $J \subset I$ dans lequel a ne s'annule pas (sinon, l'équation n'est pas différentielle et la solution est évidente).

Théorème dû à la linéarité :

Toute solution de (3.40) est de la forme $x_p(t) + x_s(t)$ où $x_p(t)$ est une solution particulière de (3.40) et $x_s(t)$ la solution générale de l'équation homogène (sans second membre) associée :

$$a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0. \quad (3.41)$$

La résolution se déroule donc en deux étapes.

Résolution de l'équation homogène associée :

Il s'agit d'une équation à variables séparables. Ses solutions sont du type :

$$x_s(t) = Ke^{-F(t)} \quad \text{ou} \quad F(t) = \int_{t_0}^t \frac{b(u)}{a(u)} du \quad (3.42)$$

avec K une constante arbitraire et t_0 un élément quelconque de I . Elles comportent la fonction nulle et des fonctions qui ne s'annulent jamais.

Recherche d'une solution particulière :

Cette méthode s'appelle **méthode de variation de la constante**. $x_1(t)$ étant une solution non nulle de (3.41), une fonction auxiliaire inconnue $K(t)$ est introduite pour que $x(t) = K(t)x_1(t)$ soit solution de (3.40). Lors du calcul de $x'_1(t)$ puis du report de $x'(t)$ et $x(t)$ dans (3.40), $K(t)$ doit disparaître (auto-vérification) alors que $K'(t)$ doit subsister. Il est alors possible de déduire $K(t)$ puis $x(t)$. Il existe deux variantes équivalentes :

- Chercher tous les $K(t)$ avec une constante d'intégration puis reporter dans $x(t)$,
- Chercher un $K(t)$, reporter dans $x(t)$ et additionner avec $x_s(t)$.

Application (1) :

1. "L'augmentation relative du risque coronarien r pour une même augmentation de la cholestérolémie C est constante à tous les niveaux de la cholestérolémie". Parmi les égalités suivantes, où k est constante, quelle est celle qui traduit cette affirmation ?

$$\begin{array}{lll} 1. \frac{dr}{r} = \frac{k}{C} & 2. \frac{dr}{r} = kC & 3. \frac{dr}{r} = k dC \\ 4. \frac{dr}{r} = k C dC & 5. \frac{dr}{r} = k & \end{array} \quad (3.43)$$

2. Comment le risque coronarien varie-t-il alors en fonction de la cholestérolémie (en tenant compte du fait que la cholestérolémie ne peut être inférieure à un seuil s) ?

Application (2) :

1. Il est supposé que l'équation qui décrit la variation de la concentration sanguine $C(t)$ d'un médicament, en fonction du temps t soit :

$$C'(t) + C(t) = 3e^{-2t}.$$

2. L'origine des temps est prise au moment de l'injection et le médicament ne préexiste pas dans le sang ($C(0) = 0$).
3. Déterminer $C(t)$.

Application (3) :

1. Dans l'étude du traitement préventif de l'ostéoporose par administration transdermique d'une hormone estrogène, il est admis que la variation de la concentration sanguine y de cette hormone vérifie :

$$\frac{dy}{dt} + ay = be^{-t},$$

où a et b sont des constantes, et t le temps.

2. Exprimer la concentration sanguine y en fonction du temps.

Application (4) :

1. La cinétique chimique de la réaction $A + B \rightarrow C$ est de la forme :

$$x'(t) = k(a - x(t))(b - x(t)),$$

où a désigne la concentration initiale du produit A , b celle de B , $x(t)$ la concentration à l'instant t du produit C et k une constante.

2. Intégrer cette équation différentielle et donner la solution vérifiant $x(0) = 0$.
3. Que se passe-t-il au bout d'un temps très long ?

3.8. ED linéaires du second ordre à coefficients constants

Elles sont de la forme :

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = f(t), \quad (3.44)$$

où a , b et c sont des constantes réelles données.

3.8.1. Théorème de Cauchy-Lipschitz :

Si des conditions initiales de la forme $x(t_0) = x_0$ et $x'(t_0) = x_1$ sont imposées, alors l'équation différentielle (3.44) admet une et une seule solution.

3.8.2. Théorèmes dus à la linéarité :

- Toute solution de (3.44) est de la forme $x_p(t) + x_s(t)$ où $x_p(t)$ est une solution particulière de (3.44) et $x_s(t)$ la solution générale de l'équation homogène (sans second membre) associée :

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0, \quad (3.45)$$

- Si x_1 (resp. x_2) est une solution particulière de

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = f_1(t) \text{ resp. } f_2(t), \quad (3.46)$$

alors, $x_1 + x_2$ est solution particulière de

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = f_1(t) + f_2(t). \quad (3.47)$$

3.8.3. Résolution de l'équation homogène :

La fonction $t \mapsto e^{rt}$ est solution de (3.45) si, et seulement si, r vérifie l'équation caractéristique :

$$ar^2 + br + c = 0. \quad (3.48)$$

Soit donc $\Delta = b^2 - 4ac$. Si $\Delta \neq 0$, (3.48) a deux racines (complexes) distinctes r_1 et r_2 , et :

$$x_S(t) = K_1 e^{r_1 t} + K_2 e^{r_2 t}, \quad (3.49)$$

où K_1 et K_2 sont des constantes quelconques. Si $\Delta < 0$, (3.48) a deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$, et :

$$x_S(t) = e^{\alpha t} (K_1 \cos(\beta t) + K_2 \sin(\beta t)), \quad (3.50)$$

où K_1 et K_2 sont des constantes quelconques. Il s'agit d'un cas particulier de la résolution précédente. Enfin, si $\Delta = 0$, (3.48) a une racine double r_0 , et :

$$x_S(t) = (K_1 t + K_2) e^{r_0 t}, \quad (3.51)$$

où K_1 et K_2 sont des constantes quelconques.

3.8.4. Recherche d'une solution particulière dans certains cas :

Si $f(t)$ est un polynôme $P(t)$ de degré n , il existe une solution particulière de (3.44) sous la forme d'un polynôme de degré

- n si $c \neq 0$,
- $n + 1$ si $c = 0$ et $b \neq 0$,
- $n + 2$ si $b = c = 0$ et $a \neq 0$.

La détermination de la solution se fait par identification. Si $f(t) = e^{kt} P(t)$ avec P un polynôme et k une constante, à travers le changement de variable

$$x(t) = e^{kt} z(t), \quad (3.52)$$

où z est une nouvelle fonction inconnue, l'équation est transformée en une autre du type précédent. Si $f(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t) P(t)$ ou $f(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t) P(t)$ avec α et β réels et P un polynôme à coefficients constants, la solution particulière est la partie réelle, ou la partie imaginaire, de la solution particulière obtenue pour l'équation de second membre $e^{(\alpha+i\beta)t}$.

3.9. Exemples de modélisation

Exemple (1) :

Un médicament est administré sous forme d'un implant sphérique homogène. Il est fait l'hypothèse que cet implant reste sphérique et que le médicament est libéré à une vitesse proportionnelle à la surface de l'implant. Exprimer la quantité $q(t)$ de médicament délivrée en fonction du temps. Rappel : la surface d'une sphère de rayon R est $S = 4\pi R^2$ et son volume $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Exemple (2) :

Par une nuit claire et calme, et dans un endroit élevé et désertique, la vitesse d'abaissement de la température est proportionnelle à la puissance quatrième de la température (loi de Stefan). Les mesures suivantes ont été réalisées :

- à $t_0 = 22$ h : $T_0 = 290^\circ\text{K}$, soient 17°C ,
- à $t_1 = 24$ h : $T_1 = 280^\circ\text{K}$, soient 7°C .

Quelle température fera-t-il à 5 h du matin ?