

# Ensemble des nombres complexes

## Master Sciences et Numérique pour la Santé<sup>1,†</sup>

<sup>1</sup> Université de Montpellier, Faculté des Sciences

### Résumé

Cette fiche didactique a pour objectif de synthétiser les notions et formules essentielles à l'utilisation des *nombres complexes*. Dans le cadre du Master, elles trouvent leurs applications dans les modules suivants : HAH807E - Chaîne d'Acquisition / Traitement du Signal, HAH710E - Ingénierie : Électronique, HAH802E - Capteurs et Traitement d'Images, HAH808E - Capteurs US pour le Biomédical, HAH805E - Robotique médicale, HAH806E - Neuroprothèse, HAH906E - Acquisition de données et traitement du signal pour le biomédical, HAH908E - Thermographie IR, détecteurs optiques et US, HAH909E - Robotique médicale 2, HAH910E - Neuroprothèse 2.

**Keywords:** HAH701E Prolégomènes de Mathématique, Nombres Complexes

**Contact :** Emmanuel Le Clézio *e-mail* : emmanuel.le-clezio@umontpellier.fr

**DOI:** <https://sns.edu.umontpellier.fr/>

## 1. Ensemble des nombres complexes

### 1.1. L'imaginaire $i$

L'équation  $x^2 = -1$  ne possède pas de solution dans  $\mathbb{R}$ . Une solution imaginaire  $i$  a donc été créée, telle que  $i^2 = -1$ . L'équation  $x^2 = -1$  possède alors deux solutions  $i$  et  $-i$  car  $x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$ .

### 1.2. L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$

L'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$  est défini comme l'ensemble des couples  $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Dans  $\mathbb{C}$ , les règles d'addition et de multiplication se conservent. Tout élément  $z$  de  $\mathbb{C}$  s'écrit de manière unique  $z = a + ib$  où  $a$  et  $b$  sont réels.

### 1.3. Parties réelle et imaginaire

$a$  est la partie réelle de  $z$  et est notée  $a = \text{Re}(z)$ .  $b$  est la partie imaginaire de  $z$  et est notée  $b = \text{Im}(z)$ . **Attention**, la partie imaginaire de  $z$  est un nombre réel !

### 1.4. Égalité entre deux nombres complexes

La notion d'ordre n'existe plus dans  $\mathbb{C}$ . De plus, l'égalité de deux nombres complexes  $z = a + ib$  et  $z' = a' + ib'$  est équivalente à l'égalité simultanée de leurs parties réelles et imaginaires :

$$z = z' \Leftrightarrow a = a' \text{ et } b = b'. \quad (1)$$

## 2. Représentation géométrique

Comme présenté sur les figures 1(a) et 1(b), à tout nombre complexe  $z = a + ib$  peut être associé un point  $M(a; b)$  ou un vecteur  $\vec{u} = (a \ b)^T$ . Cette équivalence permet de traduire les problèmes

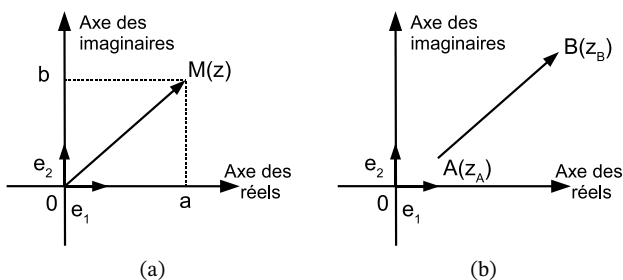


FIGURE 1. (a) Plan complexe et (b) affixe du vecteur  $\vec{AB}$ .

géométriques en problèmes algébriques. Soient  $z_A$  et  $z_B$  les affixes des points  $A$  et  $B$ , l'affixe du vecteur est :

$$aff(\vec{AB}) = z_B - z_A. \quad (2)$$

## 3. Conjugué, module et argument

Le conjugué d'un nombre complexe  $z = a + ib$  est le nombre complexe  $\bar{z} = a - ib$ . Il en découle :

- $\text{Re}(z) = \text{Re}(\bar{z})$  et  $\text{Im}(z) = -\text{Im}(\bar{z})$ ,
- $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$ ,
- $z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$ ,
- $z$  est réel  $\Leftrightarrow z = \bar{z}$ ,
- $z$  est imaginaire pur  $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$ .

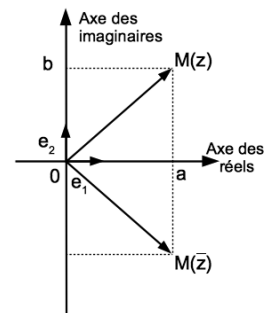


FIGURE 2. Nombres conjugués.

### 3.1. Propriétés de la conjugaison :

Différentes propriétés de la conjugaison sont à connaître :

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}, \quad \overline{-z} = -\bar{z}, \quad \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'}, \quad \overline{z^n} = \bar{z}^n, \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}.$$

### 3.2. Module

Si  $z = a + ib$ ,  $\bar{z}$  est un nombre complexe tel que  $z\bar{z}$  est un nombre réel égal à  $z\bar{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$ . Le module d'un nombre complexe  $z = a + ib$  est défini comme le nombre **réel positif** :

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (3)$$

### 3.3. Argument

L'argument d'un nombre complexe **non nul**  $z = a + ib$  est une mesure de l'angle orienté  $(\vec{e}_1, \vec{OM})$  (fig. 3(a)). Il est noté  $\theta [2\pi]$ , lu **modulo**  $2\pi$ . L'argument contenu dans  $]-\pi, \pi]$  est appelé argument principal. 0 ne possède pas d'argument, un nombre réel pur possède un argument nul modulo  $\pi$ , un nombre imaginaire pur possède un argument égal à  $\frac{\pi}{2} [\pi]$ . Les fig. 3(a) et 3(b) montrent que quelque soit  $\theta$  :

$$\cos \theta = \frac{a}{|z|}, \quad \sin \theta = \frac{b}{|z|}. \quad (4)$$

### 3.4. Propriétés des modules :

Pour tous nombres complexes  $z$  et  $z'$  :

- Module d'un produit :  $|zz'| = |z||z'|$ ,
- Si  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $|\lambda z| = |\lambda||z|$ ,

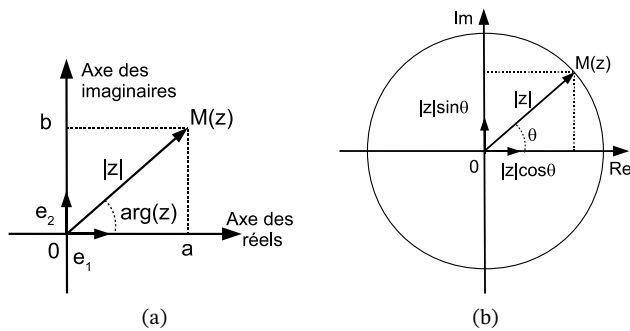


FIGURE 3. (a) Module et argument, (b) Cercle Trigonométrique.

- Module d'un quotient :  $|\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|}$ .
- Pour tout  $z \neq 0$ ,  $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$ ,
- Inégalité triangulaire :  $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ .

### 3.5. Propriétés des arguments :

Pour tout nombre complexe  $z \in \mathbb{C}^*$  (voir figure 4(a)) :

- Argument du conjugué :  $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) [2\pi]$ ,
- Argument de l'opposé :  $\arg(-z) = \arg(z) + \pi [2\pi]$ ,
- Argument de l'opposé de  $\bar{z}$  :  $\arg(-\bar{z}) = \pi - \arg(z) [2\pi]$ .

### 3.6. Remarque :

- Si  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  :  $\arg(\lambda z) = \arg(z) [2\pi]$ ,
- Si  $\lambda \in \mathbb{R}_-^*$  :  $\arg(\lambda z) = \arg(z) + \pi [2\pi]$ .

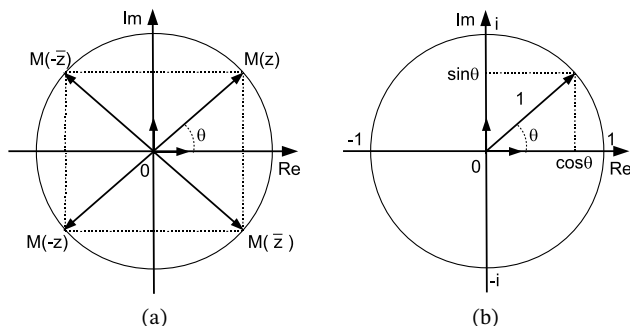


FIGURE 4. (a) Arguments du conjugué et de l'opposé, (b) Cercle Trigonométrique.

### 3.7. Propriétés des arguments :

Pour tous nombres complexes  $z, z' \in \mathbb{C}^*$  :

- Produit :  $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$ ,
- Inverse :  $\arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z) [2\pi]$ ,
- Quotient :  $\arg(\frac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$ ,
- Puissance :  $\arg(z^n) = n\arg(z) [2\pi] \forall n \in \mathbb{Z}$ .

## 4. Forme polaire

### 4.1. Ecriture d'un nombre complexe :

Du fait des propriétés précédentes, plusieurs écritures d'un nombre complexe peuvent cohabiter.

- Forme cartésienne ou algébrique :

$$z = a + ib. \quad (5)$$

- Forme polaire :

$$z = |z|(\cos(\theta) + i \sin(\theta)), \quad (6)$$

$$z = |z|e^{i\theta}. \quad (7)$$

Il peut-être ici judicieux de noter que :

$$a = \operatorname{Re}(z) = |z| \cos(\theta), \quad (8)$$

$$b = \operatorname{Im}(z) = |z| \sin(\theta). \quad (9)$$

### 4.2. Exponentielle complexe :

Pour tout réel  $\theta$ , le nombre complexe  $\cos(\theta) + i \sin(\theta)$  est noté  $e^{i\theta}$ . Les propriétés de la fonction exponentielle sont alors conservées. En particulier :

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}, \quad (10)$$

$$e^{i(\theta-\theta')} = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} \quad (11)$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{ni\theta} \text{ pour } n \in \mathbb{Z}. \quad (12)$$

## 5. Formules de Moivre et d'Euler

Ces formules permettent de fortement simplifier la résolution de certains problèmes. Il peut cependant être utile de s'aider du cercle trigonométrique (figure 4(b)) pour les retrouver.

### 5.1. Formules de Moivre :

Pour tout réel  $\theta$  et tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta), \quad (13)$$

$$(\cos \theta - i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) - i \sin(n\theta). \quad (14)$$

### 5.2. Formules d'Euler :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad (15)$$

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \quad (16)$$

## 6. Racines d'un nombre complexe

Pour tout nombre complexe  $z = |z|e^{i(\theta+2k\pi)} \in \mathbb{C}$ , avec  $k \in \mathbb{Z}$  :

$$z^{1/2} = \sqrt{|z|}e^{i(\frac{\theta}{2}+k\pi)}. \quad (17)$$

Cette écriture démontre l'existence de deux racines complexes de  $z$  :  $\sqrt{|z|}e^{i(\frac{\theta}{2}+2k\pi)}$  et  $\sqrt{|z|}e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi+2k\pi)}$ . De même, il existe exactement  $n$  racines  $n^{\text{ème}}$  de tout nombre complexe  $z$  :

$$z^{1/n} = \sqrt[n]{|z|}e^{i(\frac{\theta+2k\pi}{n})} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}. \quad (18)$$

## 7. Fonctions d'un nombre complexe

### 7.1. Résolution d'une équation du second degré :

Soit une équation du second degré de la forme  $ax^2 + bx + c = 0$ . Son discriminant  $\Delta$  est de la forme  $\Delta = b^2 - 4ac$ . Si  $\Delta > 0$ , l'équation possède **exactement** deux solutions réelles :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}. \quad (19)$$

Si  $\Delta = 0$ , l'équation possède une racine double :  $x = \frac{-b}{2a}$ . Si  $\Delta < 0$ , l'équation possède **exactement** deux solutions complexes conjuguées :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}. \quad (20)$$

Conséquences : Dans  $\mathbb{C}$ , une équation polynomiale d'ordre  $n$  possède toujours **exactement**  $n$  racines (complexes).

**7.2. Fonctions exponentielles et sinusoïdales :**

Des relations précédemment exposées, il est possible de déduire les propriétés de fonctions de nombres complexes, et en particulier de la fonction exponentielle et des fonctions sinusoïdales.

- Fonction exponentielle : Soit  $z = x + iy$  un nombre complexe quelconque.

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y)). \quad (21)$$

- Fonctions sinusoïdales : Elles sont reconstruites à partir des formules d'Euler. Exemple :

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \quad (22)$$