A regarder : Sections soulignées en jaune

Matrices, systèmes linéaires

14 septembre 2016

1 Espace vectoriels, bases, dimension

1.1 Espaces vectoriels

Notion 1.1 *Un espace vectoriel est un ensemble non vide où l'on a défini une « addition » et une « multiplication par un nombre » réel (ou complexe). On ne donne pas la définition mathématique rigoureuse car elle sort largement du cadre de ce cours. On appelle vecteur tout élément d'un espace vectoriel et scalaires les nombres par lesquels on peut multiplier les vecteurs.*

Exemples

— Dans $\mathbb{R}^2$, un vecteur est un couple

— dans $\mathbb{R}^3$, un vecteur est un triplet

— De manière générale, dans le cas de $\mathbb{R}^n$, un vecteur est un n-uplet et les opérations définies sur cet ensemble sont :

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$
$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

En biologie, plusieurs situations peuvent être modélisées par des vecteurs de R^n. Ainsi :

— Lorsque l'on veut suivre les variations de la population d'une espèce, on décompose cette dernière en 2, 3, ..., ou n classes d'âge qui définissent alors, un couple, un triplet et de manière générale, un n-uplet.

— Les molécules évoluent dans un espace de dimension trois et pour repérer ses atomes, on utilise les trois coordonnées de l'espace.

— Selon les études ou relevés statistiques dans des enquêtes, nous manipulons des vecteurs avec autant de composantes que de paramètres quantifiés.

1.2 Sous espaces vectoriels

Notion 1.2 *Soit E un espace vectoriel ; une partie non vide F de E est un sous- espace vectoriel si elle vérifie la propriété suivante :*

$$\forall(u, v) \in F,\ \forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \lambda u + \mu v \in F.$$

Exemples

— Dans tout espace vectoriel E, $\{0\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E.

— Dans $\mathbb{R}^2$, la droite $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x - 3y = 0\}$ est un sous espace vectoriel, alors que la droite $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x - 3y = 1\}$ n'en est pas un.

1.3 Bases d'un espace vectoriel, dimension

Notion 1.3 *On appelle combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \ldots, v_p$ de l'espace vectoriel E tout vecteur de E de la forme $\lambda_1 v_1 + \ldots \lambda_p v_p$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont des scalaires.*

On note vect$(v_1, \ldots, v_p)$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de la famille $(v_1, \ldots, v_p)$. C'est un sous-espace vectoriel de E.

*Une famille de vecteurs $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ est une **base de l'espace vectoriel** E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de cette famille.*

*Si $(v_1, \ldots, v_p)$ est une base de l'espace vectoriel E, l'entier naturel p est appelé **dimension** de E.*

Exemples

— la famille de vecteurs $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$ forme une base de R^3. On l'appelle base canonique de R^3.

— Par convention, l'espace vectoriel $\{0\}$ a pour dimension 0.

— R^n est de dimension n

— les solutions d'une équation différentielle homogène du second ordre dont le coefficient de y'' ne s'annule pas sur un intervalle I forment un espace vectoriel de dimension 2.

2 Introduction aux matrices

2.1 Matrices

Notion 2.1 *Une matrice à n lignes et m colonnes est un tableau*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

dont les éléments (ou coefficients) sont des nombres. Dans la notation du coefficient a_{ij}, le premier indice est le numéro de la ligne et le deuxième indice, celui de la colonne. On dit que la matrice est de format (n, m). L'ensemble des matrices de ce même format se note $\mathcal{M}_{nm}$.

Exemples

— une matrice est nulle si tous ses coefficients sont nuls

— Une matrice est carrée si elle a autant de lignes que de colonnes. Si on note n le nombre de lignes et de colonnes, l'ensemble des matrices carrées de format (n, n) est noté $\mathcal{M}_n$,

— Une matrice carrée est diagonale si les éléments qui sont en dehors de la diagonale principale sont nuls : $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.
Pour simplifier, on la note : diag $(a_{11}, \ldots, a_{nn})$,

— Une matrice carrée est triangulaire supérieure (respectivement inférieure) si les éléments qui sont en dessous (respectivement au- dessus) de la diagonale principale sont nuls : $a_{ij} = 0$ si $i < j$ (respectivement $i > j$).

— Une matrice colonne possède une seule colonne ($m = 1$) et une matrice ligne possède une seule ligne ($n = 1$).

2.2 Représentation d'un vecteur dans une base

Notion 2.2 *Soit E un espace vectoriel de dimension n et $v = (v_1, \ldots, v_n)$ une base. Pour tout vecteur x de E, il existe n scalaires uniques $x_1, \ldots, x_n$ tels que*

$$x = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n.$$

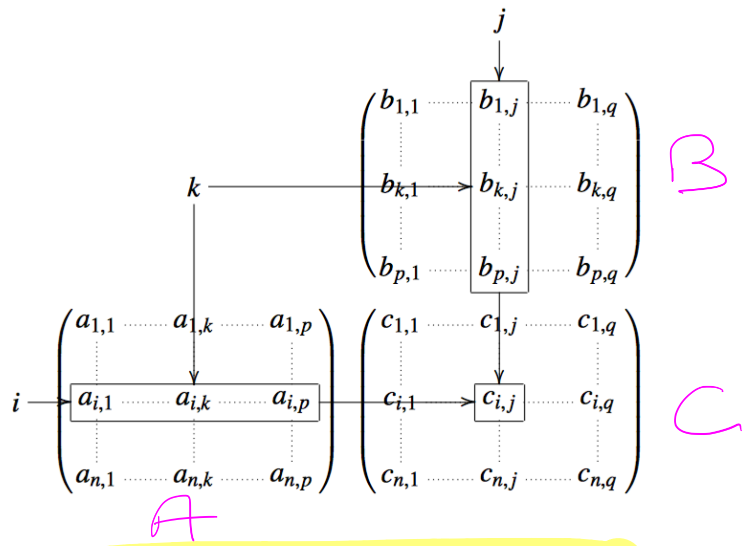

FIGURE 1 – Illustration du produit de 2 matrices

AB = C

On appelle représentation matricielle du vecteur x dans la base v, la matrice colonne

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Nous verrons plus loin comment sont reliées deux représentations matricielles d'un même vecteur par rapport à deux bases.

2.3 Opérations sur les matrices

Notion 2.3 *Nous utiliserons les opérations suivantes :*

1. ***transposition*** *d'une matrice : on appelle transposée d'une matrice A la matrice, notée ${}^tA$, et obtenue à partir de A en échangeant les lignes et les colonnes. Ainsi, si la matrice A a m lignes et n colonnes, la matrice ${}^tA$ a n lignes et m colonnes.*
2. ***Somme*** *: Soit A et B deux matrices de même format (n, m). La somme $C = A + B$ est la matrice de format (n, m) définie par :*
$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$
pour tout i et pour tout j.
3. ***multiplication par un réel*** *: Soit A une matrice de format (n, m) et λ un réel. La matrice $B = \lambda A$ est la matrice de format (n, m) définie par :*
$$b_{ij} = \lambda a_{ij}$$
pour tout i et pour tout j.
4. ***produit de 2 matrices*** *: pour $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{nm}$ et $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{mp}$, on définit le produit $AB = C$ par*
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}.$$
Cette définition implique que le produit de deux matrices n'est possible que si le nombre de colonnes de la première est égal au nombre de lignes de la seconde. Voir Figure **??** *pour une illustration graphique.*

Exemples

— si
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$
on a
$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

— La transposée d'une matrice colonne (respectivement ligne) est une matrice ligne (resp. colonne) :

$$^t(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

— si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

et

$$B = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 60 \end{pmatrix}$$

alors

$$A + B = \begin{pmatrix} 11 & 22 & 33 \\ 44 & 55 & 66 \end{pmatrix}$$

— si

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 7 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

alors on a

$$AB = \begin{pmatrix} 13 & 2 & -7 \\ -23 & -14 & -2 \\ -21 & -2 & 13 \end{pmatrix}$$

et

$$BA = \begin{pmatrix} 20 & -7 \\ -20 & -8 \end{pmatrix}$$

— le produit d'une matrice à 1 ligne et d'une matrice à 1 colonne donne une matrice à 1 ligne et 1 colonne (autrement dit, c'est un scalaire !) :

$$\begin{pmatrix} x_1, & \dots, x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$

— Le produit de deux matrices diagonales de même format est une matrice diagonale de même format :

$$\text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn}) \times \text{diag}(b_{11}, \dots, b_{nn}) = \text{diag}(a_{11}b_{11}, \dots, a_{nn}b_{nn})$$

2.4 Quelques propriétés supplémentaires

Comme pour les nombres et quand les produits sont définis, on a :

— $(A_1 + A_2)B = A_1 B + A_2 B$ et $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$

— $(AB)C = A(BC)$

— Si 0 est la matrice nulle (avec les dimensions adéquates), alors quelle que soit la matrice A, $A0 = 0$ et $0A = 0$

— $^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

Par contre, à la différence des nombres et quand les produits sont définis :

— $AB \neq BA$ en général

— $AB = 0$ n'implique pas nécessairement que $A = 0$ ou $B = 0$

Sous réserve que les multiplications soient bien définies, on a :

- $\left(\begin{array}{c|c|c} C_1 & \cdots & C_n \end{array}\right) \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1C_1 + \cdots + x_nC_n \end{pmatrix}$;
- $\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \times \left(\begin{array}{c} L_1 \\ \hline \vdots \\ \hline L_n \end{array}\right) = \begin{pmatrix} x_1L_1 + \cdots + x_nL_n \end{pmatrix}$;
- $A \times \left(\begin{array}{c|c|c} C_1 & \cdots & C_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} AC_1 & \cdots & AC_n \end{array}\right)$;
- $\left(\begin{array}{c} L_1 \\ \hline \vdots \\ \hline L_n \end{array}\right) \times A = \left(\begin{array}{c} L_1A \\ \hline \vdots \\ \hline L_nA \end{array}\right)$.

FIGURE 2 – Formules de produit par lignes et colonnes

2.5 Formule du binôme

On peut calculer des puissances de matrices. Partant du simple carré, défini par $A^2 = AA$, on définit la récurrence $A^p = AA^{p-1} = A^{p-1}A$, avec la convention $A^0 = I_n$.

A la condition que $AB = BA$, on a comme pour les nombres :

$$\forall p \in \mathbb{N} \ \ (A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k A^k B^{p-k}$$

2.6 Produits pas lignes ou colonnes

Certaines formules de produits facilitent parfois les calculs, voir Figure **??**. On en déduit que si A à une ligne nulle alors AB a une ligne nulle. Si B a une colonne nulle, alors AB a une colonne nulle.

2.7 Matrices inversibles

Nous devons d'abord définir ce qu'on nomme matrice identité :

Notion 2.4 *on appelle **matrice identité** d'ordre n la matrice diagonale ne comportant que des 1. On la note I_n. Remarquons que :*

1. *Quelle que soit la matrice A, carrée d'ordre n, on a : $I_nA = AI_n = A$. On retrouve la propriété du nombre 1 pour les nombres.*

2. *Remarquons aussi que si X est une matrice colonne de n lignes, on a $I_nX = X$*

Parlons maintenant du caractère inversible d'une matrice :

Notion 2.5 *Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_n$. S'il existe une matrice $C \in \mathcal{M}_n$ vérifiant*

$$AC = CA = I_n,$$

*alors A est dite **inversible**, la matrice C est unique et est appelée l'inverse de A. On la note $C = A^{-1}$.*

L'ensemble des matrices inversibles est noté $\mathcal{GL}_n$.

Nous verrons plus loin comment déterminer en pratique si une matrice carrée est inversible, et le cas échéant comment calculer son inverse . En pratique, nous aurons aussi besoin des propriétés suivantes :

— $(A^{-1})^{-1} = A$

— si A est inversible alors ${}^tA$ est inversible et on a $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

— si A et B sont inversibles alors AB est inversible et on a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

— si A est inversible alors A^p est inversible et $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$

— Cas des matrices diagonales : une matrice diagonale $D = \text{diag}(d_{11}, \dots, d_{nn})$ est inversible si, et seulement si, tous ses coefficients diagonaux sont non nuls et alors :

$$D^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{d_{11}}, \dots, \frac{1}{d_{nn}}\right).$$

Notion 2.6 *Dans le cas de $\mathcal{M}_2$, le calcul de l'inverse est très simple. La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$ et on a*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Cette dernière notion trouvera son explication dans la suite.

3 Systèmes Linéaires

3.1 Qu'est ce qu'un système linéaire ?

Notion 3.1 *On appelle système linéaire à n équations et p inconnues $x_1, \dots, x_p$ un système (S) de la forme :*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p = b_1, & (\ell_1) \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2p}x_p = b_2, & (\ell_2) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots & \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p = b_n. & (\ell_n) \end{cases}$$

Ce système peut s'écrire à l'aide de matrice, en utilisant la définition du produit vue à la Section précédente, de la manière suivante :

$$AX = B,$$

où A est la matrice (n,p) qui contient les coefficients du système, i.e. les $(a_{ij})_{i=1\dots n, j=1\dots p}$, tandis que X est le vecteur des inconnues et B le second membre.

Une solution de ce système est un élément $X \in \mathbb{R}^p$, avec $X = (x_1, \dots, x_p)$, qui vérifie toutes les équations.

Deux système sont équivalents s'ils ont le même ensemble de solution.

Exemples

— on considère d'abord le système

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

En faisant la somme des 2 équations, on voit que nécessairement $2x = 5$, d'où $x = 5/2$. En faisant la différence des 2 équations, on voit que $2y = 1$ et donc $y = 1/2$. Donc ce système à une unique solution donnée par

$$\mathcal{S} = \left\{(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})\right\}.$$

— on considère maintenant le "système" composé d'une seule équation :

$$\begin{cases} x + y = 3. \end{cases}$$

Tout élément de la forme $(3-\alpha, \alpha)$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ est solution. On a :

$$\mathcal{S} = \{(3-\alpha, \alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}\},$$

et le système a une infinité de solutions. On dit que α est un **degré de liberté** (puisqu'il peut être choisi librement dans $\mathbb{R}$).

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \text{ n'est pas échelonnée.}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{2} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{7} \end{pmatrix} \text{ est échelonnée et a trois pivots.}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ est échelonnée et a deux pivots.}$$

Figure 3 – Systèmes échelonnés et pivot

— on considère enfin le système

$$\begin{cases} x+y=3, \\ x-y=2, \\ 2x+y=\lambda. \end{cases}$$

Pour que (x, y) soit solution, il faut nécessairement que les 2 premières équations soient vérifiées, et donc que $x = 5/2$ et $y = 1/2$. Ainsi :

— si $\lambda = 11/2$, le système a toujours une unique solution,

$$\mathcal{S} = \left\{ (\frac{5}{2}, \frac{1}{2}) \right\}.$$

— si $\lambda \neq 11/2$, le système ne peut pas avoir de solution ! On note

$$\mathcal{S} = \emptyset.$$

On voit donc sur ces exemples qu'un système linéaire peut avoir 1 solution, une infinité de solutions ou pas de solution du tout.

Il est important de constater que la matrice A du système ne contient pas a priori de colonne de zéros : une colonne de zéros correspond à une inconnue qui n'intervient pas. De même, une ligne de zéros correspond à une équation du type $0 = b_i$, ce qu'on appelle une équation de compatibilité : si elle n'est pas vérifiée, il n'y a pas de solution.

3.2 Système échelonné et pivot

Notion 3.2 *Un système est dit échelonné si le nombre de zéros qui commencent chaque ligne de la matrice A est strictement croissant, jusqu'à ce que la matrice finisse éventuellement par une ligne de 0.*

On appelle pivot de la matrice A et de la ligne i, le premier élément non nul de la ligne i. (Eventuellement il peut ne pas y avoir de pivot si la ligne est vide dans la matrice, i.e. n'existe pas dans le système).

La matrice d'un système échelonné à la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \square & \star & \star & \star & \dots & \star \\ & & \square & \star & \dots & \star \\ & & & \square & \dots & \star \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

où les $\square$ représentent des coefficients non nuls, les $\star$ des coefficients quelconques et les termes vides sont nuls.

Voir Figure **??** pour quelques exemples de systèmes échelonnés et non échelonnés.
L'intérêt des systèmes échelonnés est qu'ils se résolvent facilement : pour résoudre un système échelonné on utilise la méthode de substitution (aussi nommée parfois méthode de remonté) :

- On regarde si les équations de compatibilité sont vérifiées (si il y en a !), sinon il n'y a pas de solution,
- On part ensuite de la dernière équation, et on détermine la dernière inconnue,
- Celle-ci peut être entièrement déterminée, ou dépendre de « degrés de liberté »,
- On remonte ensuite en déterminant les inconnues en partant de la fin. On obtient alors les solutions du problème (si il y en a).

Exemples

- on considère d'abord le système
$$\begin{cases} 3x - y + z = 0, \\ 2y + y = 0, \\ z = -1. \end{cases}$$
L'inconnue z est déjà déterminée. On "remonte" donc à la deuxième ligne, en utilisant cette valeur de z :
$$2y = 3 - z = 4,$$
et donc $y = 2$. On remonte enfin à la première ligne en utilisant les valeurs de z et y :
$$3x = y - z = 3,$$
et donc $x = 1$. Il y a donc une seule solution, donnée par
$$\mathcal{S} = \{(1, 2, -1)\}.$$
- pour le système
$$\begin{cases} x + 2y - z = 1, \\ \qquad y + z = -1, \end{cases}$$
on résout d'abord la dernière équation :
$$\begin{cases} x + 2y - z = 1, \\ \qquad y = -1 - z, \end{cases}$$
puis on remonte à la première équation :
$$\begin{cases} x = 3 + 3z, \\ \qquad y = -1 - z. \end{cases}$$
L'ensemble des solution est donc donné par
$$\mathcal{S} = \{(3 + 3z, -1 - z, z),\ z \in \mathbb{R}\}.$$
On voit qu'un degré de liberté est apparut à la dernière ligne.
- pour le système
$$\begin{cases} -x - 3y + z + t = 0, \\ z = -3, \end{cases}$$
on a
$$\begin{cases} x = -3y - 3 + t, \\ z = -3, \end{cases}$$
et donc l'ensemble des solution est donné par
$$\mathcal{S} = \left\{(-3y - 3 + t, y, -3, t),\ (y, t) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$
On voit que 2 degrés de liberté sont apparut.

3.3 Réduction de Gauss d'une matrice

Notion 3.3 *On nomme opération élémentaire sur une matrice l'une des opérations suivantes :*

— *l'échange de 2 lignes j et k ($\ell_j \Leftrightarrow \ell_k$),*

— *la multiplication d'une ligne par un scalaire $\beta \neq 0$ ($\ell_i \Leftarrow \beta\ell_i$),*

— *ajouter la ligne i multipliée par un coefficient α_k à la ligne k ($\ell_k \Leftarrow \ell_k + \alpha_k\ell_i$).*

Notion 3.4 *Pour tout système linéaire, en utilisant une succession d'opérations dites* ***élémentaires****, on peut trouver un système équivalent qui soit échelonné.*

La méthode qui permet d'obtenir ce système équivalent échelonné est nommée **réduction de Gauss**. Définir rigoureusement cette méthode dans le cas général est fastidieux, nous allons plutôt voir les idées générale et les illustrer sur un exemple. on travaille avec la matrice des coefficients du système. On procède colonne par colonne, en commençant par la première.

— si elle est nulle, il n'y a rien à faire, on passe à la colonne suivante

— sinon, on s'assure que le coefficient en haut de la colonne est non nul (éventuellement en échangeant la première ligne avec une autre ligne). On annule ensuite tous les autres coefficients de la colonnes grâce à des opérations élémentaires. Quand on a terminé de traiter la dernière colonne, la matrice est échelonnée.

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} 3x - y + z = 0, & (\ell_1) \\ 2x + y + 2z = 2, & (\ell_2) \\ x - 4y + z = -1. & (\ell_3) \end{cases}$$

La matrice associée est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

et le second membre par ${}^tB = (0, 2, -1)$. Pour obtenir un système échelonné, nous commençons par permuter les lignes 1 et 3 (opération notée $\ell_1 \Leftrightarrow \ell_3$), donnant le système équivalent

$$\begin{cases} x - 4y + z = -1, & (\ell_3) \\ 3x - y + z = 0, & (\ell_2) \\ 2x + y + 3z = 2 & (\ell_1). \end{cases}$$

Nous re-numérotons les lignes (pour garder les choses simples) : à partir de maintenant le système est

$$\begin{cases} x - 4y + z = -1, & (\ell_1) \\ 3x - y + z = 0, & (\ell_2) \\ 2x + y + 3z = 2 & (\ell_3). \end{cases}$$

Maintenant, le but est d'obtenir un système équivalent n'ayant que des 0 sous $a_{11} = 1$. Pour obtenir cela en utilisant uniquement les opérations élémentaires énumérées au dessus, on effectue l'opération $\ell_2 \Leftarrow \ell_2 - 3\ell_1$, donnant le système équivalent

$$\begin{cases} x - 4y + z = -1, & (\ell_1) \\ \quad 11y - 2z = 3, & (\ell_2) \\ 2x + y + 3z = 2 & (\ell_3) \end{cases}$$

puis l'opération $\ell_3 \Leftarrow \ell_3 - 2\ell_1$, donnant le système équivalent

$$\begin{cases} x - 4y + z = -1, & (\ell_1) \\ \quad 11y - 2z = 3, & (\ell_2) \\ \quad 9y + z = 4 & (\ell_3) \end{cases}$$

Il reste à recommencer ce processus avec le sous-système

$$\begin{cases} 11y - 2z = 3, \quad (\ell_2) \\ 9y + z = 4 \quad (\ell_3) \end{cases}$$

ce qui est rapide car nous n'avons qu'une opération à faire pour échelonner ce sous système, $\ell_3 \Leftarrow \ell_3 - \frac{9}{11}\ell_2$, ce qui donne le sous système équivalent

$$\begin{cases} 11y - 2z = 3, \quad (\ell_2) \\ \frac{20}{11}z = \frac{17}{11} \quad (\ell_3) \end{cases}$$

et le système échelonné complet final

$$\begin{cases} x - 4y + z = -1, \quad (\ell_1) \\ 11y - 2z = 3, \quad (\ell_2) \\ \frac{20}{11}z = \frac{17}{11} \quad (\ell_3) \end{cases}$$

qui peut maintenant facilement se résoudre par remontée.

3.4 Notion de rang

Les choses ne sont pas toujours aussi simple que dans l'exemple précédent, il faut souvent avoir recours à la notion de **rang** du système pour être capable de définir l'ensemble des solutions, particulièrement lorsque cet ensemble fait intervenir des degrés de libertés.

Notion 3.5 *Le rang d'une matrice A est le nombre de pivot dans la matrice échelonnée U obtenue en appliquant la réduction de gauss à la matrice A. Le rang d'un système est le rang de la matrice des coefficients. Notons que le rang d'un système ne dèpend donc pas du second membre.*

On note p le nombre d'inconnues et n le nombre d'équations, r le rang. Quatre cas sont possibles :

1. *si $r = p = n$, la matrice est triangulaire supérieure avec des coefficients non nuls sur la diagonale (i.e. inversible),*
2. *si $r = n < p$, la matrice contient une dernière ligne non réduite à un seul élément,*
3. *si $r = p < n$, la matrice contient des lignes de 0 à la fin.*
4. *si $r < p$ et $r < n$, la matrice contient des lignes de 0 à la fin. et une dernière ligne non réduite à un seul élément.*

Ces 4 cas s'écrivent de manière symbolique par :

1. $$\begin{pmatrix} \square & \star & \star & \star & \star & \star \\ & \square & \star & \star & \star & \star \\ & & \square & \star & \star & \star \\ & & & \square & \star & \star \\ & & & & \square & \star \\ & & & & & \square \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{pmatrix} \square & \star & \star & \star & \star & \star \\ & \square & \star & \star & \star & \star \\ & & \square & \star & \star & \star \end{pmatrix}$$

3. $$\begin{pmatrix} \square & \star & \star & \star & \star & \star \\ & \square & \star & \star & \star & \star \\ & & \square & \star & \star & \star \\ & & & \square & \star & \star \\ & & & & \square & \star \\ & & & & & \square \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

4. $$\begin{pmatrix} \square & \star & \star & \star & \star & \star \\ & \square & \star & \star & \star & \star \\ & & \square & \star & \star & \star \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

3.5 Structure de l'ensemble des solutions

Notion 3.6 *En utilisant la notion de rang, nous pouvons décrire de manière générale, la structure de l'ensemble des solution d'un système donné :*

1. *Système de Cramer.*

   Les systèmes de Cramer correspondent au cas 1. Un système est dit de Cramer s'il a autant d'équations que d'inconnues et si le rang est égal aux nombres de lignes. i.e. $p = n = r$. Le fait d'être de Cramer ne dépend pas du second membre, uniquement de la matrice A.

   Remarquons que si le système est de Cramer, alors la matrice est inversible, puisqu'on a $A = M^{-1}U$, avec U triangulaire supérieure avec des termes non nuls sur la diagonale.

   Le système a alors une unique solution quel que soit le second membre.
2. *Dans le cas 2, les solutions dépendent de $p - r$ paramètres, en particulier il y a une infinité de solutions.*
3. *Maintenant, supposons que l'on soit dans le cas 3 ou 4. Le système, une fois mis sous forme échelonnée, est alors fini par des équations du type $0 = b_i$. Ceux sont les équations de compatibilité. On a alors deux cas :*

   — *Soit effectivement les dernières lignes sont "$0 = 0$", et on peut alors les enlever du système, cela revient alors au cas où il n'y a pas de ligne du type $0 = b_i$, i.e. au cas 1 (pour le 3) ou 2 (pour le 4).*

   — *Soit ce n'est pas le cas, et le système n'a pas de solution, on parle alors de système incompatible.*

On a donc le résultat théorique suivant : Un système linéaire de rang r, à p inconnues et n équations admet toujours $0, 1$ ou une infinité de solutions. Si il admet une infinité de solutions, celle-ci dépendent de $p - r$ paramètres. Si le système est un système de Cramer il y a toujours une unique solution, sinon l'existence de solution dépend du second membre.

En particulier, on voit que si l'ensemble solution admet plusieurs représentation « avec des degré de liberté », le nombre de degré de liberté est toujours $p - r$, quelque soit le second membre, et quelque soit les opérations faites sur le système.
En pratique, pour résoudre un système on utilise des opérations élémentaires pour se ramener à un système échelonné. Pour faciliter les calculs on travaille avec la matrice (A, B) obtenue en concaténant A et B.

— On échelonne A via des opérations sur les lignes. On obtient $(A'|B')$ avec A' échelonnée.

— le système a des solutions ssi les lignes nulles de A' sont les lignes nulles de $(A'|B')$.

— dans ce cas,on appelle inconnues principales les inconnues qui correspondent à un pivot de A', et inconnues secondaires les autres.

— on continue à opérer sur les lignes de A' de manière à rendre les pivots égaux à 1 et à mettre des 0 au dessus des pivots.

— s'il n'y a pas d'inconnues secondaires, le système a une unique solution que l'on peut lire directement.

— sinon, on donne l'ensemble des solutions en exprimant les inconnues secondaires en fonction des inconnues principales.

Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-3} & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) L_3 \leftarrow 3L_3 + 5L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & 5 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}$$

On peut déjà affirmer que A est inversible.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & \boxed{-3} & 0 & -3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & 5 & 3 \end{array}\right) L_2 \leftarrow -\tfrac{1}{3}L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & 5 & 3 \end{array}\right) L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

FIGURE 4 – Calcul de l'inverse d'une matrice

4 Inverse d'une matrice

4.1 Lien entre systèmes et inversion des matrices

Notion 4.1 *La matrice A est inversible si et seulement si le système associé $AX = Y$ est de Cramer (pour tout Y puisque cela ne dépend pas de Y). De plus, dans ce cas, si Y est un vecteur de variable générique, alors la solution du système $AX = Y$ s'exprime comme le produit de Y par une matrice C, et C est l'inverse de A.*

Concrètement, cela veut dire que l'on peut inverser une matrice A en résolvant le système $AX = Y$ avec des variables Y génériques. On obtient ainsi X en fonction de Y sous la forme CY , où C est une matrice de coefficients.

4.2 Méthode de Gauss-Jordan

Notion 4.2 *Si la matrice A est inversible, alors on peut la transformer en I_n en faisant des opérations élémentaires sur les lignes. De plus, si on fait les mêmes opérations élémentaires dans le même ordre sur les lignes de la matrice identité, on obtient A^{-1}.*

En pratique, on écrit les deux matrices A et I_n l'une à côté de l'autre, et on fait les opérations en parallèle. Cette méthode est illustrée Figure **??** puis dans les exercices.

5 Exercices

Exercice n° 5.1

Calculer lorsque c'est possible les sommes de matrices suivants :

1.
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

2.
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 5.2

Calculer lorsque c'est possible les produits de matrices suivants :

1.
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

2.
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

3.
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -4 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

4.
$$\begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

5.
$$\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix}$$

6.
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 5.3

Soient
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

A-t-on $AB = BA$?

Même question pour
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 5.4 Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Trouver (si elle existe) une matrice B de taille $(2, 2)$ non nulle telle que $AB = 0$.

Exercice n° 5.5 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & k \end{pmatrix}$$

Pour quelle(s) valeur de k a-t-on $AB = BA$?

Exercice n° 5.6 Trouver A matrice $(2,2)$ non-nulle telle que $A^2 = 0$.

Exercice n° 5.7

Inverser, si c'est possible, les matrices suivantes

1. $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{(de deux manières)}$$

2. $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3. $$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 5.8

Soit $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Exprimer de façon simple la matrice U^3 en fonction de U^2, U et I_3. En déduire que U est inversible et donner U^{-1}.

Exercice n° 5.9 Soit $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $(U - aI_3)(U - bI_3) = 0$. En déduire que U est inversible et donner U^{-1}.

Exercice n° 5.10 Résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 5 \\ 3x - y + 2z = 2 \\ x - 4y + z = 1 \end{cases}$$

Exercice n° 5.11 Résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{cases} x + 2y + z + t + u = 3 \\ x + 3y + 3z + 4u = -1 \\ -x - 2y - z + t + 3u = 1 \\ 2x + 4y + 2z + 2t + 2u = 6 \end{cases}$$

Exercice n° 5.12

Déterminer le rang puis résoudre les systèmes linéaires suivants :

1.
$$\begin{cases} 3x - y + z = 5 \\ 2x + y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ 4x + y + z = 3 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3x + 3y - z = 2 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \\ 4x - y - z = 3 \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} x + y + z - t = 1 \\ x - y - z + t = 2 \\ x - y - z - t = 3 \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} 3x - y + z = 5 \\ x + y - z = -2 \\ -x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} x + 2y - z + 3t = 0 \\ y + z - 2t + 2s = 0 \\ 2x + y - 5z - 4s = 0 \end{cases}$$

Exercice n° 5.13 Déterminer le rang (en fonction de m) puis résoudre les systèmes linéaires suivants :

1.
$$\begin{cases} mx + y + z = m \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} (m+1)x + my = 2m \\ mx + (m+1)y = 1 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} x - my + m^2 z = 2m \\ mx - m^2 y + mz = 2m \\ mx + y - m^2 z = 1 - m \end{cases}$$

Exercice n° 5.14

Soients

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer J^n et N^n pour $n \in \mathbb{N}$
2. En déduire A^n en fonction de n.

Exercice n° 5.15 Soit

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad m \in \mathbb{R}.$$

1. Donner le rang de A en fonction de m.
2. Montrer qu'il existe 2 réels a et b tels que $A^2 = aA + bI_3$. Pour quelles valeur de m la matrice A est-elle inversible ?