



Session 1 Contrôle continu

Date :18/05/2021

Durée de l'épreuve : 1h30

Master 1

Documents autorisés : oui

Mention : Mathématique

Matériels autorisés : néant

UE : Notions de mécanique pour  
les mathématiciens(HMMA214)

### Partie Mécanique des fluides.

#### Écoulement dans un conduit horizontal plan.

Un fluide newtonien *incompressible* de densité constante  $\rho$  et de viscosité dynamique  $\mu$  constante s'écoule dans une conduite infinie  $\Omega : -\infty < x < \infty, 0 < y < h$ , où  $h$  est une constante strictement positive. On note  $\mathbf{U}$  la vitesse du fluide,  $p$  la pression et  $\sigma$  le tenseur des contraintes.

On suppose que la paroi ( $y = 0$ ) est immobile. A la paroi ( $y = h$ ) on impose la contrainte tangentielle nulle :  $(\sigma \mathbf{n}) \cdot \mathbf{t} = 0$  et la vitesse normale nulle :  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = 0$ . Le vecteur  $\mathbf{n}$  désigne la normale extérieure sortante au bord de  $\Omega$ , le vecteur  $\mathbf{t}$  est le vecteur tangent au bord tel que  $(\mathbf{t}, \mathbf{n})$  soit direct.

Le fluide n'est pas soumis à la pesanteur ni à d'autres forces extérieures.

On suppose que l'écoulement est *stationnaire* et que la vitesse du fluide est *horizontale*, i.e. de la forme  $\mathbf{U} = (U_1(x, y), U_2(x, y))$  avec  $U_2 = 0$ .

1. Ecrire les équations du mouvement.
2. Montrer que  $U_1$  ne dépend pas de la variable  $x$ . Dans la suite on posera  $U_1 = u(y)$ . Déterminer la forme géométrique des lignes de courant.
3. Calculer le terme non linéaire  $(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U}$ .
4. Montrer que  $p$  ne dépend pas de  $y$ . Dans la suite on posera  $p = p(x)$ .
5. Montrer que  $\frac{dp}{dx}$  est constant. Dans la suite on posera  $\frac{dp}{dx} = \alpha$ , supposé non nul.
6. Rappeler l'expression de  $\sigma$ , le tenseur des contraintes et exprimer la condition limite à la paroi ( $y = h$ ).

7. Déterminer exactement  $u(y)$ . D'après le profil de vitesse de la figure 1 plus bas, quel est le signe de  $\alpha$  ?
8. Calculer le débit (en  $m^2/s$ ) à travers la section de la conduite.

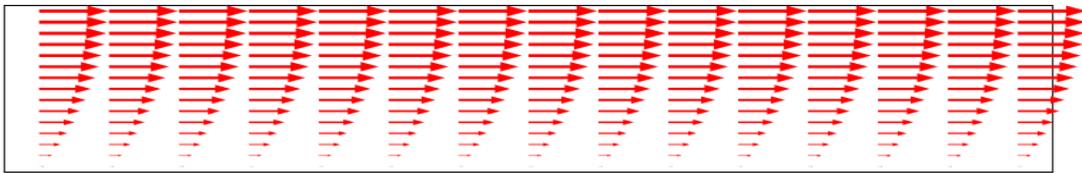


FIGURE 1 – Profil d'écoulement.