Année 2020-2021 HLMA502 Topologie
L3 — Mathématiques

épreuve du 19 janvier 2021
durée : 2h

N.B. Documents, calculatrices, téléphones portables interdits. La qualité de la rédaction et de la présentation sera prise en compte dans la notation. Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif.

Partie 1. Démonstrations de cours (8 points)

N.B. En *italiques* : consignes pour la rédaction des démonstrations. Bien faire apparaître où et comment ces consignes sont utilisées.

Exercice 1. Soit (X,d) un espace métrique, et soient $a \in X$ et $r > 0$. Montrer que la boule ouverte $B(a,r)$ est une partie ouverte de X. *Utiliser les propriétés d'une distance et la définition des ouverts d'un espace métrique.*

Exercice 2. Soient $(X,\mathcal{O}_X)$ et $(Y,\mathcal{O}_Y)$ des espaces topologiques séparés, et soit $f : X \to Y$ une application continue. Montrer que si X est compact, alors $f(X)$ est une partie compacte de Y. *Vous devez raisonner avec des recouvrements ouverts, ici les espaces ne sont pas métriques donc il ne s'agit pas de compacité séquentielle.*

Exercice 3. Soit $f : X \to Y$ une application continue entre deux espaces métriques. Montrer que si X est compact alors f est uniformément continue. *Vous pouvez raisonner par contraposée et utiliser la caractérisation séquentielle de la compacité.* On rappelle que f est uniformément continue si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 ; \forall x, x' \in X,\ d_X(x,x') < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

Partie 2. Exercices (12 points)

Les deux exercices sont indépendants. Vous pouvez admettre le résultat d'une question pour traiter les suivantes.

Exercice 4. Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé non nul ($E \neq \{0_E\}$).

1. Soient $x, y \in E$ et $r, s \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $D(x,r) \subseteq D(y,s)$. Le but de cette partie est de montrer l'inégalité $(\star)$ suivante :

$$(\star) \qquad \|y - x\| \leq s - r$$

On rappelle que $D(x,r)$ désigne la boule fermée de centre x et rayon r.

   a) On suppose que $x = y$.

      i. Montrer qu'il existe un $u \in E$ tel que $\|u\| = 1$.

      ii. Montrer $(\star)$. *Indication : on pourra considérer le vecteur $x + ru$.*

   b) On suppose que $x \neq y$. Montrer l'inégalité $(\star)$. Indication : on pourra considérer le vecteur $x + r\frac{x-y}{\|x-y\|}$.

2. On suppose maintenant que E est complet. On considère une suite de boules fermées $(D_n)_{n\in\mathbb{N}} = (D(x_n, r_n))_{n\in\mathbb{N}}$ que l'on suppose décroissante pour l'inclusion ($D_{n+1} \subseteq D_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Le but de cette partie est de montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n \neq \emptyset$.

   a) Montrer que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (on pourra utiliser $(\star)$). Montrer qu'elle converge.

   b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain point que l'on notera $x \in X$. Indication : utiliser $(\star)$, le résultat de 2-a et la complétude de E.

   c) Montrer que $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n$.

3. Le résultat de la partie 2 est-il encore vrai si on remplace « boules fermées » par « boules ouvertes » ?

Solution succincte

4 1. a) On suppose que $x = y$ et $D(x, r) \subseteq D(x, s)$.

i. On a supposé E non nul, donc il existe un $v \in E$ tel que $v \neq 0_E$. Le vecteur $u := \frac{v}{\|v\|}$ est alors de norme 1.

ii. On a $x + ru \in D(x, r)$, donc $x + ru \in D(x, s)$, donc $\|ru\| \leq s$, c'est à dire $r \leq s$, soit $0 \leq s - r$, ce qui est l'inégalité ($\star$).

Le point $x + r\frac{x}{\|x\|}$ appartient à $D(x, r)$. Donc il appartient à $D(x, s)$. Donc $r \leq s$.

b) On suppose que $x \neq y$ et $D(x, r) \subseteq D(y, s)$. On vérifie immédiatement que le point $z = x + r\frac{x-y}{\|x-y\|}$ appartient à $D(x, r)$. Donc il appartient à $D(y, s)$, et on obtient de même l'inégalité demandée :

$$\|x + r\frac{x-y}{\|x-y\|} - y\| = \|(1 + \frac{r}{\|x-y\|})(x-y)\| = (1 + \frac{r}{\|x-y\|})\|x-y\| = \|x-y\| + r$$

2. a) On applique ($\star$) à l'inclusion $D_{n+1} \subseteq D_n$. On trouve $\|x_{n+1} - x_n\| + r_{n+1} \leq r_n$, d'où en particulier $r_{n+1} \leq r_n$. On en déduit que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, puisqu'elle est positive et décroissante.

b) On trouve $\|x_{n+p} - x_n\| \leq r_n - r_{n+p}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \geq 0$ tel que $|r_n - r| \leq \varepsilon/2$ pour tout $n \geq N$, d'où $|r_{n+p} - r_n| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$ et $p \geq 0$ par inégalité triangulaire, d'où aussi $\|x_{n+p} - x_n\| \leq \varepsilon$. Donc la suite est de Cauchy. Comme E est complet, il existe un $x \in E$ tel que $x_n \to x$.

c) La suite des boules D_n est décroissante, donc $x_p \in D_n$ si $p \geq n$. Or D_n est une boule fermée donc est une partie fermée, et x_p tend vers x, donc $x \in D_n$, et cela pour tout n.

3. Non, prendre par exemple $E = (\mathbb{R}, |\cdot|)$ et la suite de boules ouvertes $B_n := B(1/n, 1/n) =]0, 2/n[$. Cette suite est bien décroissante, mais $\cap_{n\geq 1} B_n = \emptyset$.