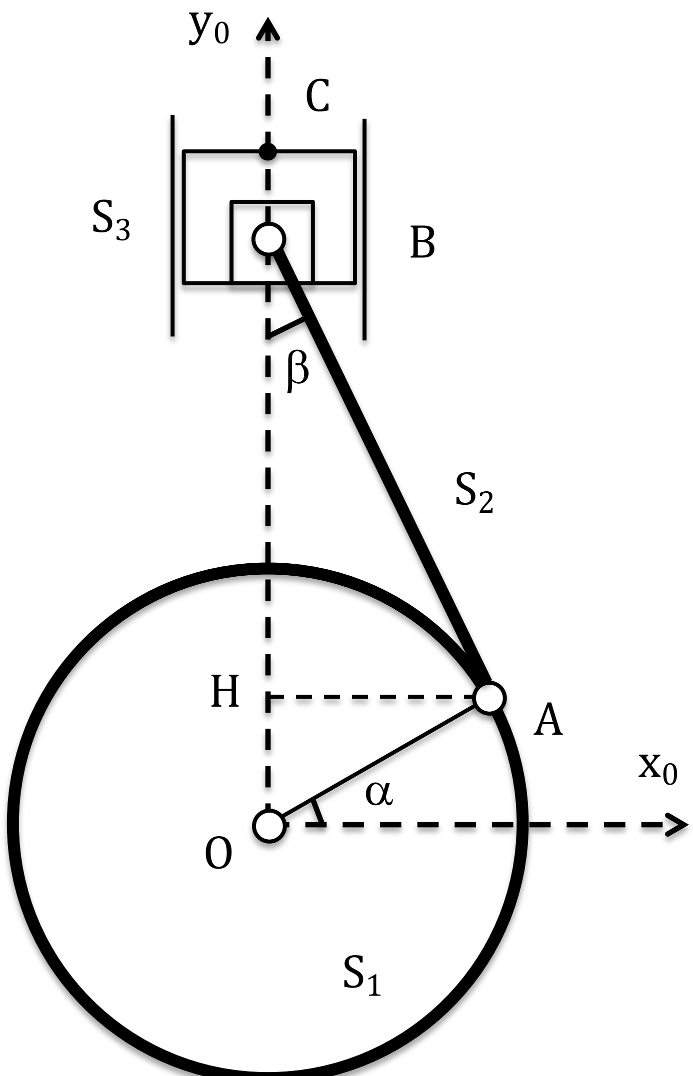
Département
de Mécanique
Faculté des Sciences

HLME201 – Cinématique et statique
HLME202 – Etude de systèmes mécaniques

Correction Cinématique graphique
Moteur


y_0
C
S_3
B
β
S_2
H
A
x_0
α
O
S_1

I- Etude géométrique

1. Exprimer la distance OC dans la position *point mort bas* (A, O et C sont alignés). *Par la suite la position du point C correspondant au point mort bas sera noté C'.*

OC' = L-e+d

2. Déterminer la relation entre α et β en exprimant AH dans les 2 triangles OAH et AHB.

AH = e.cos(α) = L.sin(β)

3. Exprimer la distance OC en fonction de l'angle α qui décrit la rotation du vilebrequin.

Résultat : $OC = e.\sin\alpha + L\sqrt{1-\left(\frac{e}{L}\right)^2(\cos\alpha)^2} + d$

4. Déduire de la dernière question et de la question 1 la position du point C par rapport au *point mort bas* C' (distance C'C).

Résultat : $\mathbf{C'C} = e(\mathbf{1}+\sin\alpha) + L\sqrt{1-\left(\frac{e}{L}\right)^2(\cos\alpha)^2} - \mathbf{1}$

II- Etude cinématique analytique

1. Exprimer $\overrightarrow{\Omega}(S_1/R_0)$.

$$\overrightarrow{\Omega}(S_1/R_0) = \dot{\alpha}\overrightarrow{z_0}$$

II- Etude cinématique analytique

1. Exprimer $\vec{\Omega}(S_1/R_0)$.

$$\vec{\Omega}(S_1/R_0) = \dot{\alpha}\overrightarrow{z_0}$$

2. Calculer la vitesse du point A du vilebrequin dans son mouvement par rapport à R_0, repère lié au bâti, $\vec{V}(A\epsilon S_1/R_0)$ en fonction de $\dot{\alpha}$ et e.

Propriété du champ des vitesses du solide S_1/R_0 en O et A :

$$\vec{V}(A \in S_1/R_0) = \vec{V}(O \in S_1/R_0) + \vec{\Omega}(S_1/R_0) \wedge \overrightarrow{OA}$$

$$\vec{V}(A \in S_1/R_0) = \vec{0} + \dot{\alpha}\overrightarrow{z_0} \wedge e\overrightarrow{x_1}$$

$$\vec{V}(A \in S_1/R_0) = e\dot{\alpha}\overrightarrow{y_1}$$

3. Calculer la vitesse du point A de la bielle dans son mouvement par rapport à R_0, repère lié au bâti, $\vec{V}(A \epsilon S_2/R_0)$.

Liaison pivot en A entre S_2 et S_1 donc $\vec{V}(A \in S_1/R_0) = \vec{V}(A \in S_2/R_0)$

4. Exprimer $\vec{\Omega}(S_2/R_0)$.

$$\vec{\Omega}(S_2/R_0) = \dot{\beta}\overrightarrow{z_0}$$

5. Calculer la vitesse du point B de la bielle dans son mouvement par rapport à R_0, repère lié au bâti, $\vec{V}(B \epsilon S_2/R_0)$.

Propriété du champ des vitesses du solide S_2/R_0 en A et B :

$$\vec{V}(B \in S_2/R_0) = \vec{V}(A \in S_2/R_0) + \vec{\Omega}(S_2/R_0) \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{V}(B \in S_2/R_0) = e\dot{\alpha}\overrightarrow{y_1} + \dot{\beta}\overrightarrow{z_0} \wedge L\overrightarrow{y_2}$$

$$\vec{V}(B \in S_2/R_0) = e\dot{\alpha}\overrightarrow{y_1} + L\dot{\beta}\overrightarrow{x_2}$$

6. Calculer la vitesse du point C du piston dans son mouvement par rapport à R_0, repère lié au bâti, $\vec{V}(C \epsilon S_3/R_0)$. En projetant cette vitesse dans le repère R_0, on l'exprimera en fonction de $e, L, \dot{\alpha}, \alpha, \dot{\beta}$ et β.

Liaison pivot en B entre S_2 et S_3 donc $\vec{V}(B \in S_3/R_0) \quad = \vec{V}(B \in S_2/R_0)$

Solide S_3 en translation donc $\vec{V}(C \in S_3/R_0) \quad = \vec{V}(B \in S_3/R_0)$

D'où : $\vec{V}\left(C \in \frac{S_3}{R_0}\right) \quad = e\dot{\alpha}\overrightarrow{y_1} - L\dot{\beta}\overrightarrow{x_2}$

Attention $\overrightarrow{y_1}$ et $\overrightarrow{x_2}$ ne sont pas dans la même base !! On projette $\overrightarrow{y_1}$ et $\overrightarrow{x_2}$ dans la base fixe :

$$\overrightarrow{y_1} = -\sin\alpha\,\overrightarrow{x_0} + \cos\alpha\,\overrightarrow{y_0}$$

$$\overrightarrow{x_2} = \cos\beta\,\overrightarrow{x_0} + \sin\beta\,\overrightarrow{y_0}$$

<u>Conclusion</u> $\vec{V}(C \in S_3/R_0) \quad = -\left(e\dot{\alpha}\sin\alpha + L\dot{\beta}\cos\beta\right)\overrightarrow{x_0} + \left(e\dot{\alpha}\cos\alpha - L\dot{\beta}\sin\beta\right)\overrightarrow{y_0}$

7. Dériver la relation obtenue dans la question I- 2 (étude géométrique) pour obtenir l'expression de $\dot{\beta}$ en fonction de $e, L, \dot{\alpha}$ et α.

On sait que e.cos(α) = L.sin(β), on dérive -e $\dot{\alpha}$sin(α) = L $\dot{\beta}$cos(β)

Donc $$\dot{\beta} = \frac{-e\dot{\alpha}\sin\alpha}{L\cos\beta}$$

On en déduit que le terme en $\overrightarrow{x_0}$ de $\vec{V}(C\epsilon S_3/R_0)$ est nul, et c'est logique car on sait que cette vitesse est suivant l'axe $\overrightarrow{y_0}$!!

$$\vec{V}(C \in S_3/R_0) \quad = \left(e\dot{\alpha}\cos\alpha - L\dot{\beta}\sin\beta\right)\overrightarrow{y_0}$$

8. Exprimer $\vec{V}(C\epsilon S_3/R_0)$ en fonction de $e, L, \dot{\alpha}\ et\ \alpha$.

Dans l'expression de $\vec{V}(C\epsilon S_3/R_0)$ on remplace $\dot{\beta}$, sinβ et cos β par leur expression en fonction de $\dot{\alpha}\ et\ \alpha$.

Résultat : $\vec{V}(C \in S_3/R_0) \quad = \left(e\dot{\alpha}\cos\alpha + \frac{e^2\dot{\alpha}\sin\alpha}{L\sqrt{1-\left(\frac{e}{L}\right)^2(\cos\alpha)^2}}\cos\alpha\right)\overrightarrow{y_0}$

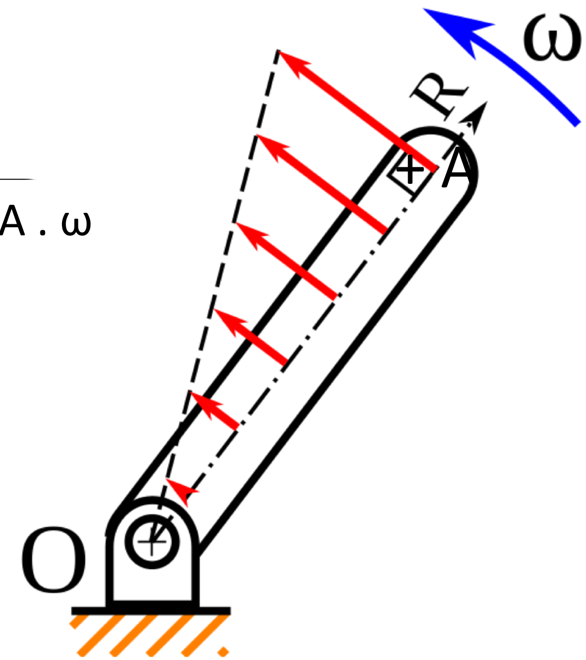
Rappels : Cinématique Graphique

- Il faut choisir une échelle pour les longueurs et les vitesses

- Soit S un solide en rotation autour d’un axe fixe $(0,z_0)$, soit A un point du solide S, le vecteur vitesse $V(A / R_0)$ est perpendiculaires au vecteur OA, le sens du vecteur vitesse est donné par le sens de rotation, sa norme par OA x ω

- On trace un triangle et les flèches représentant les vitesses : c’est le triangle du champ des vitesses

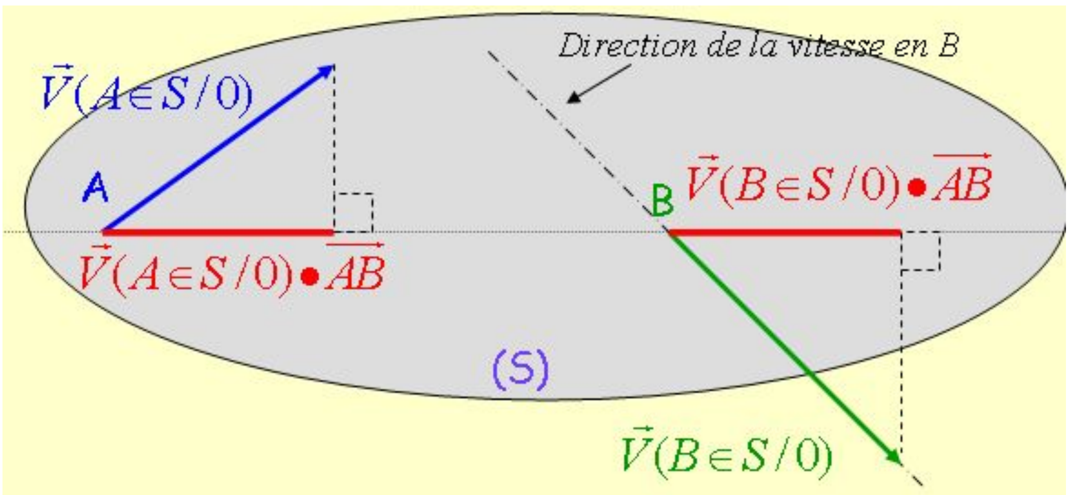
$$v = \overline{OA} \; . \; \omega$$



https://fr.wikipedia.org/wiki/Mouvement_de_rotation

Rappels : Cinématique Graphique

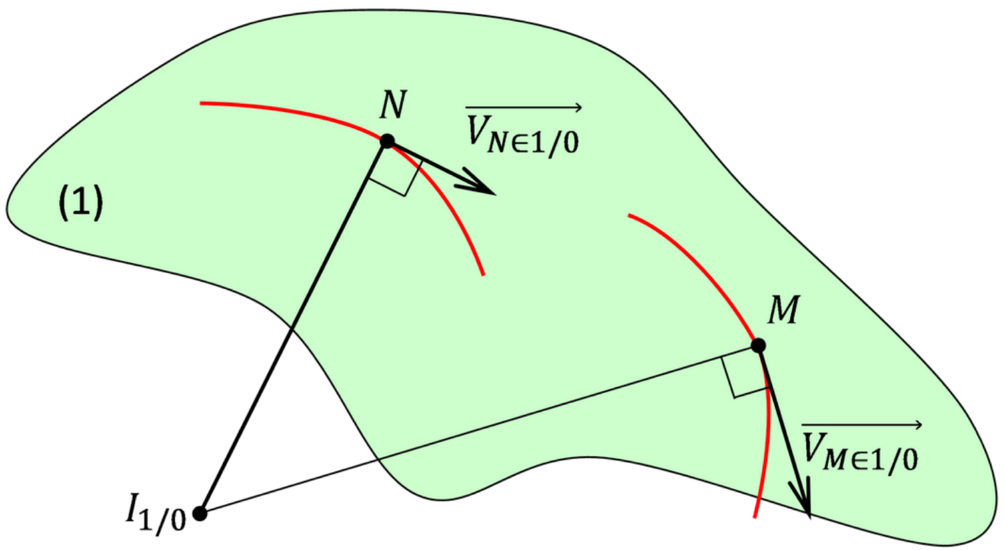
- L'équiprojectivité : soit A et B, 2 points du solide S, les projections orthogonales des vecteurs vitesses sur la droite (AB) sont égales



http://sti.tice.ac-orleans-tours.fr/spip2/spip.php?article281

Rappels : Cinématique Graphique

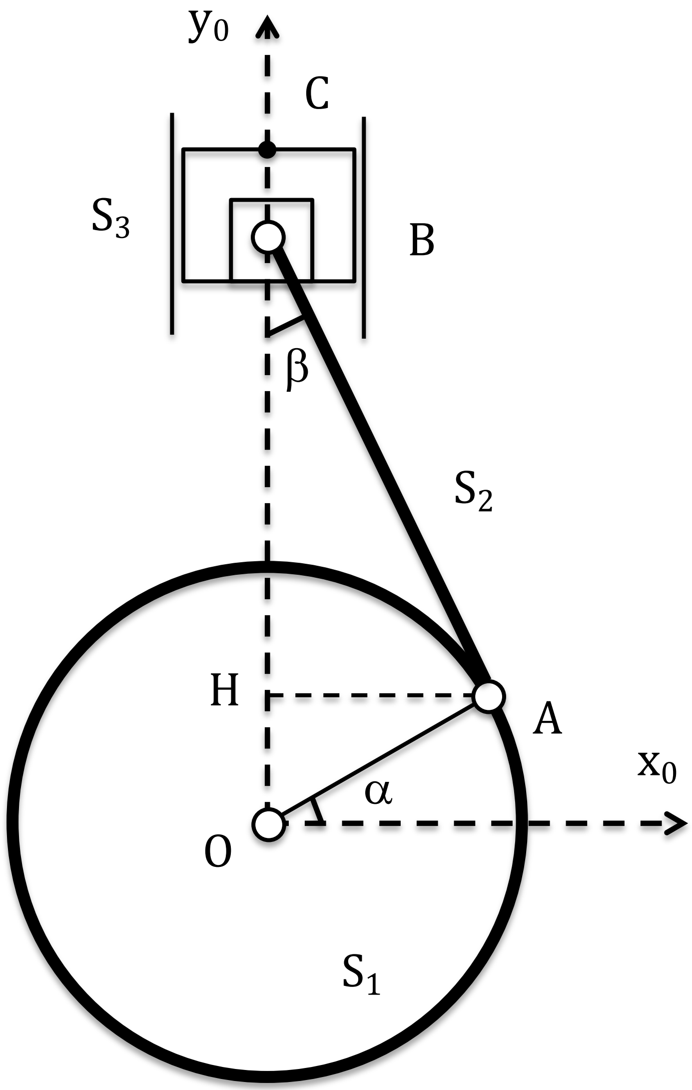
- Détermination C.I.R. : soit A et B, 2 points du solide S, soit I le CIR, alors I est à l'intersection des droites passant par A et B et perpendiculaires aux vecteurs vitesses $V(A/R_0)$ et $B(B/R_0)$



= CIR

https://si.blaisepascal.fr/1t-cinematique-du-solide/#Centre_instantane_de_rotation

Le moteur 2 temps



Modèle GP 10 :
e = 6,2 mm, L = 23,5 mm, d = 6 mm

Modèle GP 28 :
e = 8,25 mm, L = 29,5 mm, d = 8 mm

Modèle choisi pour cette correction

On suppose que $\dot{\alpha}$ est constant et vaut 100 rad/s.

On choisit pour l'échelle des distances : 1 cm correspond à 5 mm réel

et pour l'échelle des vitesses : 1 cm correspond à 200 mm/s

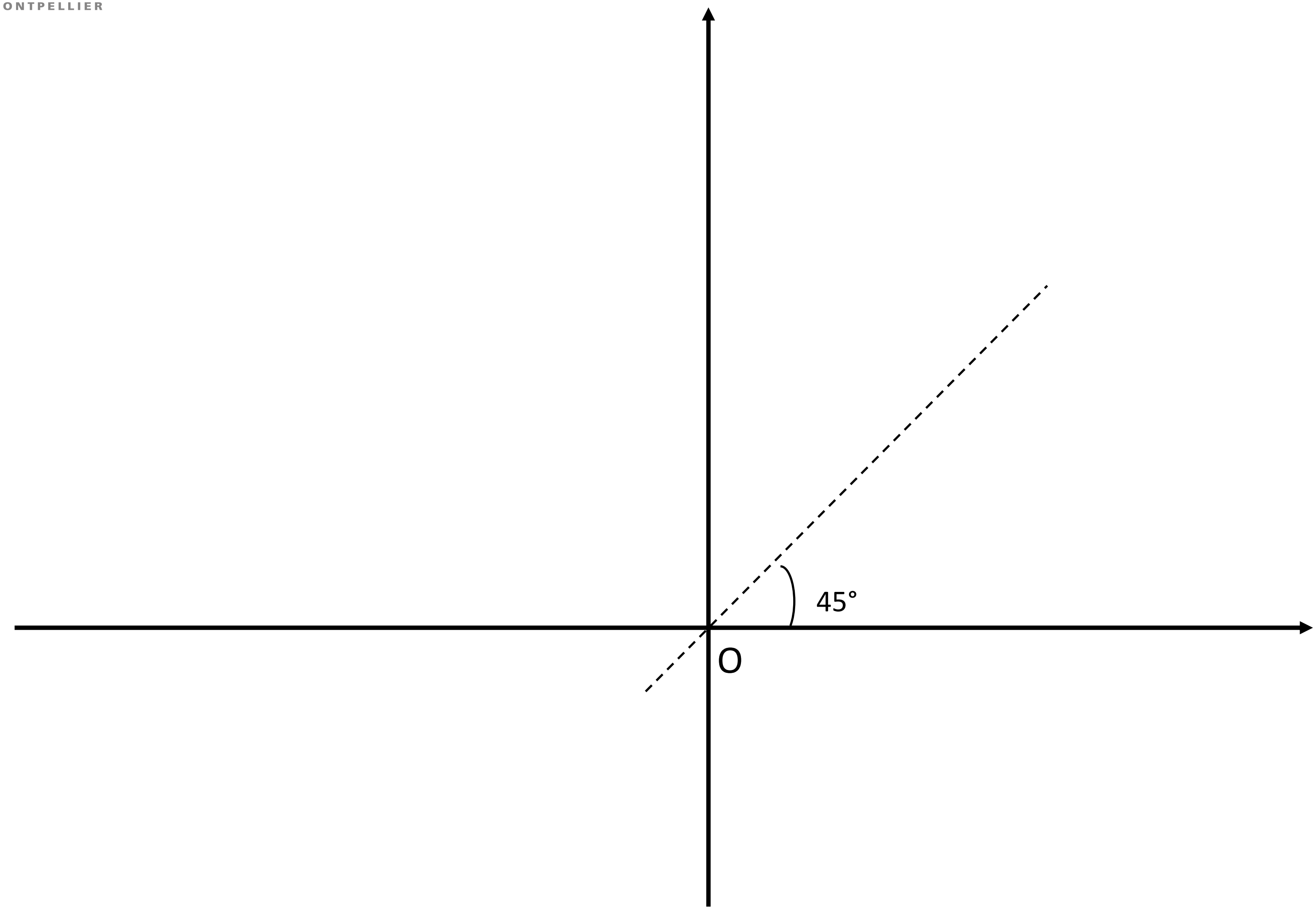
Tracer le système dans la configuration où $\alpha = \pi/4$.

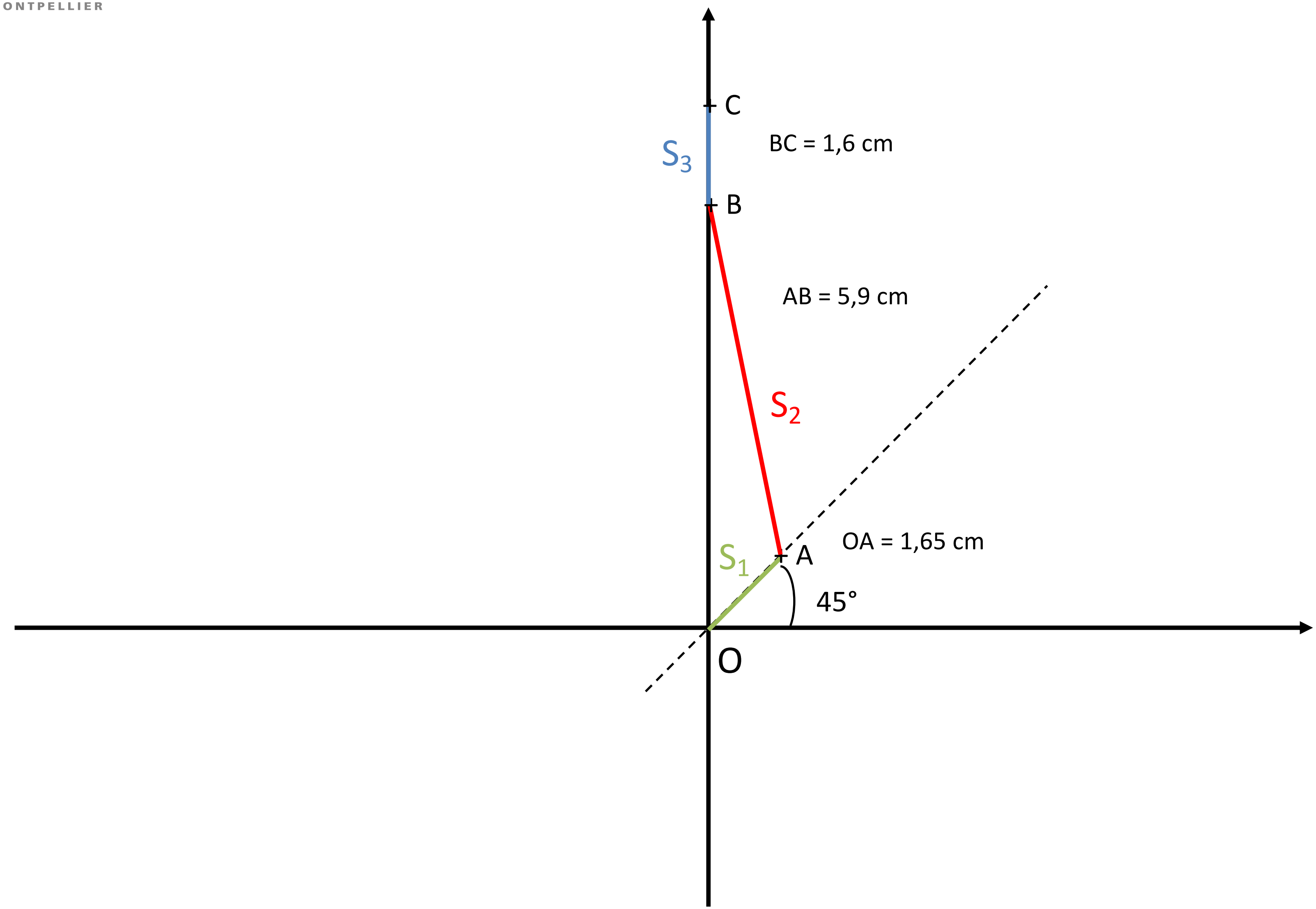
1. Tracer le système dans la configuration où $\alpha = \pi/4$.

On trace le repère puis on calcule les longueurs sur le dessin avec l'échelle

Réel	dessin
5mm	1 cm = 10 mm
e = 8,25 mm	16,5 mm = 1,65 cm
L = 29,5 mm	59 mm = 5,9 cm
d = 8 mm	16 mm = 1,6 cm

puis on place A, B, C sur le dessin


45°
O


C
S_3
BC = 1,6 cm
B
AB = 5,9 cm
S_2
OA = 1,65 cm
S_1
A
45°
O

2. Tracer le champ des vitesses de S_1 dans son mouvement par rapport à R_0.

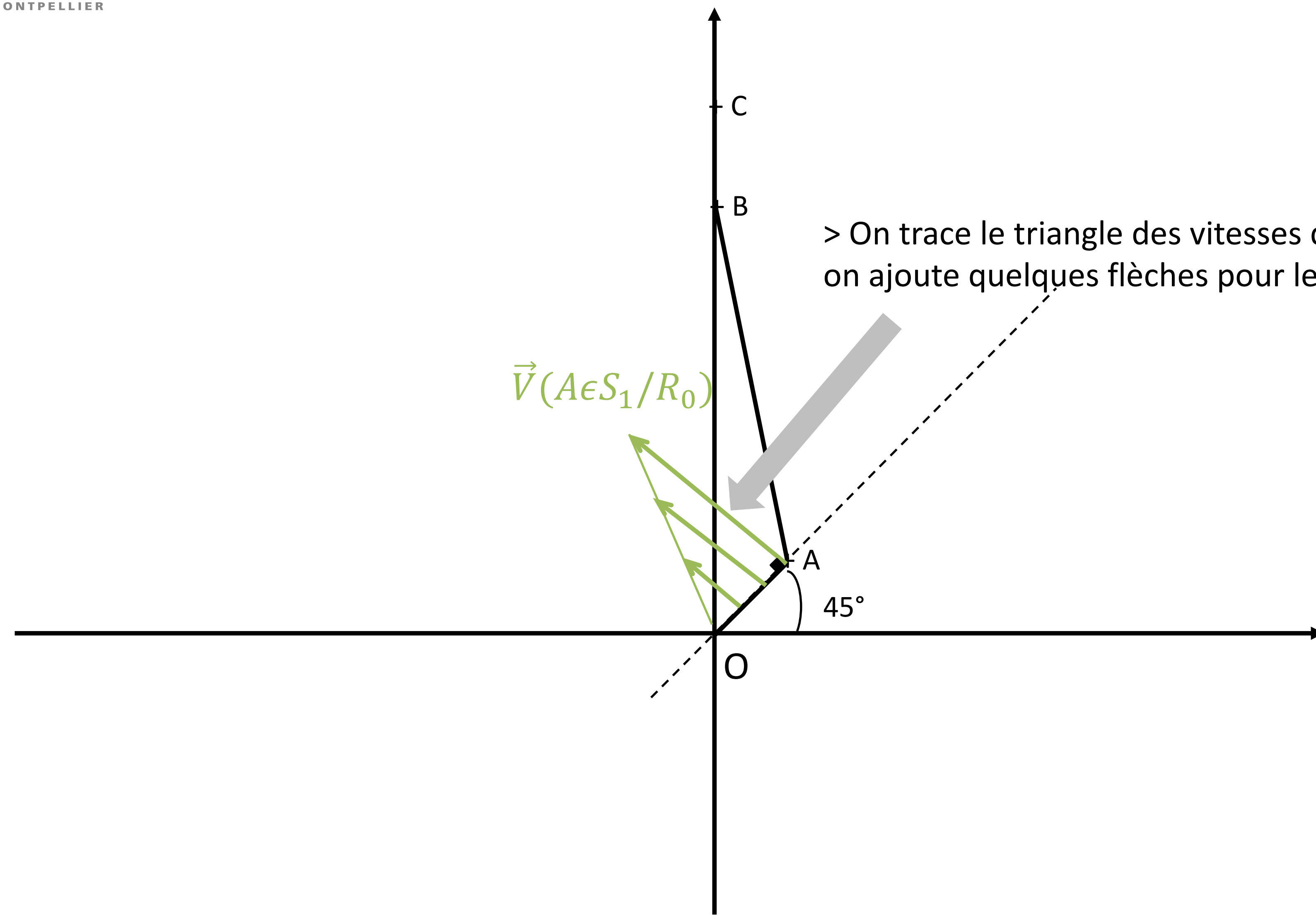
$$\vec{V}(A \in S_1/R_0) \ = \ e\dot{\alpha}\overrightarrow{y_1}$$

$\left\|\vec{V}(A \epsilon S_1/R_0)\right\|= 8{,}25 \ * 100 = 825$ mm.s^{-1} c'est-à-dire 4,13 cm sur le dessin

a. Le solide S_1 est en rotation autour de l'axe $(O, \overrightarrow{z_0})$ donc le vecteur vitesse de A **est ⊥ à AB**
b. Le solide S1 tourne dans le sens trigo > le vecteur vitesse est vers le haut
c. Le vecteur OA est **de longueur 4,13 cm** (on utilise l'échelle des vitesses)

Réel	dessin
200 mm/s	1 cm
825 mm/s	4,13 cm

> On trace le triangle des vitesses de S_1 et on ajoute quelques flèches pour les vitesses

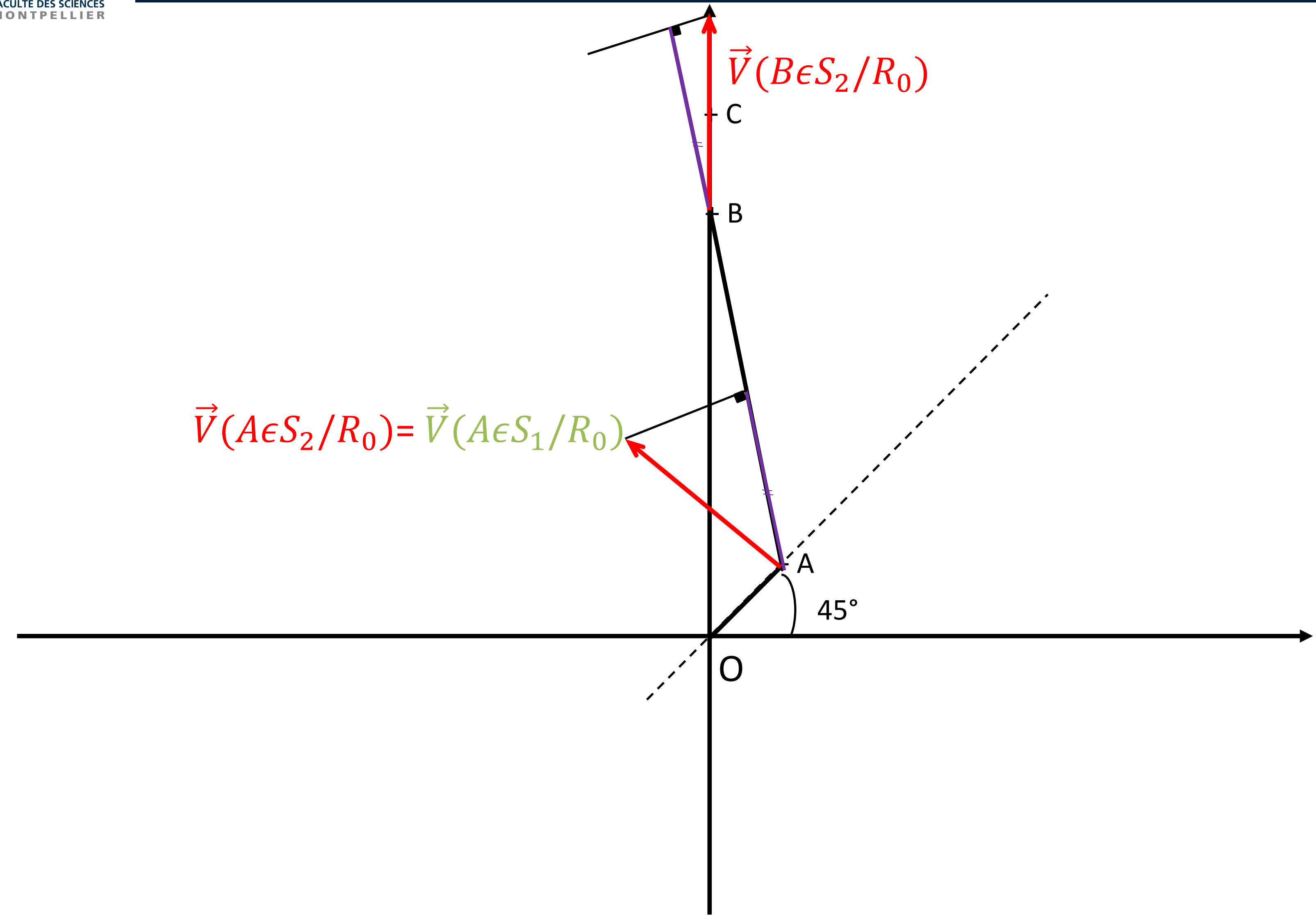


3. En utilisant l'équiprojectivité des vitesses de points de S_2 par rapport à R_0, tracer $\vec{V}(C\epsilon S_3/R_0)$.

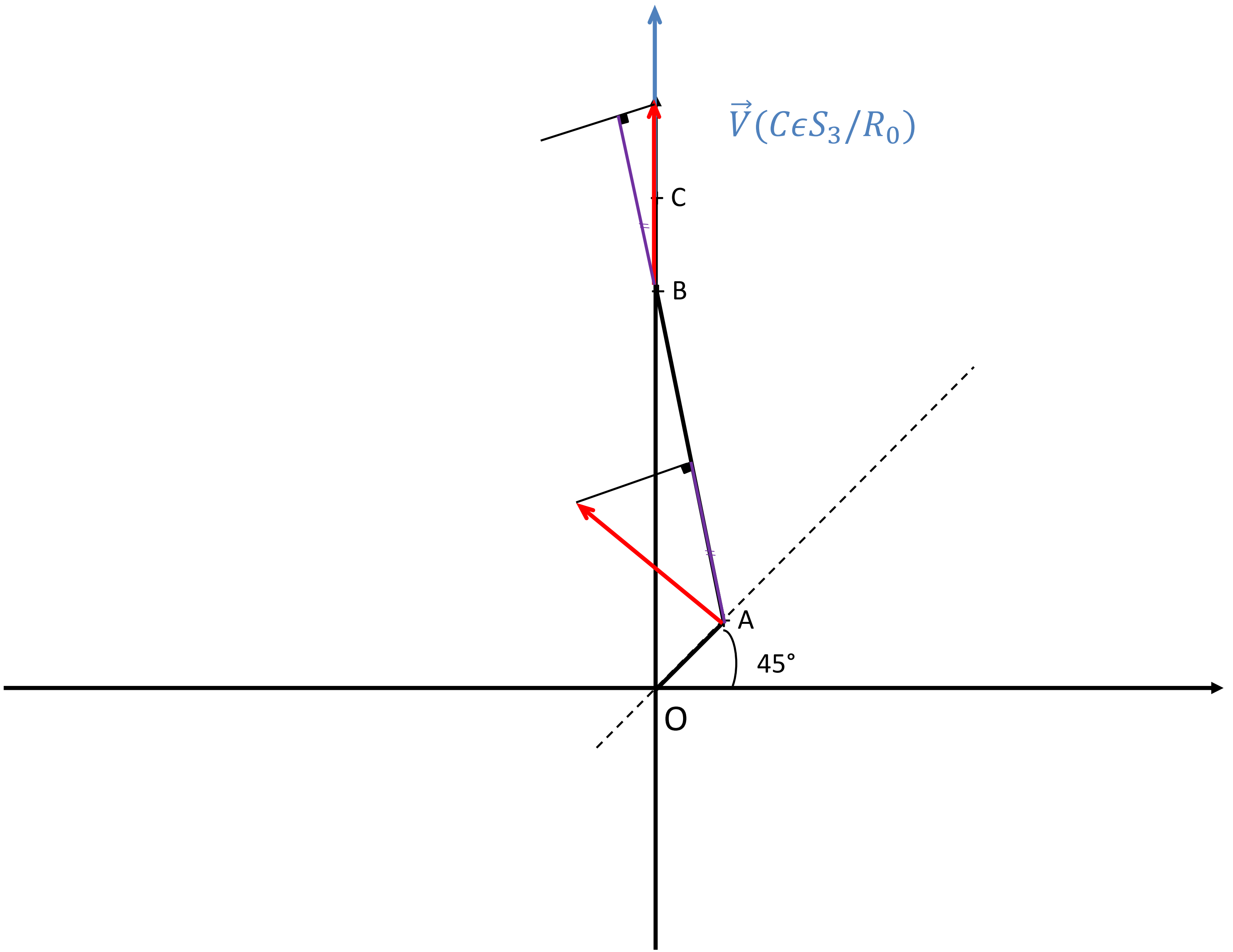
Liaison pivot en A entre S_2 et S_1 donc $\vec{V}(A \in S_1/R_0) \; = \; \vec{V}(A \in S_2/R_0)$

La propriété d'équiprojectivité dans S2 entre A et B s'écrit :
$\vec{V}(A \in S_2/R_0).\overrightarrow{AB}$= $\vec{V}(B \in S_2/R_0).\overrightarrow{AB}$

a. On trace la projection orthogonale de $\vec{V}(A\epsilon S_2/R_0)$ sur la droite (AB)
b. On reporte la projection orthogonale en B
c. On trace la perpendiculaire à (AB) au bout de la projection orthogonale
d. Le vecteur $\vec{V}(B \in S_2/R_0)$est suivant y_0 et tel que sa projection orthogonale soit la même que celle de $\vec{V}(A \in S2/R0)$
e. $\vec{V}(B \in S_2/R_0)$ = $\vec{V}(B \in S_3/R_0)$ = $\vec{V}(C \in S_3/R_0)$



$\vec{V}(B\epsilon S_2/R_0)$
C
B
$\vec{V}(A\epsilon S_2/R_0)$= $\vec{V}(A\epsilon S_1/R_0)$
A
45°
O


$\vec{V}(C \epsilon S_3/R_0)$
C
B
A
45°
O

4. Comparer la norme de $\vec{V}(C\epsilon S_3/R_0)$ obtenu graphiquement, avec la valeur calculée analytiquement à l'aide de l'expression obtenue à la question II-6.

Graphiquement on trouve que $\left\|\vec{V}(C\epsilon S_3/R_0)\right\| \approx$ 3,5 cm sur le dessin soit 700 $mm.s^{-1}$

Par le calcul on trouve 701 $mm.s^{-1}$

Les 2 valeurs sont très proches !!

Remarque : pour le modèle GP10 on trouve :

Graphiquement $\left\|\vec{V}(C\epsilon S_3/R_0)\right\| \approx$ 2,6 cm sur le dessin soit 520 $mm.s^{-1}$

Par le calcul on trouve 521 $mm.s^{-1}$

Les 2 valeurs sont très proches !!

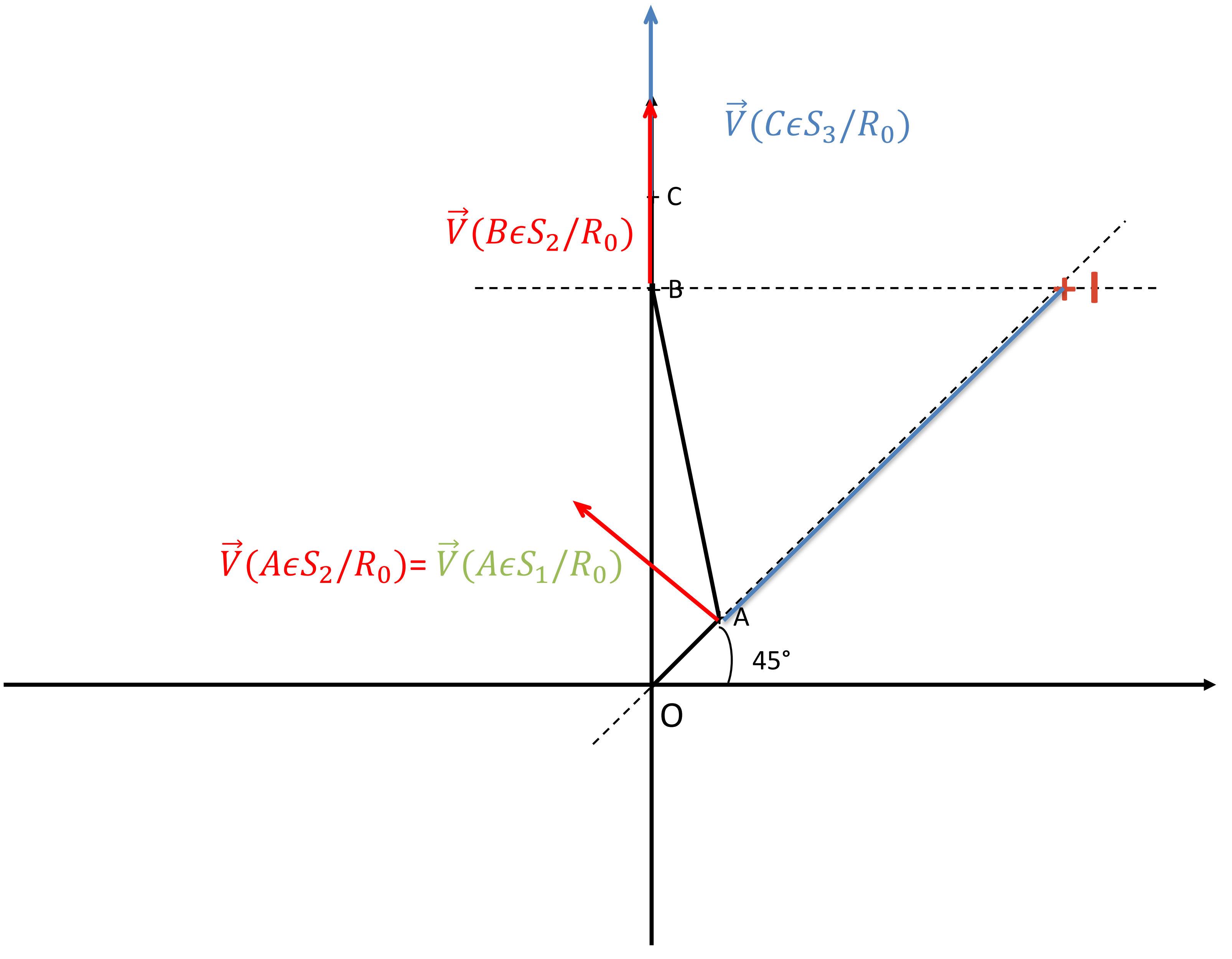
5. Déterminer la position du point I, centre instantané de rotation de S_2 par rapport à R_0.

Remarque : ici vous avez la correction dans le cas $\alpha = \frac{\pi}{4}$, à vous de refaire l'analyse pour $\alpha = -\frac{\pi}{4}$!!!

a. $\overrightarrow{IA} \perp \vec{V}(A \in S_2/R_0)$ et $\vec{V}(A \in S_2/R_0) \perp$ (OA) et donc $I \in$ (OA)

b. $\overrightarrow{IB} \perp \vec{V}(B \in S_2/R_0)$ et $\vec{V}(B \in S_2/R_0)$ est suivant y_0 donc $I \in$ (Bx_0)

c. I est donc à l'intersection de (OA) et (Bx_0)


$\vec{V}(C\epsilon S_3/R_0)$
C
$\vec{V}(B\epsilon S_2/R_0)$
B
$\vec{V}(A\epsilon S_2/R_0)$= $\vec{V}(A\epsilon S_1/R_0)$
A
45°
O

5. En déduire $\overrightarrow{\Omega}(S_2/R_0)$.

Remarque : ici vous avez la correction dans le cas $\alpha = \frac{\pi}{4}$, à vous de refaire l'analyse pour $\alpha = -\frac{\pi}{4}$!!!

Propriété du champ des vitesses du solide S_2/R_0 en A et I :

$\vec{V}(A \in S_2/R_0) \;=\; \vec{V}(I \in S_2/R_0) + \overrightarrow{\Omega}(S_2/R_0) \wedge \overrightarrow{IA}$ et $\vec{V}(I \in S_2/R_0)$ est nul

Donc $\left\|\vec{V}(A \in S_2/R_0)\right\| = \left\|\overrightarrow{\Omega}(S_2/R_0)\right\| \left\|\overrightarrow{IA}\right\|$

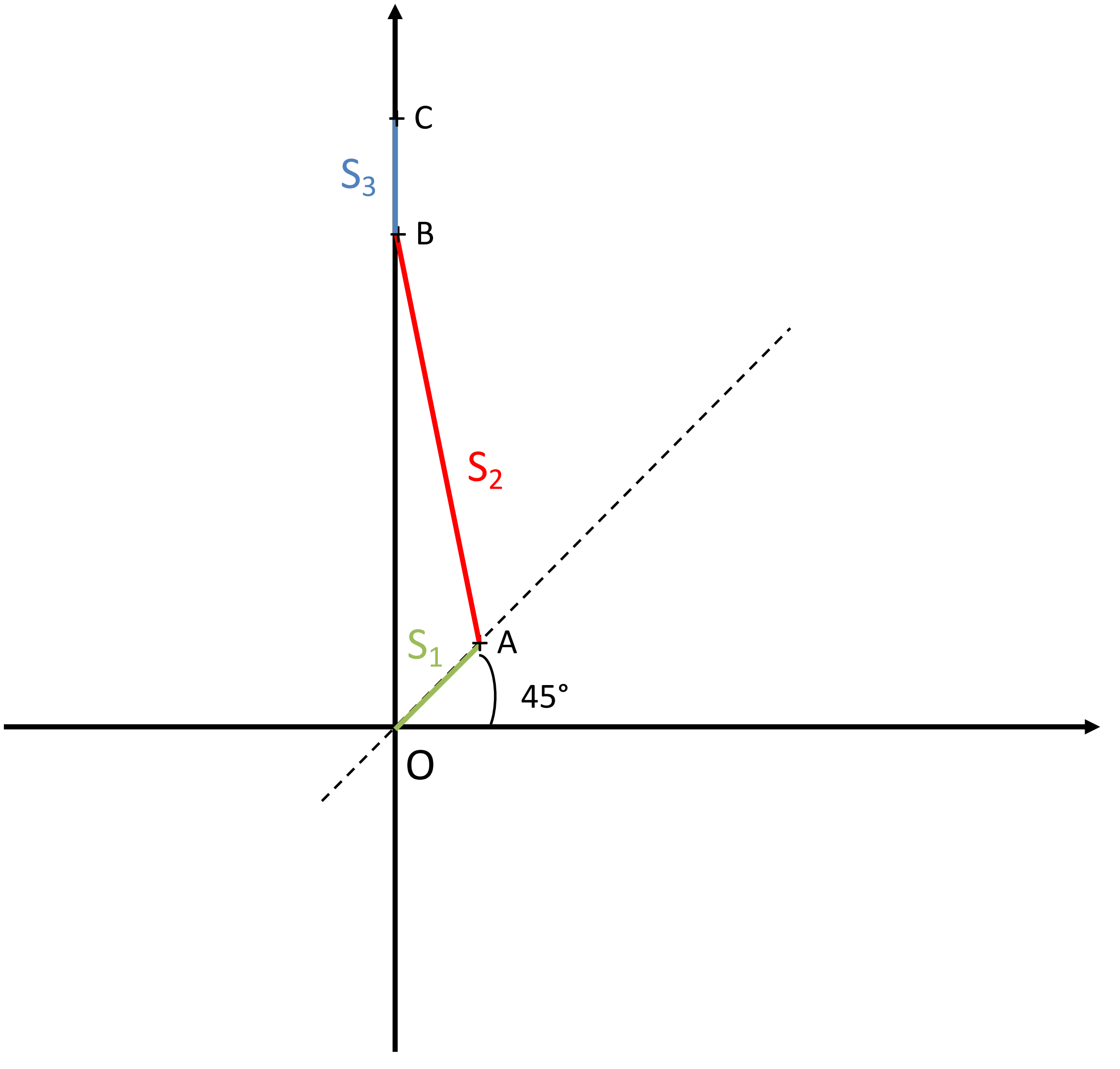
Donc $\left\|\overrightarrow{\Omega}(S_2/R_0)\right\| = \frac{\left\|\vec{V}(A \in S_2/R_0)\right\|}{\left\|\overrightarrow{IA}\right\|}$

$\left\|\vec{V}(A \in S_2/R_0)\right\|$ = 825 $mm.s^{-1}$

Et $\left\|\overrightarrow{IA}\right\|$ = 8 cm sur le dessin = 40 mm

Donc $\left\|\overrightarrow{\Omega}(S_2/R_0)\right\|$ = 825/40s^{-1} = 20,6 $rad.s^{-1}$

Par le calcul on trouve $\left\|\overrightarrow{\Omega}(S_2/R_0)\right\| = \dot{\beta}$ = 20,17 $rad.s^{-1}$


C
S3
B
S2
S1
A
45°
O