Université de Montpellier 2020-2021
Faculté des Sciences
M2 MIND HMMA401

TP Algorithme de Hastings-Metropolis

Exercice 1 Nous souhaitons simuler des variables aléatoires de densité

$$f(x) = \frac{1}{Z} \exp(-x^2) \left(2 + \sin(5x) + \sin(2x)\right), \quad x \in [-3, 3]$$

où Z est la constante de normalisation de f.

1 Tracer le graphe de la densité non-normalisée.

2 Donner une approximation de Z et avec cela, tracer le graphe de la densité normalisée.

3 Écrire l'algorithme de Metropolis-Hastings pour simuler suivant f. On pourra utiliser comme loi de proposition une marche aléatoire gausienne de variance σ^2.

4 Simuler les $n = 50000$ premiers termes de la chaîne de Markov correspondante.

5 Vérifier à l'aide d'un histogramme que $(X_n)_{n>n_0}$ (pour n_0) assez grand) est une suite de variables aléatoires dont on peut considérer qu'elles sont des réalisations de f.

6 Quelle est l'influence du choix de n_0 (burn-in period) ?

7 Analyser l'influence du choix de σ^2.

Exercice 2 Nous considérons une suite d'observations $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ iid suivant une loi gaussienne de moyenne θ inconnu et de variance 2. On s'intéresse à l'estimation de θ par une méthode bayésienne. On adopte une loi a priori uniforme entre 0 et 5 pour θ.

1 Donner la densité de la loi a posteriori $\pi(\theta|\underline{x})$.

2 Proposer un algorithme de Metropolis-Hastings pour simuler suivant $\pi(\theta|\underline{x})$.

3 Utiliser cet algorithme pour simuler un échantillon de $N = 1000$ variables aléatoires approximativement distribuées suivant $\pi(\theta|\underline{x})$ (on aura préalablement généré un échantillon de taille $n = 20$ avec $\theta = 3$).

4 Représenter la distribution de cet échantillon à l'aide d'un histogramme.

5 Calculer une approximation de $\mathbb{E}^{\pi}[\theta|\underline{x}]$.