



Courbe de Peano

L'objectif est de prouver l'existence d'une application continue surjective $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$, aussi appelée « courbe de Peano ». L'existence d'une telle application défie l'intuition : si la continuité est « tracer sans lever le crayon », comment pourrait-on remplir ainsi tout un carré ?

Nous allons construire la courbe de Peano comme limite d'une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de courbes de plus en plus complexes (bien que toutes affines par morceaux). Commençons par décrire une « opération élémentaire » qui va nous servir à définir cette suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Petit rappel de vocabulaire : un **chemin** de \mathbb{R}^2 est une application continue $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Transformation élémentaire Considérons le chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ affine par morceaux de la figure 1. A droite, on a représenté l'image de γ en rouge à l'intérieur du carré $[0, 1]^2$.

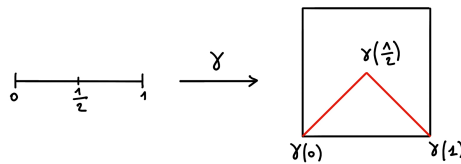


FIGURE 1 – le chemin γ

Il y a 2 morceaux : γ est affine sur $[0, 1/2]$ et sur $[1/2, 1]$. Le point $\gamma(1/2)$ est au centre du carré $[0, 1]^2$. On peut donner des « formules » pour définir γ , même si ce n'est pas nécessaire pour la suite.

On transforme γ en un autre chemin $\bar{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ comme dans la figure 2.

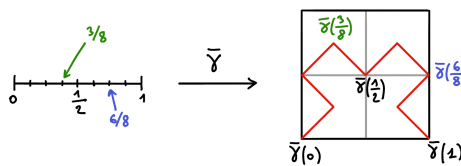


FIGURE 2 – le chemin $\bar{\gamma}$

Ce nouveau chemin $\bar{\gamma}$ est également affine par morceaux : sur $[0, 1/8]$, sur $[1/8, 2/8]$, etc. jusqu'à $[7/8, 8/8]$. Il y a 8 morceaux affines en tout. Là encore, on peut expliciter des formules $\bar{\gamma}$, mais cela ne sera pas vraiment utile dans la suite.

Observez que le carré initial de la figure 1 a été divisé en 4 sous-carrés dans la figure 2, et que dans chaque sous-carré on retrouve (à rotation près) un chemin du même type que γ , défini sur un segment de longueur $1/4$... La figure 3 fait la synthèse de cette opération élémentaire en oubliant le paramétrage.



FIGURE 3 – unité de base (à gauche) et sa transformée (à droite)

Suite de chemins Si l'on effectue la même opération élémentaire sur chacun des quatre sous-motifs de base du carré de droite de la figure 3 en remplaçant à chaque fois l'intervalle de définition initial $[0, 1]$ par des segments de longueur $1/4$, on obtient la figure de gauche ci-dessous, composée de 16 sous-motifs de base. En continuant pour chacun de ces 16 motifs, on obtient la figure de droite :

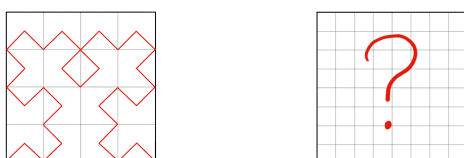


FIGURE 4 – les deux étapes suivantes

On définit de cette manière une suite de chemins $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ en partant de $f_0 := \gamma$. Encore une fois : il n'est pas nécessaire d'avoir des expressions explicites des fonctions f_n , tout ce que l'on a besoin de savoir c'est qu'elles sont affines par morceaux !

Questions On munit \mathbb{R}^2 et donc aussi $[0, 1]^2$ de la distance d_∞ , et $C^0([0, 1], [0, 1]^2)$ de la distance d de la convergence uniforme : $d(f, g) = \max_{t \in [0, 1]} d_\infty(f(t), g(t))$.

1. On commence par se convaincre que l'on pourrait définir tous les chemins f_n par des formules explicites. Sachant sur quels morceaux ils sont affines, il suffit de connaître les extrémités de chaque morceau pour trouver la fonction affine correspondante. Par exemple :

- a) Le premier chemin γ est affine sur $[0, 1/2]$ et sur $[1/2, 1]$. De plus $\gamma(0) = (0, 0)$, $\gamma(1/2) = (1/2, 1/2)$ et $\gamma(1) = (1, 0)$, donc :

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ (t, 1 - t) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

- b) Le chemin $\bar{\gamma}$ est affine sur $[0, 1/8]$, sur $[3/8, 1/2]$ et sur $[7/8, 1]$. De plus $\gamma(0) = (0, 0)$, $\gamma(1/8) = (1/4, 1/4)$, donc :

$$\bar{\gamma}(t) = \begin{cases} (2t, 2t) & \text{si } t \in [0, 1/8] \\ (2t - 1/2, 3/2 - 2t) & \text{si } t \in [3/8, 1/2] \\ (2t - 1, 2 - 2t) & \text{si } t \in [7/8, 1] \end{cases}$$

2. Après la troisième étape :



3. A l'étape 0 (chemin initial), le carré unité est divisé en 1 carré (lui-même), la longueur de côté est 1. Quand on passe de l'étape n à l'étape $n+1$, chaque sous-carré est subdivisé en 4 carrés chacun de longueur moitié. Par conséquent (récurrence immédiate) : à l'étape n , le carré unité est divisé en 4^n sous-carrés de longueur de côté $1/2^n$ chacun.
4. a) Évidemment, $f_0(t)$ et $f_1(t)$ appartiennent au carré unité. Donc $d_\infty(f_0(t), f_1(t)) \leq 1$ pour tout $t \in [0, 1]$.
- b) Le même raisonnement, mais réduit à des sous-carrés, va s'appliquer pour le passage de f_1 à f_2 . Par exemple, pour $t \in [0, 1/4]$, les deux points $f_1(t)$ et $f_2(t)$ appartiennent au même sous-carré $[0, 1/2]^2$. De même, pour $t \in [1/4, 1/2]$, les deux points $f_1(t)$ et $f_2(t)$ appartiennent au même sous-carré $[0, 1/2] \times [1/2, 1]$, pour $t \in [1/2, 3/4]$ ils appartiennent à $[1/2, 1]^2$ et pour $t \in [3/4, 1]$ ils appartiennent à $[1/2, 1] \times [0, 1/2]$. Pour chaque $t \in [0, 1]$, on aura donc $d_\infty(f_1(t), f_2(t)) \leq 1/2$.
- c) Le chemin f_n est affine par morceaux, avec 2×4^n morceaux en tout. L'intervalle de départ $[0, 1]$ est donc subdivisé en 2×4^n intervalles successifs $I_1, I'_1, I_2, I'_2, \dots, I_{4n}, I'_{4n}$. Sur deux sous-intervalles consécutifs I_k, I'_k , le point $f_n(t)$ se déplace dans un sous-carré de longueur de côté $1/2^n$. D'après l'analyse des questions précédentes, le point $f_{n+1}(t)$ se déplace dans le même sous-carré : on retrouve la transformation de base (qui avait lieu dans le carré unité) dans un sous-carré de longueur de côté $1/2^n$. On en déduit que $d_\infty(f_n(t), f_{n+1}(t)) \leq 1/2^n$ pour tout $t \in [0, 1]$. Par conséquent, $d(f_n, f_{n+1}) \leq 1/2^n$.
5. Pour $n \geq 0$ et $p \geq 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} d(f_n, f_{n+p}) &\leq d(f_n, f_{n+1}) + \dots + d(f_{n+p-1}, f_{n+p}) \\ &\leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p-1}} \\ &\leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots = \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

6. On vient de montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $C^0([0, 1], [0, 1]^2)$: pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon$, et on aura alors $d(f_n, f_{n+p}) < \varepsilon$ pour tout $n \geq 0$ et tout $p \geq 1$. Par complétude, on en déduit qu'elle admet une limite $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ dans $C^0([0, 1], [0, 1]^2)$.
7. Soit (a, b) un point quelconque de $[0, 1]^2$, et soit $\varepsilon > 0$. Soit n un entier assez grand pour que $1/2^n < \varepsilon$. Le point (a, b) appartient alors à l'un des 4^n sous-carrés de longueur de côté $1/2^n$ qui remplissent $[0, 1]^2$ à l'étape n (voir question 3). Par conséquent, la d_∞ -distance de (a, b) à l'image de f_n est inférieure à ε . Il existe donc un $t_n \in [0, 1]$ tel que $d_\infty(f_n(t_n), (a, b)) < \varepsilon$. On en déduit que $d_\infty(f(t_n), (a, b)) \leq d_\infty(f(t_n), f_n(t_n)) + d_\infty(f_n(t_n), (a, b)) < d(f, f_n) + \varepsilon$. Mais $f_n \rightarrow f$ uniformément, donc il existe un rang N au-delà duquel $d(f, f_n) \leq \varepsilon$.
- Il existe donc un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $d_\infty(f(t_n), (a, b)) \leq 2\varepsilon$ pour tout $n \geq N$. Par conséquent, toute d_∞ -boule ouverte de centre (a, b) intersecte $f([0, 1])$. Donc (a, b) appartient à l'adhérence de $f([0, 1])$.
8. $f([0, 1])$ est fermé dans $[0, 1]^2$ car c'est l'image d'un compact par une application continue. Donc $f([0, 1]) = [0, 1]^2$ d'après la question précédente.