Université de Montpellier
Faculté des Sciences
M2 MIND HMMA401 2020-2021

TD Estimation bayésienne

Exercice 1 Nous considérons une variable aléatoire x suivant une loi de probabilité $\mathcal{B}(n, \theta)$. Nous nous plaçons dans un contexte bayésien et considérons le paramètre inconnu $\theta \in [0, 1]$ comme une variable aléatoire.

1 Déterminer la loi de probabilité a priori non informative de Jeffreys de θ, $\pi_1(\theta)$. Calculer l'estimateur bayésien de θ correspondant à la moyenne de la loi de probabilité de θ sachant que x (loi a posteriori).

2 Nous considérons une nouvelle loi de probabilité a priori $\pi_2(\theta) = \mathbf{1}_{[0,1]}(\theta)$ (loi uniforme sur $[0, 1]$). Calculer le nouvel estimateur bayésien de θ correspondant à la moyenne de la loi a posteriori.

Exercice 2 La durée de vie x d'un composant électrique suit une loi log-normale de paramètre $(\theta, 1)$

$$f(x|\theta, 1) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}[\log(x) - \theta]^2\right) \mathbf{1}_{x \in \mathbb{R}_+^*}$$

avec $\theta \in \mathbb{R}$.
Nous disposons d'un n-échantillon $x_1, \ldots, x_n$ de durées de vie. Nous nous plaçons dans le paradigme bayésien et supposons que θ est distribué suivant une loi gaussienne centrée réduite. Calculer l'estimateur bayésien associé à la fonction de perte quadratique $L(\theta, \delta) = (\theta - \delta)^2$.

Exercice 3 La même information binaire $\theta \in \{0, 2\}$ est transmise 2 fois consécutives vers un récepteur à travers un canal de transmission. Ces deux informations sont perturbées par un bruit supposé gaussien centré de variance 1. Le message reçu est stocké dans le vecteur $z = (z_1, z_2)$ avec z_1 et z_2 deux variables aléatoires indépendantes distribuées suivant des lois gaussiennes de moyenne θ et variance 1. Le problème consiste à retrouver le symbole émis θ à partir du message reçu $z = (z_1, z_2)$. Nous supposons que $\mathbb{P}(\theta = 0) = \mathbb{P}(\theta = 2) = 1/2$.

1 Donner la loi a posteriori de θ, ie $\mathbb{P}(\theta = 0|z)$ et $\mathbb{P}(\theta = 2|z)$.

2 Calculer l'estimateur bayésien associé à la fonction de perte

$$L(\theta, d) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \theta = d \\ 2 & \text{si} \quad \theta = 0 \quad \text{et} \quad d = 2 \\ 1 & \text{si} \quad \theta = 2 \quad \text{et} \quad d = 0 \end{cases}.$$

Exercice 4 Le nombre x d'arrivés dans une file d'attente suit une loi binomiale négative de paramètre (k, θ)

$$f(x|k, \theta) = C_x^{k+x-1} \theta^k (1 - \theta)^x \mathbf{1}_{x \in \mathbb{N}}$$

avec $\theta \in]0, 1[$. On suppose k fixé et l'on souhaite estimer θ. Nous nous plaçons dans le paradigme bayésien. Quelle est la famille de loi conjuguée pour le paramètre θ ? Démontrer le résultat énoncé.