Année 2019-2020 HLMA502 Topologie
L3 — Mathématiques

Examen (10 janvier 2020)
durée : 3h

N.B. Documents, calculatrices, téléphones portables interdits. La qualité de la rédaction et de la présentation sera prise en compte dans la notation. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Partie 1. Démonstrations de cours

⚠ En *italiques* : consignes pour la rédaction des démonstrations. Le barème est indicatif et susceptible de modifications.

Exercice 1. **(3 points)** Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. On munit l'ensemble produit $X \times Y$ de la distance d_∞ associée à d_X et d_Y.

1. Rappeler la définition de d_∞.
2. Montrer que si U est un ouvert de (X, d_X) et V est un ouvert de (Y, d_Y), alors $U \times V$ est un ouvert de $(X \times Y, d_\infty)$.
3. Montrer que tout ouvert de $(X \times Y, d_\infty)$ est la réunion d'ouverts « élémentaires » de la forme $U \times V$, avec U ouvert de (X, d_X) et V ouvert de (Y, d_Y).

⚠ *Utiliser la définition des ouverts d'un espace métrique, donc en termes de distance. Ne dites pas que tout est vrai « parce que c'est la topologie produit » : on veut ici* ***redémontrer*** *que la topologie de la distance d_∞ est effectivement la topologie produit...*

Exercice 2. **(1 point)** Soit X un espace métrique compact. Soit $f : X \to Y$ une application continue à valeurs dans un espace métrique quelconque. Montrer que $f(X)$ est une partie compacte de Y.

Exercice 3. **(2 points)** On **admet** que tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet. Montrer que si E est un espace vectoriel normé de dimension quelconque et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, alors F est fermé dans E.

Exercice 4. **(4 points)** Soit X un ensemble non vide. On note $\mathscr{B}(X, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications bornées de X dans $\mathbb{R}$. On le munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Rappeler la définition de $\|\cdot\|_\infty$ et montrer que l'espace vectoriel normé $(\mathscr{B}(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

⚠ *Bien détailler les étapes.*

Partie 2. Exercices

Exercice 5. Soit (X,d) un espace métrique non vide. On rappelle que si $x \in X$ et $A \subseteq X$, on pose $d(x,A) := \inf\{d(x,a)\,;\, a \in A\}$.

1. Soient $x \in X$ et $A \subseteq X$. On veut redémontrer que $d(x,A) = d(x,\overline{A})$.
   a) Montrer que $d(x,\overline{A}) \leq d(x,A)$.
   b) Montrer que $d(x,A) \leq d(x,\overline{A})$.
2. Soient $x, y \in X$ et $A \subseteq X$. Montrer que $d(x,A) \leq d(x,y) + d(y,A)$. En déduire que $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$.
3. On considère un ouvert U de X, et on définit pour $n \in \mathbb{N}$ une fonction $f_n : X \to \mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) := \min\big(1, n\, d(x, U^c)\big)$$

   où U^c désigne le complémentaire de U dans X.
   a) On admet que la fonction $\varphi(t) := \min(1,t)$ vérifie $|\varphi(s) - \varphi(t)| \leq |s-t|$ quels que soient $s, t \in \mathbb{R}^+$. Montrer que $|f_n(x) - f_n(y)| \leq n d(x,y)$ quels que soient $x, y \in X$.
   b) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction indicatrice $\mathbb{1}_U$ de U, définie par $\mathbb{1}_U(x) = 1$ si $x \in U$ et $\mathbb{1}_U(x) = 0$ si $x \notin U$.

Exercice 6.

1. Si (X,d) est un espace métrique complet et si $f : X \to X$ est une application vérifiant

$$\exists k \in [0,1[, \forall x, y \in X, d(f(x), f(y)) \leq k d(x,y),$$

   que dit le théorème du point fixe de Banach ?
2. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = \left(1 + \frac{1}{3}\cos(x+y), 2 - \frac{3}{5}\sin(x-y)\right)$$

   possède un unique point fixe. Si vous utilisez un résultat du cours, veillez à vérifier toutes ses hypothèses.

Exercice 7. On considère $E = C^0([-1,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On définit $u : E \to \mathbb{R}$ par $u(f) := \int_0^1 f(t)dt - \int_{-1}^0 f(t)dt$.

1. Rappeler la définition de $\|f\|_\infty$ pour $f \in E$.
2. Montrer que u est une forme linéaire continue sur E et donner une majoration de $|||u|||$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) := \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [-1, -\frac{1}{n}] \\ nx & \text{si } x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ 1 & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

   Déterminer $\|f_n\|_\infty$ et $u(f_n)$. En déduire la valeur de $|||u|||$.