Année 2019-2020 HLMA502 Topologie
L3 — Mathématiques

Contrôle continu (7 novembre 2019)
durée : 80mn

N.B. Documents, calculatrices, téléphones portables interdits. La qualité de la rédaction et de la présentation sera prise en compte dans la notation. Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Le barème est indicatif.

Partie 1. Démonstrations de cours

N.B. En *italiques* : consignes pour la rédaction des démonstrations. Bien faire apparaître où et comment ces consignes sont utilisées.

Exercice 1. **(1 point)** Soit (X, d) un espace métrique, et soient $a \in X$ et $r > 0$. Montrer que la boule ouverte $B(a, r)$ est un ouvert de X.

Utiliser uniquement les propriétés d'une distance et la définition des ouverts d'un espace métrique.

Exercice 2. **(3 points)** Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace topologique, et soit A une partie de X. On pose $\mathcal{O}_A := \{U \subseteq A\,;\, \exists V \in \mathcal{O}_X, U = A \cap V\}$.

1. Montrer que $\mathcal{O}_A$ est une topologie sur A.
2. Montrer que si $(X, \mathcal{O}_X)$ est séparé, alors $(A, \mathcal{O}_A)$ est également séparé.

Revenir à la définition pour montrer qu'une famille de parties de A est une topologie sur A.

Exercice 3. **(2 points)** Soit (X, d) un espace métrique séquentiellement compact. Montrer que (X, d) est précompact, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un recouvrement de X par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε.

N'utiliser que la définition de la compacité séquentielle, et notamment ne pas invoquer le théorème de Bolzano-Weierstrass. Il est possible de raisonner par contraposée.

Exercice 4. **(4 points)** Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace topologique séparé, et soit A une partie de X. Montrer que si A est une partie compacte de X, alors A est fermée dans X.

⚠ *Si vous montrez seulement (et correctement) que A est séquentiellement fermée dans X, vous n'aurez que 2 points sur les 4.*

Partie 2. Exercices

Exercice 5. **(6 points)** Soit (X, d) un espace métrique, et soit A une partie de X. Pour $r > 0$, on pose

$$A_r := \bigcup_{a \in A} D(a, r),$$

où $D(a, r)$ désigne la boule fermée de centre a et de rayon r. Dans la suite de l'exercice, on suppose que A est *compacte*.

1. On cherche à montrer que A_r est fermée dans X. Pour cela :
   a) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de A_r. De quelle manière pouvez-vous trouver une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A qui soit reliée à $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   b) On suppose maintenant que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point $x \in X$. Montrer qu'il existe un point $a \in A$ tel que $d(x, a) \leq r$.
   c) En déduire que A_r est un fermé de X.
2. On suppose de plus que, pour chaque point $x \in X$, la boule fermée $D(x, 1)$ est compacte. Montrer qu'alors $A_{1/2}$ est compact.
   Pour cette question 2, on peut utiliser la compacité séquentielle et commencer comme dans la question 1a que vous venez de faire. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de $A_{1/2}$, que cherchez-vous à montrer ? Que pouvez-vous dire de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et pourquoi existe-t-il un point $a \in A$ tel que la boule fermée $D(a, 1)$ soit intéressante ?

Exercice 6. **(4 points)** Soient X et Y deux espaces métriques, et soit $f : X \to Y$ une application. On note $\Gamma := \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$ le graphe de f. On munit $X \times Y$ de la topologie produit.

1. Montrer que si f est continue, alors Γ est fermé dans $X \times Y$.
2. Montrer que si Γ est fermé dans $X \times Y$ et si Y est compact, alors f est continue.

Vous pouvez utiliser les caractérisations séquentielles de « être fermé » et « être continue ».