Année 2018-2019 HLMA502 Topologie
L3 — Mathématiques

Contrôle continu (20 décembre 2018)
durée : 1h30

N.B. Documents, calculatrices, téléphones portables interdits. La qualité de la rédaction et de la présentation sera prise en compte dans la notation. Les exercices sont indépendants. Le barème est indicatif.

Partie 1. Démonstrations de cours

N.B. En *italiques* : consignes pour la rédaction des démonstrations. Bien faire apparaître où et comment ces consignes sont utilisées.

Exercice 1. **(1 point)** Soit (X, d) un espace métrique, et soient $a \in X$ et $r > 0$. Montrer que le complémentaire de la boule fermée $D(a, r)$ est une partie ouverte de X. *Utiliser uniquement les propriétés d'une distance et la définition des ouverts d'un espace métrique.*

Exercice 2. **(4 points)** Soit (X, d) un espace métrique, et soit A une partie non vide de X. On munit A de la distance induite d_A, la restriction de d à A.

1. Soient $a \in A$ et $r > 0$. Montrer que $B_A(a, r) = A \cap B_X(a, r)$, où B_X désigne la boule dans X et B_A la boule dans A.
2. Montrer que si U est un ouvert de A, alors il existe un ouvert V de X tel que $U = A \cap V$.
3. Montrer la réciproque de la propriété de la question 2.

Utiliser la définition des ouverts d'un espace métrique.

Exercice 3. **(1 point)** Montrer qu'un espace métrique discret est compact si et seulement s'il est fini.

Utiliser la définition de la compacité uniquement en termes de recouvrements ouverts.

Exercice 4. **(2 points)** Montrer qu'un espace métrique compact est borné.

Pas de consigne particulière.

Exercice 5. **(2 points)** Soit $f : X \to Y$ une application continue entre deux espaces métriques, avec X compact. Montrer que $f(X)$ est une partie compacte de Y.

Pas de consigne particulière. Bien faire apparaître le rôle de la continuité.

Partie 2. Exercices

Exercice 6. **(2 points)** Soit (X, d) un espace métrique, et soient A, B deux parties non vides de X. Montrer l'équivalence :

$$\forall\, x \in X,\, d(x, A) = d(x, B) \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{A} = \overline{B}$$

Exercice 7. **(3 points)** Soient X et Y deux espaces métriques, et soit $f : X \to Y$ une application. On note $\Gamma := \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$ le graphe de f. On munit $X \times Y$ de la topologie produit.

1. Montrer que si f est continue, alors Γ est fermé dans $X \times Y$.
2. Montrer que si Γ est fermé dans $X \times Y$ et si Y est compact, alors f est continue.

Exercice 8. **(5 points)** Soient (X, d) un espace métrique, et A une partie compacte de X. Pour $r > 0$, on pose

$$K_r := \cup_{a \in A} D(a, r),$$

où $D(a, r)$ désigne la boule fermée de centre a et de rayon r.

1. Montrer que K_r est une partie fermée de X. *On peut utiliser la caractérisation séquentielle de « partie fermée ».*
2. On suppose de plus que, pour chaque point $x \in X$, la boule fermée $D(x, 1)$ est compacte. Montrer qu'alors $K_{1/2}$ est compact. *On peut utiliser la compacité séquentielle.*