Année 2018-2019 HLMA502 Topologie
L3 — Mathématiques

Contrôle continu (15 novembre 2018)
durée : 1h30

N.B. Documents, calculatrices, téléphones portables interdits. La qualité de la rédaction et de la présentation sera prise en compte dans la notation. Les exercices sont indépendants.

Partie 1. Démonstrations de cours

N.B. En *italiques* : consignes pour la rédaction des démonstrations. Bien faire apparaître où et comment ces consignes sont utilisées.

Exercice 1. **(1 point)** Soit (X, d) un espace métrique, et soient $a \in X$ et $r > 0$. **Montrer** que la boule ouverte $B(a, r)$ est une partie ouverte de X. *Utiliser les propriétés d'une distance et la définition des ouverts d'un espace métrique.*

Exercice 2. **(1 point)** On se donne deux distances d et d' sur un ensemble X. On suppose qu'il existe deux constantes $\alpha, \beta > 0$ telles que $\alpha d(x, y) \leq d'(x, y) \leq \beta d(x, y)$ quels que soient $x, y \in X$. **Montrer** que d et d' définissent les mêmes ouverts. *Utiliser la définition des ouverts d'un espace métrique.*

Exercice 3. **(1 points)** Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. On munit le produit $X \times Y$ de la distance d_∞ associée à d_X et d_Y. **Montrer** que si U est un ouvert de (X, d_X) et si V est un ouvert de (Y, d_Y), alors $U \times V$ est un ouvert de $(X \times Y, d_\infty)$. *Utiliser la définition de d_∞ et des ouverts d'un espace métrique.*

Exercice 4. **(3 points)** Soit (X, d) un espace métrique, et soit A une partie de X.

1. **Montrer** que si A est une partie compacte de X, alors A est fermée dans X.
2. **Montrer** que si X est compact et si A est fermée dans X, alors A est une partie compacte.

Utiliser la caractérisation séquentielle de la compacité et du fait d'être fermé.

Exercice 5. **(4 points)** Soit $f : X \to Y$ une application continue entre deux espaces métriques, avec X compact. **Montrer** qu'alors f est uniformément continue. *Raisonner par contraposée. Utiliser la caractérisation séquentielle de la compacité.*

Partie 2. Exercices

Exercice 6. **(1 point)** Soit (X, d) un espace métrique. On rappelle que le **diamètre** $\mathrm{diam}(A)$ d'une partie bornée $A \subseteq X$ est défini par :

$$\mathrm{diam}(A) := \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}.$$

Soient A et B deux parties bornées de X telles que $A \cap B \neq \emptyset$. Montrer que $\mathrm{diam}(A \cup B) \leq \mathrm{diam}(A) + \mathrm{diam}(B)$.

Exercice 7. **(2 points)** Soit (X, d) un espace métrique, et soient A, B deux parties de X.

1. On suppose que A est ouverte.
   a) Montrer que $A \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.
   b) Montrer que si $A \cap B = \emptyset$, alors $A \cap \overline{B} = \emptyset$.
2. Donner un exemple d'espace métrique (X, d) et de parties A, B avec A non ouverte et $A \cap \overline{B} \not\subseteq \overline{A \cap B}$.

Exercice 8. **(7 points)** *N.B. Vous pouvez admettre le résultat d'une question pour traiter les suivantes.*

Soient (X, d) un espace métrique **compact**, et $f : X \to X$ une application telle que :

$$d(f(x), f(y)) \geq d(x, y) \quad \text{quels que soient } x, y \in X \tag{1}$$

On pose $f^0 := \mathrm{id}_X$ (application identité) et $f^n := \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$.

1. Soient $a, b \in X$.
   a) Montrer avec soin qu'il existe une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que les deux suites $(f^{\varphi(n)}(a))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f^{\varphi(n)}(b))_{n\in\mathbb{N}}$ soient convergentes.
   b) On pose $\psi(n) := \varphi(n + 1) - \varphi(n)$. Montrer que
   $$\lim_{n\to+\infty} f^{\psi(n)}(a) = a \quad \text{et} \lim_{n\to+\infty} f^{\psi(n)}(b) = b,$$
   et en déduire que $d(f(a), f(b)) = d(a, b)$.
   c) Que vient-on de démontrer ?
2. Montrer que tout point $a \in X$ appartient à l'adhérence de $f(X)$.
3. En déduire que f est surjective, puis qu'elle est bijective.