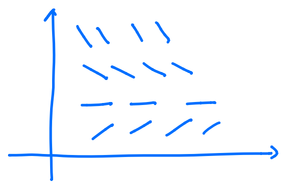
ok pour ce mercredi 9^h45

dernier CC 21 ou 22 janvier (matin) (ou 14 ou 15)



superposit° solut°

étude qualit.

exercice 33 $\begin{cases} n'(t) = f(n(t)) \\ 0 < n(0) < 1 \end{cases}$ $f = ??$ $\frac{dn}{dt} = f(n)$ $\frac{dn}{f(n)} = dt$

$\int \frac{dn}{f(n)} = ??$

(a) $f(x) = x\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1)$

est-ce qu'on va résoudre l'ED $n' = \overbrace{n\left(n-\frac{1}{2}\right)(n-1)}^{2^d d°}$?

$n'(t) = n(t)^3 + \dots$ on sait résoudre ? nous, non... ou peut-être que si ?

$n' = n\left(n-\frac{1}{2}\right)(n-1)$

$\frac{dn}{dt} = n\left(n-\frac{1}{2}\right)(n-1)$

$\frac{dn}{n\left(n-\frac{1}{2}\right)(n-1)} = dt$

$\underbrace{\int \frac{dn}{n\left(n-\frac{1}{2}\right)(n-1)}}_{??} = \int dt = t + \text{cte}$

$\forall x \in \mathbb{R} - \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

$\frac{1}{x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)} = ? = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-\frac{1}{2}} + \frac{c}{x-1}$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ à déterminer

$\frac{a\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1) + bx(x-1) + cx\left(x-\frac{1}{2}\right)}{x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)}$

$\underbrace{(a+b+c)}_{\overset{\shortparallel}{0}} x^2 + \underbrace{(\dots)}_{\overset{\shortparallel}{0}} x + \underbrace{(\dots)}_{1}$

3 équations à 3 inconnues a, b, c

comment trouver une primitive de $\frac{1}{x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)}$??

$\int \frac{1}{x(x-1)}\, dx = ?$

⚠ il existe des constantes (= des nbres) a et b

tels que $\frac{1}{x(x-1)} = \underbrace{\frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}}_{\overset{\shortparallel}{\frac{a(x-1)+bx}{x(x-1)}}}$ (pour tout $x \neq 0, \neq 1$)

$= \frac{(a+b)x - a}{x(x-1)}$

$\begin{cases} a = -1 \\ a + b = 0 \end{cases}$

$= \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1}$

$\int \frac{dx}{x(x-1)} = -\ln|x| + \ln|x-1| + \text{cte}$

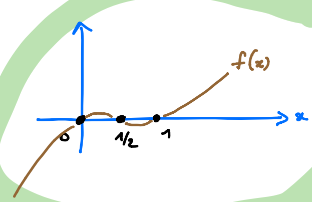
d'où $\int \frac{dx}{x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)} = a \ln|x| + b \ln\left|x - \frac{1}{2}\right| + c \ln|x-1|$ (+cte)

ça ce serait une résolution exacte, "quantitative", de l'ED.

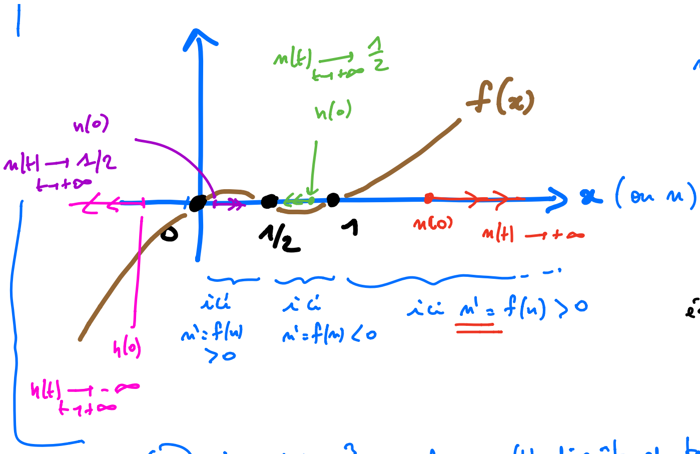
autre approche : approche qualitative

$n'(t) = n(t)\left(n(t) - \frac{1}{2}\right)\left(n(t) - 1\right)$

on commence par tracer... le graphe de $f(x) = x\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)$



$0, \frac{1}{2}, 1$ sont les points d'équilibre de l'ED



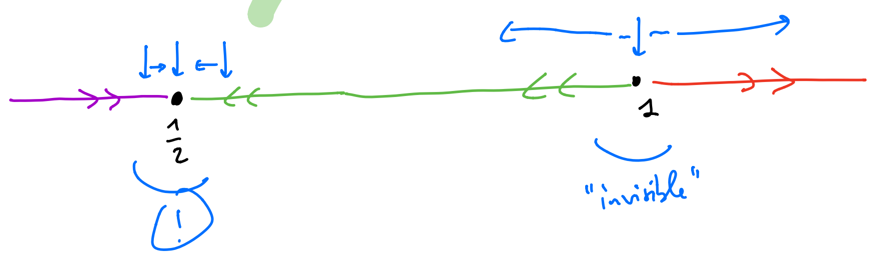
$u' = u(u-\frac12)(u-1)$

$\begin{cases} \text{éq } 0 : \text{instable} \\ \text{éq } \frac12 : \text{stable} \\ \text{éq } 1 : \text{instable} \end{cases}$

équilibres ⟷ solutions cstes $\begin{cases} u(t) = 0 \ \forall t \text{ est une sol.} \\ u(t) = \frac12 \ \forall t \text{ est une sol} \\ u(t) = 1 \ \forall t \text{ ———} \end{cases}$

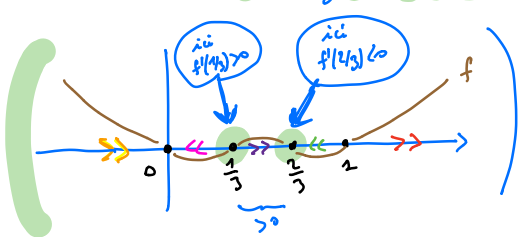
(!) si $u(0) = \frac34$, alors $u(t)$ décroît et tend vers $\frac12$ qd $t \to +\infty$

$$u(t) = \frac{\sqrt{3e^{t/2}+1} + 3e^{t/2}+1}{6e^{t/2}+2} = \frac{e^{t/2}\left(3 + \text{qq chose qui tend vers } 0\right)}{e^{t/2}\left(6 + \text{pareil}\right)} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \frac36 = \frac12$$



(2) $u'(t) = u(t)\left(u(t)-\frac13\right)\left(u(t)-\frac23\right)\left(u(t)-1\right)$

$$\frac{1}{x(x-\frac13)(x-\frac23)(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1/3} + \frac{c}{x-2/3} + \frac{d}{x-1}$$



??

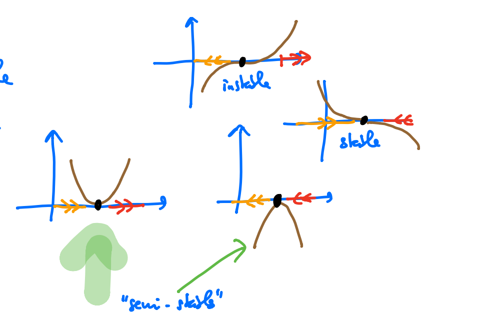
$f(x) = x(x-\frac13)(x-\frac23)(x-1)$

p.ex. elle s'annule en $x = \frac13$

(!) la stabilité / instabilité d'un point d'équilibre x (donc tq $f(x) = 0$) est donnée par... le signe de la dérivée $f'(x)$

$\begin{cases} \text{si } f'(x) > 0 \text{ alors l'éq. est } x \text{ est... instable} \\ \text{si } f'(x) < 0 \text{ ——————— stable} \end{cases}$

et si $f'(x) = 0$?? on ne peut rien en déduire



<u>exercice 35</u> $\quad n'(t) = -n(t)\ln(n(t))$ $\quad$ modèle de Gompertz

Quels sont les équilibres ? 0 et 1 ?

$n'(t) = f(n(t))$

avec $f(y) = -y\ln(y)$ $\quad y>0$

(!) $f(0)$ n'est pas défini....

$f(1) = 0$

<u>rem</u> : f est a priori définie sur $]0,+\infty[$

que fait $f(y)$ quand $y \to 0^+$?

$$\underbrace{\underset{\text{tend vers } 0}{x}\ \underset{\text{tend vers } -\infty}{\ln(x)}}_{\text{F.I.}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$$

"croissances comparées" = limites usuelles

$$\frac{e^x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \qquad x e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$$

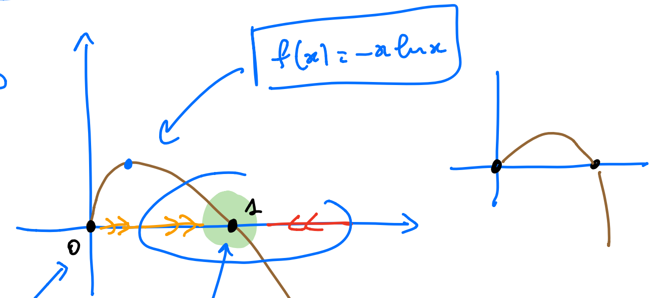
$$\frac{\ln x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \qquad x\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$$

on peut donc prolonger $f(y) = -y\ln(y)$

par continuité en $y=0$, en posant $f(0) = 0$

$$f(0) = \lim_{y\to 0^+} f(y) = 0$$

$f(x) = -x\ln x$



pt d'éq instable

pt d'éq stable

$f(y) = -y\ln y \qquad f'(y) = -\ln y - \frac{y}{y}$

$= -\ln y - 1$

$f'(1) = -1 < 0$

<u>résolution de l'ED</u> $\quad n' = -n\ln(n)$

(!) on pose $p(t) = \ln(n(t)) \iff n(t) = e^{p(t)}$

changement de fonction inconnue

quelle est l'ED vérifiée par $p(t)$?

$n'(t) = p'(t)e^{p(t)}$

$n'(t) = -n(t)\ln(n(t)) \iff p'(t)e^{p(t)} = -e^{p(t)}p(t)$

$\iff p'(t) = -p(t)$

$$p'(t) = \frac{n'(t)}{n(t)} = \frac{-n(t)\ln(n(t))}{n(t)} = -\ln(n(t)) = -p(t)$$

plus simple (?)

$\underset{\text{nouvelle fonction}}{p(t)} = \ln(\underset{\text{ancienne fonction}}{n(t)}) \iff n(t) = e^{p(t)}$

$n' = -n\ln n$

$$p'(t) = \frac{d}{dt}(\ln(n(t)))$$

<u>ccl</u> : $n' = -n\ln n \iff p' = -p$

$\iff p(t) = Ce^{-t}$ (où $C \in \mathbb{R}$)

$\iff n(t) = e^{Ce^{-t}}$ (où $C \in \mathbb{R}$)

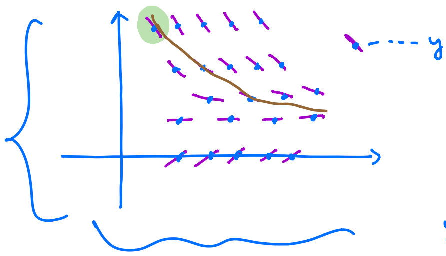
qd $t \to +\infty$?

$e^{-t} \to 0$

$Ce^{-t} \to 0$ $\quad (\forall C)$

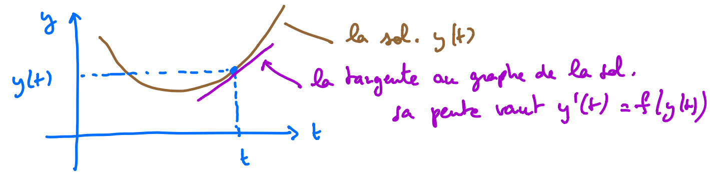
$e^{Ce^{-t}} \to e^0 = 1$

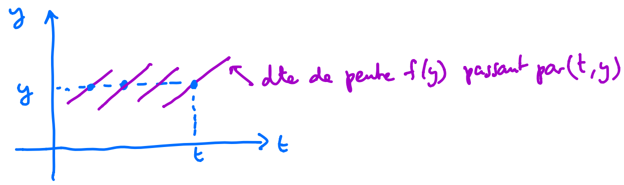
$n(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1$



$y'(t) = f(y(t))$

une solution de cette ED : $t \longmapsto y(t)$





<u>exercice 36</u>

① résoudre $\begin{cases} z'(t) = z(t) - 1 \\ z(0) = 10 \end{cases}$

ED L d'ordre 1

✓ • sol. de l'éq. hom. $z(t) = Ce^t$ où $C \in \mathbb{R}$ (H) $z'(t) = z(t)$

✓ • MVC ? ou on "voit" ?   on "voit" que $z(t) = 1$ est solution

✓ • la sol. gale est $z(t) = Ce^t + 1$ (où $C \in \mathbb{R}$)

• Ci donne $10 = Ce^0 + 1 = C + 1$, donc $C = 9$

<u>ccl</u> : le pb posé admet comme unique solut° $z(t) = 9e^t + 1$

② on cherche à résoudre $\begin{cases} n'(t) = 2n(t) - 2\sqrt{n(t)} \\ n(0) = 100 \end{cases}$ ⟵ quel est le (ou les) terme(s) qui rend(ent) cette ED compliquée à résoudre ?

on cherche à faire un changement de fonction inconnue $z(t) = ??$ (qq ch. qui dépend de $n(t)$)

p. ex. $z(t) = \frac{1}{n(t)}$, $z(t) = \ln(n(t))$, ...

c'est scolaire, mais tout est bon pour y arriver... comparez les Ci !

on nous dit " vous allez vous ramener à la question ① "

l'expression qui nous "dérange" le plus dans $n' = 2n - 2\sqrt{n}$ est ... $\sqrt{n}$?

comment transformer l'ED pour s'en débarasser ? en posant $z(t) = ? = \sqrt{n(t)}$ bonne idée !

on cherche $z(t) =$ " fonction de $n(t)$ " de sorte que pour $t = 0$, si $n(0) = 100$ alors $z(0) = 10$ ...

il paraît assez raisonnable d'essayer $z(t) = \sqrt{n(t)}$ $\sqrt{100} = 10$!

posons $z(t) = \sqrt{n(t)}$ $n(t) = z(t)^2$ $n'(t) = 2z(t)z'(t)$

$(u^2)' = (uu)' = 2uu'$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(uv)' = u'v + uv'$

$2zz' = 2z^2 - 2z$

$\Leftrightarrow z' = z - 1$!