Année 2020-2021
L3 — Mathématiques
HLMA502 Topologie

Feuille d'exercices 6

Exercice 1. Soit H un espace de Hilbert, et soit C une partie convexe fermée non vide de H. On cherche à démontrer le **théorème de projection** qui affirme que pour tout $x \in H$, il existe un unique point de C dont la distance à x est minimale :

$$\forall x \in H, \exists! a \in C; \forall y \in C, \|x-a\| \leq \|x-y\| \tag{1}$$

Ce point a, appelé le **projeté** de x sur C est de plus caractérisé par :

$$\forall y \in C,\ \langle x-a, y-a\rangle \leq 0 \tag{2}$$

1. Expliquer pourquoi on peut se ramener au cas où $x = 0_H$, quitte à translater.

   On suppose dans la suite que $x = 0_H$, et on cherche donc à montrer qu'il existe dans C un unique vecteur a dont la norme est minimale, et que ce vecteur est caractérisé par la condition « $\forall y \in C, \langle -a, y-a\rangle \leq 0$ ».
   Posons $d := \inf\{\|y\| \ \ y \in C\}$.
2. On commence par un calcul utile.
   a) Montrer que si $y, z \in C$, alors $\frac{y+z}{2} \in C$.
   b) En appliquant l'identité du parallélogramme à $y/2$ et $z/2$, en déduire que

   $$\|y-z\|^2 = 2\|y\|^2 + 2\|z\|^2 - 4\|\frac{y+z}{2}\|^2 \tag{3}$$

3. Unicité du projeté. Supposons que $\|y\| = \|z\| = d$.
   a) Expliquer pourquoi $\|\frac{y+z}{2}\|^2 \geq d$.
   b) En déduire que $\|y-z\| = 0$, et donc que $y = z$.
4. Existence du projeté. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de C telle que $\|y_n\| \to d$ lorsque $n \to +\infty$.
   a) En reprenant (3) avec y_n et y_p, montrer que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.
   b) En déduire qu'il existe un $a \in C$ tel que $y_n \to a$ lorsque $n \to +\infty$.
   c) Montrer que $\|a\| = d$ et conclure.
5. Caractérisation du projeté.
   a) Soit a le projeté de x sur C, et soit $y \in C$ un point quelconque.

i. Montrer que si $t \in [0,1]$, alors $\|(1-t)a + ty\|^2 \geq d^2$.

ii. Développer le terme de gauche de cette inégalité, et en déduire que $2\langle a, y - a\rangle + t\|a-y\|^2 \geq 0$ pour tout $t \in]0,1]$.

iii. Faire tendre t vers 0 et conclure.

b) Réciproquement, soit $a \in C$ tel que $\langle a, y-a\rangle \geq 0$ pour tout $y \in C$. En écrivant $y = y - y_0 + y_0$, montrer que $\|y\|^2 \geq \|a\|^2$ et conclure.

Exercice 2. Soit F un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert H. On veut montrer que $H = F \oplus F^\perp$.

1. Montrer que si $x \in F \cap F^\perp$ alors $x = 0_H$.
2. Soit $x \in H$ quelconque. On peut écrire $x = a + (x-a)$, où a est le projeté de x sur F.
   a) Montrer que $\langle x-a, y\rangle \leq 0$ pour tout $y \in F$.
   b) En déduire que $\langle x-a, y\rangle = 0$ pour tout $y \in F$ (si $y \in F$, alors $-y \in F$...)
   c) Conclure.

Exercice 3. Le but de l'exercice est de démontrer la partie difficile du **théorème de Riesz** : si $\alpha \in H'$ est une forme linéaire continue, alors il existe $x \in H$ tel que $\alpha = \langle x, \cdot\rangle$.

1. Que dire si $\alpha = 0$?
2. On suppose maintenant $\alpha \neq 0$.
   a) Montrer que $\ker(\alpha)$ est un sous-espace vectoriel fermé de H.
   b) On a donc $H = \ker(\alpha) \oplus \ker(\alpha)^\perp$, avec $\ker(\alpha)^\perp \neq 0$ (pourquoi ?)
   c) On choisit un vecteur non nul $a \in \ker(\alpha)^\perp$.
      i. Montrer que α et $\langle a, \cdot\rangle$ sont des formes linéaires de même noyau.
      ii. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = \lambda\langle a, \cdot\rangle$.
      iii. Conclure.

Exercices supplémentaires

Exercice 4. Soit E un espace préhilbertien. Montrer que si $x, y \in E$ vérifient $|\langle x, y\rangle| = \|x\|\|y\|$, alors x et y sont colinéaires.

Exercice 5. On se place dans l'espace de Hilbert ℓ^2. Soit F le sous-espace vectoriel donné par :

$$F = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2 \mid \forall n \in \mathbb{N}, x_{2n} = -x_{2n+1}\}$$

Déterminer le projeté de la suite $(0, 1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots)$ sur F.

Exercice 6. Soit $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit C l'ensemble des $f \in E$ telles que $\int_0^{1/2} f(x)dx - \int_{1/2}^1 f(x)dx = 1$.

1. Montrer que C est une partie convexe fermée non vide de E.
2. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in E$ telle que $\|f\|_\infty = d(0,C)$.
3. Que peut-on en conclure ?

Exercice 7. Soit H un espace de Hilbert, et soit C une partie convexe non vide de H. Montrer que la projection p de H sur C est 1-lipschitzienne.

Exercice 8. Soit H un espace de Hilbert. L'**orthogonal** $A^\perp$ d'une partie $A \subseteq H$ est défini par

$$A^\perp = \{x \in H \mid \forall a \in A, \langle x, a\rangle = 0\}$$

1. Montrer que $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de H.
2. Montrer que $(A^\perp)^\perp$ est le plus petit sous-espace vectoriel fermé de H qui contient A.
3. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de H, alors $\overline{F} = (F^\perp)^\perp$.

Exercice 9. Soient H un espace de Hilbert

1. Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H. Montrer que F hérite du produit scalaire de H et devient lui-même un espace de Hilbert.
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels fermés de H, avec $F \subseteq G$. Montrer que $p_F^H = p_F^G \circ f_G^H$, où p_B^A désigne la projection de A sur B.

Exercice 10. Soient H et K des espaces de Hilbert, et soit $u \in \mathscr{L}_c(H,K)$ une application linéaire continue. Le but de cet exercice est de définir l'**adjoint** u^* de u et d'en donner quelques propriétés.

1. Montrer que pour tout $y \in K$ il existe un unique élément de H, noté $u^*(y)$, tel que :

$$\forall x \in H, \quad \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$$

2. Montrer que l'application $u^* : K \to H$ ainsi définie est linéaire.
3. Montrer que u^* est continue, et que $\|u^*\| \leq \|u\|$.
4. Montrer que $(u^*)^* = u$. En déduire que $\|u^*\|\|u\|$.
5. Montrer que $\|u^* \circ u\| = \|u\|^2$.
6. Montrer que $\ker(u^*) = (\mathrm{im}(u))^\perp$ et que $\overline{\mathrm{im}(u^*)} = (\ker(u))^\perp$.

Exercice 11. Un espace métrique X est dit **séparable** s'il existe une partie *dénombrable* A dense dans X.

1. Montrer que tout espace vectoriel normé de dimension finie est séparable.
2. Montrer que ℓ^∞ n'est pas séparable, par exemple de la manière suivante : si $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une famille dénombrable quelconque d'éléments de ℓ^∞, construire un nouvel élément $x \in \ell^\infty$ tel que $d(x, x_n) \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et conclure.
3. Soit E un espace de Banach séparable. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E dense dans la boule unité fermée $D(O_E, 1)$. Pour $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$, on pose $\phi(a) := \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n$.
   a) Montrer que l'application $\phi : \ell^1 \to E$ est bien définie, linéaire, continue avec $\|\phi\| \leq 1$.
   b) On cherche à montrer que ϕ est surjective.
      i. Expliquer pourquoi il suffit de montrer que tout $x \in E$ de norme 1 est dans l'image de ϕ.
      ii. Soit $x \in E$ de norme 1. Construire par récurrence une suite strictement croissante d'indices $(n_k)_{k\geq 1}$ telle que

$$\forall k \geq 1, \quad \|2^k x - 2^k x_{n_1} - 2^{k-1} x_{k-1} - \cdots - x_{n_k}\| \leq \frac{1}{2}$$

      En déduire une suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à ℓ^1 telle que $\phi(a) = x$.
   c) Montrer que $\|\phi\| = 1$.

Exercice 12. Soit X un espace métrique compact. On note E l'ensemble de toutes les fonctions $f : X \to \mathbb{R}$ qui sont lipschitziennes. Pour $f \in E$, on pose

$$L(f) := \inf\{k \geq 0 \mid \forall x, x' \in X, d_Y(f(x), f(x')) \leq k d_X(x, x')\}$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{B}(X, \mathbb{R})$.
2. Pour $X = [0, 1]$ usuel, montrer que E n'est pas complet pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Par exemple, pourquoi existe-t-il une suite de fonctions lipschitziennes qui converge uniformément vers $\sqrt{x}$ sur $[0, 1]$, et pourquoi cela prouve-t-il la non-complétude ?
3. Pour $f \in E$, on pose $N(f) := \|f\|_\infty + L(f)$. Montrer que N est une norme sur E.
4. Montrer que (E, N) est complet.