exemple $C^0([0,1],\mathbb{R}) \longrightarrow C^0([0,1],\mathbb{R})$

$f \longmapsto u(f)$

$\|\cdot\|_\infty$ $\qquad$ $\|\cdot\|_\infty$

$u(f)(x) = \int_0^x t f(t)\,dt$ pour $x \in [0,1]$

$$|u(f)(x)| \le \left| \int_0^x t f(t)\,dt \right| \le \int_0^x t \underbrace{|f(t)|}_{\le \|f\|_\infty} dt \le \int_0^x t \|f\|_\infty dt = \|f\|_\infty \int_0^x t\,dt$$

rappel : $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ evn

$E \xrightarrow{u} F$ une AL continue $\iff \exists M \ge 0$ tq $\forall x \in E$, $\|u(x)\|_F \le M \|x\|_E$

$\iff \sup\limits_{\substack{x \in E \\ x \ne 0_E}} \dfrac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}$ est fini (pas $+\infty$)

dans ce cas :

$$|||u||| := \sup_{x \ne 0_E} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

(!) toujours en supposant u continue :

$$\boxed{|||u||| = \sup_{x \ne 0_E} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} \overset{①}{=} \sup_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F \overset{②}{=} \sup_{\|x\|_E \le 1} \|u(x)\|_F}$$

en effet : ① clair, $\sup\limits_{\|x\|=1} \|u(x)\| \le \sup\limits_{x \ne 0_E} \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|}$ $\qquad$ si $\|x\| = 1$ $\quad \|u(x)\| = \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|}$

et d'un autre côté :

si $x \ne 0_E$, alors $\dfrac{x}{\|x\|}$ est de norme 1 (!) $\quad \left\| \dfrac{x}{\|x\|} \right\| = \dfrac{1}{\|x\|} \|x\| = 1$

et $\left\| u\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \left\| \dfrac{1}{\|x\|} u(x) \right\| = \dfrac{1}{\|x\|} \|u(x)\| = \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|}$

u linéaire

$X := \dfrac{x}{\|x\|}$ $\qquad \|X\| = 1$ et $\|u(X)\| = \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|}$

donc autre inég d'où égalité

② clair $\sup\limits_{\|x\|=1} \|u(x)\| \le \sup\limits_{\|x\| \le 1} \|u(x)\|$

et si $\|x\| \le 1$: $\quad \|u(x)\| \le \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \left\| \dfrac{u(x)}{\|x\|} \right\| = \left\| u\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right) \right\| \le \sup\limits_{\|X\|=1} \|u(X)\|$

p.ex $\|x\| = \frac{1}{2}$ $\qquad$ X, de norme 1

$\boxed{\text{et } x \ne 0_E}$

donc $\qquad$ d'où $\sup\limits_{\|x\| \le 1} \|u(x)\| \le \sup\limits_{\|X\|=1} \|u(X)\|$

Conséquence de $|||u||| = \sup\limits_{x \ne 0_E} \dfrac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup\limits_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F = \sup\limits_{\|x\|_E \le 1} \|u(x)\|_F$

si E est de dimension finie, alors il existe un $\bar{x} \in E$ non nul (et il en existe un de norme 1)

espace de départ

tel que $|||u||| = \dfrac{\|u(\bar{x})\|_F}{\|\bar{x}\|_E} = \underbrace{\|u(\bar{x})\|_F}_{\text{si } \|\bar{x}\| = 1}$

(!) en dim finie, la sphère unité est fermée + bornée donc compacte $\qquad$ (ñ close avec la boule unité fermée) ex : $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\quad \|\cdot\|_\infty \begin{smallmatrix} \nearrow \mathbb{R}^3 \\ \searrow \mathbb{R}^2 \end{smallmatrix}$

$f(x,y,z) = (x+2y+z, -3x+2y+2z)$

$\|f(x,y,z)\|_\infty \le 7 \|(x,y,z)\|_\infty \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

donc $|||f||| \le 7$

(!) de plus $\|f(\underbrace{-1,1,1}_{\|\cdot\|_\infty = 1})\|_\infty = 7$

donc $\displaystyle \sup_{(x,y,z)\neq 0_{\mathbb{R}^3}} \frac{\|f(x,y,z)\|_\infty}{\|(x,y,z)\|_\infty} = \max = 7$ $\qquad \displaystyle \sup_{\|(x,y,z)\|_\infty = 1}$

$\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$

$\forall x \in E, \ \|x\|_E \le 1 \Rightarrow \|u(x)\|_F \le C \qquad C \in \mathbb{R}$

$\displaystyle \Rightarrow \sup_{\|x\|_E \le 1} \|u(x)\|_F \le C$

$$\boxed{\begin{array}{l} A \subseteq \mathbb{R} \text{ et } C \in \mathbb{R} \\ \text{tq } \forall x \in A, \ x \le C \\ \text{alors } \sup(A) \le C \end{array}}$$

ex : $E = F = C^0([0,1],\mathbb{R})$, E muni de $\|\cdot\|_1$, F muni de $\|\cdot\|_\infty$

$E \xrightarrow{u} F$, $f \mapsto u(f)$ $\qquad u(f)(x) = \int_0^x t f(t)\,dt$

$\qquad \overset{1}{\vee}$

$\|u(f)\|_\infty \le \|f\|_1 \quad \forall f \in E$

donc $|||u||| \le 1$: $\displaystyle \sup_{f \neq 0_E} \frac{\|u(f)\|_\infty}{\|f\|_1} \le 1$ $\Big\}$ donc $\displaystyle \sup_{f \neq 0_E} \frac{\|u(f)\|_\infty}{\|f\|_1} = 1$

(!) si $f_n = n t^{n-1}$

alors $\displaystyle \frac{\|u(f_n)\|_\infty}{\|f\|_1} = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$ $\qquad \|f_n\|_1 = 1 \quad \|u(f_n)\|_\infty = \frac{n}{n+1}$

(!) E est de dim ∞, donc le sup n'est peut-être pas un max...

et effectivement c'est le cas ici : le sup n'est pas atteint

si $\underbrace{\|u(f)\|_\infty}_{} = \|f\|_1$

$\displaystyle \sup_{x \in [0,1]} |u(f)(x)| = \max_{x \in [0,1]} |u(f)(x)| = \left|\int_0^x t f(t)\,dt\right|$ ← pour un certain $x \in [0,1]$

alors $\displaystyle \left|\int_0^x t f(t)\,dt\right| = \int_0^1 |f(t)|\,dt$

$\displaystyle \underbrace{\left|\int_0^x t f(t)\,dt\right|}_{} = \underbrace{\int_0^x |f(t)|\,dt}_{} + \underbrace{\int_x^1 |f(t)|\,dt}_{\ge 0}$ avec = ssi $f \equiv 0$ sur $[x,1]$

facile : $\displaystyle \int_0^x |f(t)|\,dt \ge \left|\int_0^x t f(t)\,dt\right|$ avec = ssi $f \equiv 0$ sur $[0,x]$

((!) f est C^0)

d'où $f \equiv 0$ sur $[0,1]$

Espaces de Banach

espace de Banach $\overset{\text{déf}}{=}$ evn complet

ex : tout evn de dim finie est un Banach

$(\mathcal{B}(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est un Banach (X : ens qq)

Thm $(E, \|\cdot\|_E)$ evn $(F, \|\cdot\|_F)$ Banach

Alors $(\mathcal{L}_c(E,F), \|\!|\cdot|\!\|)$ est complet (c'est donc un espace de Banach)

(!) dém Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathcal{L}_c(E,F)$

On cherche à mq : cette suite cv dans $\mathcal{L}_c(E,F)$

donc qu'il existe une ALC° $u : E \to F$ tq $u_n \xrightarrow[n\infty]{} u$ pour $\|\!|\cdot|\!\|$ $\quad \|\!|u_n - u|\!\| \xrightarrow[n\infty]{} 0$

① cv simple :

pour chaque $x \in E$, la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F, donc elle cv (F complet)

si $x = 0_E$: $u_n(x) = 0_F \ \forall n \to$ ok

si $x \neq 0_E$: $\|u_n(x) - u_p(x)\|_F = \|(u_n - u_p)(x)\|_F \leq \underbrace{\|\!|u_n - u_p|\!\|}_{\substack{\downarrow n,p\to\infty \\ 0}} \|x\|_E$ (!)

rem : $E \xrightarrow{u} F$ ALC°

$\forall x \in E, \ \|u(x)\|_F \leq \|\!|u|\!\| \, \|x\|_E$

soit $\varepsilon > 0$: $\exists N \in \mathbb{N} ; \forall n,p \geq N \quad \|\!|u_n - u_p|\!\| < \dfrac{\varepsilon}{\|x\|_E}$

mais alors $n,p \geq N \Rightarrow \|u_n(x) - u_p(x)\|_F \leq \dfrac{\varepsilon}{\|x\|_E} \|x\|_E = \varepsilon$

donc $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F

On pose $u(x) := \underbrace{\lim_{n\infty} u_n(x)}_{\text{ds } F}$ pour chaque $x \in E$

On obtient ainsi : une application $u : E \to F$

(!) on va mq $u_n \to u$ ds $\mathcal{L}_c(E,F)$ ($\xrightarrow[n\infty]{}$, $\mathcal{L}$, c)

② u est linéaire :

si $x, x' \in E$ $\begin{cases} u_n(x) \xrightarrow[n\infty]{} u(x) \text{ ds } F \\ u_n(x') \xrightarrow[n\infty]{} u(x') \text{ ds } F \end{cases}$

donc $u_n(x+x') \xrightarrow[n\infty]{} u(x+x')$

$\quad\quad = u_n(x) + u_n(x') \xrightarrow[n\infty]{} u(x) + u(x')$ $\quad$ donc $u(x+x') = u(x) + u(x')$

de m : $u(\lambda x) = \lambda u(x)$

$\lim_{n\infty} u_n(\lambda x) = \lim_{n\infty} \lambda u_n(x) = \lambda \lim_{n\infty} u_n(x) = \lambda u(x)$

③ on montre en m tps que u est linéaire continue et que $\|\!|u_n - u|\!\| \xrightarrow[n\infty]{} 0$

soit $\varepsilon > 0$ $\quad\quad (u_n)$ de C. ds $\mathcal{L}_c(E,F)$

soit $N \in \mathbb{N}$ tq $n,p \geq N \Rightarrow \|\!|u_n - u_p|\!\| \leq \varepsilon$

donc :

$\forall x \in E, \forall n \geq N, \forall p \geq N : \|u_n(x) - u_p(x)\|_F \leq \|\!|u_n - u_p|\!\| \, \|x\|_E \leq \varepsilon \|x\|_E$

$\|(u_n - u_p)(x)\|$

en passant à la limite qd $p \to \infty$:
$\forall x \in E, \forall n \geq N$: $\| u_n(x) - u(x) \|_F \leq \varepsilon \|x\|_E$

j'ai "fixé" x et $n \geq N$

(!) $u_p(x) \xrightarrow[n\infty]{} u(x)$ ds F

$\forall x \in E, \forall n \geq N, \quad \| u_n(x) - u(x) \|_F \leq \varepsilon \|x\|_E$

donc $\forall n \geq N, \underbrace{\forall x \in E, \| (u_n - u)(x) \|_F \leq \varepsilon \|x\|_E}_{\text{donc (!)}}$

$u_n - u$ (qui est linéaire) est continue et $|||u_n - u||| \leq \varepsilon$

ccl : u est continue (car $u = \underbrace{u - u_n}_{C^0} + \underbrace{u_n}_{C^0}$)

et $\underbrace{\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} ; \forall n \geq N, \ |||u_n - u||| \leq \varepsilon}_{\text{c.à.d } u_n \xrightarrow[n\infty]{} u \text{ ds } \mathcal{L}_c(E,F)}$

Séries convergentes dans un espace de Banach

$(E, \|\cdot\|_E)$ evn $\rightsquigarrow$ notion de série convergente

$x_n \in E \quad \forall n \in \mathbb{N}$

la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ converge (dans E) si (déf) la suite des sommes partielles cv (ds E)

$$\left(\sum_{k=0}^{m} x_k \right)_{m \in \mathbb{N}}$$

$$S = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$$

$$S = \lim_{m \to +\infty} \sum_{k=0}^{m} x_k$$

on dit que $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ est normalement convergente (NCV) si $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|$ cv (dans $\mathbb{R}$)

(!) une série CV n'est pas forcément NCV

p.ex $E = \mathbb{R} + |\cdot|$ $\quad \underbrace{\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \text{ CV}}_{\text{donc pas NCV}}$ mais $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ Div

Prop : dans un espace de Banach, toute série NCV est CV

dém Soit $\sum x_n$ une série NCV de $(E, \|\cdot\|_E)$ Banach

On va mq la suite des sommes partielles est de Cauchy, donc cv...

Soit $\varepsilon > 0$. $\sum \|x_n\|$ cv ds $\mathbb{R}$

$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall p \geq 0, \underbrace{\sum_{k=n}^{n+p} \|x_k\| < \varepsilon}_{\text{ds } \mathbb{R}}$

Alors : si $n \geq N$, $p \geq 0$

$$\underbrace{\left\| \sum_{k=n}^{n+p} x_k \right\|}_{\text{ds } E} \underset{\text{inég } \Delta}{\leq} \sum_{k=n}^{n+p} \|x_k\| < \varepsilon$$

$$\sum_{k=n}^{n+p} x_k = \sum_{k=0}^{n+p} x_k - \sum_{k=0}^{n-1} x_k$$

ccl : $\underbrace{\forall \varepsilon>0, \exists N \in \mathbb{N} ; \forall n \geq N, \forall p \geq 0 , \left\| \sum_{k=0}^{n+p} x_k - \sum_{k=0}^{n-1} x_k \right\| < \varepsilon}$

donc la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} x_k \right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy de E

Or E est complet, donc cette suite cv, donc la série $\sum_{k\geq 0} x_k$ est cv de E.

E ev $\begin{cases} N \\ N' \end{cases}$ normes sur E

hyp : N et N' donnent la même top — mq $N \sim N'$

$0_E \in \underbrace{B_N(0_E, 1)}$

boule ouverte de (E, N)

donc c'est un ouvert pour N

donc c'est un ouvert pour N'

donc $\exists r>0$ tq $B_{N'}(0_E, r) \subseteq B_N(0_E, 1)$

(X, d') $A \subseteq X$ ouverte pour d'

$a \in A$

$\exists r>0 ; B_{d'}(a, r) \subseteq A$

ici : $A = B_N(0_E, 1)$