Entraînement pour le CC

Si vous n'arrivez pas à faire une question, écrivez quand même ce qui vous bloque, ce que vous avez essayé de faire, etc.

Question 1. On considère l'ensemble $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. On pose $A = \{1, 2\}$. Déterminer si les ensembles suivants sont indépendants avec A :

- $B = \{4\}$,
- $C = \{2, 4\}$,
- $D = \{2\}^c$,
- Ω.

Indication : pour tout évènement $\omega \subset \Omega$, on a $\mathbb{P}(\omega) = \frac{|\omega|}{|\Omega|}$.

Corrigé : Comme $\mathbb{P}$ est uniforme, on a $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}$. Donc un évènement ω est indépendant de A si $\mathbb{P}(A \cap \omega) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(\omega)$. On fait au cas par cas

On a $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}$ et $A \cap B = \varnothing$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0 \qquad \frac{1}{2}\mathbb{P}(B) = \frac{1}{8}$$

Donc PAS d'indépendance.

On a $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$ et $A \cap C = \{2\}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{2}\mathbb{P}(C) = \frac{1}{4}$$

Donc indépendance.

On a $D = \{1, 3, 4\}$, d'où $\mathbb{P}(D) = \frac{3}{4}$ et $A \cap D = \{1\}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(A \cap D) = \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{2}\mathbb{P}(D) = \frac{3}{8}$$

Donc PAS d'indépendance.

On a $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et $A \cap \Omega = A$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(A \cap \Omega) = \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2}\mathbb{P}(\Omega) = \frac{1}{2}$$

Donc indépendance.

Question 2. On lance n fois un dé à six faces équilibré. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 6 ? On pourra considérer l'évènement complémentaire.

Indication : Si on note A l'évènement "obtenir au moins un 6", à quoi correspond A^c ? Que vaut $\mathbb{P}(A^c)$ si $n = 1$? Si n est quelconque ? En déduire $\mathbb{P}(A)$.

Corrigé : A^c correspond à l'évènement "obtenir aucun 6". Si $n = 1$, on aurait donc $\mathbb{P}(A^c) = \frac{5}{6}$. Pour n quelconque, on a donc $\mathbb{P}(A^c) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$ car les lancers sont indépendants. Ainsi,

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

Question 3. Un joueur lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir pile. S'il a fait n fois face, on lui donne 2^{n+1} euros (donc 0 face = 2 euros, etc). On note X la variable aléatoire qui correspond au nombre d'euros que le joueur a reçu. Calculer l'espérance de X.

Indication : Calculer $\mathbb{P}(X = 2^{n+1})$ pour tout n. On pourra utiliser la loi géométrique.

Corrigé : $X = 2^{n+1}$ si et seulement si on a fait n fois face puis pile. On pourrait directement affirmer que $\mathbb{P}(X = 2^{n+1}) = \frac{1}{2^{n+1}}$, mais on peut aussi le prouver plus rigoureusement.

Si on note Y le nombre de lancers, on a $X = 2^Y$ et donc $\mathbb{P}(X = 2^{n+1}) = \mathbb{P}(Y = n+1)$. Or, Y suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$, donc

$$\mathbb{P}(Y = n+1) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n+1-1} \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{n+1}} = \mathbb{P}(X = 2^{n+1})$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{k \in \mathbb{N}} k\mathbb{P}(X = k) \\
&= \sum_{k = 2^{n+1}, n \in \mathbb{N}} 2^{n+1}\mathbb{P}(X = 2^{n+1}) + \sum_{k \neq 2^{n+1}, n \in \mathbb{N}} k \times 0 \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{n+1}\mathbb{P}(X = 2^{n+1}) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2^{n+1}}{2^{n+1}} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} 1 = +\infty
\end{aligned}$$

Ainsi, X a une espérance infinie !