TD3 : Exercices 4-7

Exercice 4

1.a) X possède une moyenne ssi $\mathbb{E}|X| < \infty$ (et alors $|\mathbb{E}[X]| \leq \mathbb{E}|X|$). Ici,

$$\mathbb{E}|X| = \mathbb{E}|(-1)^V U| = \mathbb{E}|U|$$

Or, U admet un moment d'ordre 2, donc également une moyenne (ou alors $\mathbb{E}[U] = 0$ car U est centrée, donc en particulier U admet une moyenne). Ainsi, $\mathbb{E}|U| < \infty$, donc $\mathbb{E}|X| < \infty$.

Calculons $\mathbb{E}[X]$. Comme U et V sont indépendantes, $(-1)^V$ et U sont également indépendantes (cf q. 1.d pour une explication). Ainsi,

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[(-1)^V]\mathbb{E}[U] = \mathbb{E}[(-1)^V] \times 0 = 0$$

1.b) Pour montrer qu'un produit XY admet une moyenne, le plus simple (quand ça marche), est de montrer que X et Y admettent un moment d'ordre 2. C'est évident, car $X^2 = U^2$ et $Y^2 = V^2$. Ainsi, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, XY possède une moyenne et

$$\mathbb{E}[XY]^2 \leq \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2] < \infty$$

Toutefois, cette inégalité ne nous permet pas de déterminer $\mathbb{E}[XY]$. Il faut s'y prendre autrement.

On a $XY = (-1)^V V \times U$. Or, U et V sont indépendantes, donc de même U et $(-1)^V V$ le sont (cf 1.d pour une explication). Alors

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[(-1)^V VU] = \mathbb{E}[(-1)^V V] \times \mathbb{E}[U] = \cdots \times 0 = 0$$

Finalement, $\mathbb{E}[XY] = 0$. Remarque[1]

1.c) Comme X et Y admettent un moment d'ordre 2, on a

$$cov(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 0 - 0 = 0$$

1.d) Oui. Rappelons que $X^2 = U^2$ et $Y^2 = V^2$. Or, comme U et V sont indépendantes, on a aussi que $f(U)$ et $g(V)$ le sont, pour toutes fonctions f, g (cf chap 2, prop 3).

Voici quand même une preuve rapide. Pour toutes sous-parties $A, B \subset \mathbb{N}$, si on note $A' = \{k \in \mathbb{Z} \mid k^2 \in A\}$ et $B' = \{k \in \mathbb{Z} \mid k^2 \in B\}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U^2 \in A, V^2 \in B) &= \mathbb{P}(U \in A', V \in B') \\
&= \mathbb{P}(U \in A')\mathbb{P}(V \in B') \qquad (U, V \text{ indép.}) \\
&= \mathbb{P}(U^2 \in A)\mathbb{P}(V^2 \in B)
\end{aligned}$$

donc U^2, V^2 sont indépendantes, càd X^2, Y^2 le sont.

La preuve ci-dessus se généralise à $f(U)$ et $g(V)$ simplement en posant $A' = \{k \in \mathbb{Z} \mid f(k) \in A\}$ et $B' = \{k \in \mathbb{Z} \mid g(k) \in B\}$.

[1] Il est vrai que $\mathbb{E}[X] = 0$, mais le calcul suivant serait faux : $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 0$. En effet, X, Y ne sont pas indépendantes, donc on ne peut pas justifier l'égalité rouge. Par exemple, si on avait $Y = X$ (donc pas du tout indépendantes) tel que $\mathbb{E}[X] = 0$ et , alors $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X^2] \neq \mathbb{E}[X]^2$

2.a) Ici, X^3 est bornée donc possède une moyenne. Par ailleurs, on peut écrire

$$X^3 = \mathbf{1}_{\{V=1\}}(-1)^3U^3 + \mathbf{1}_{\{V=2\}}(-1)^6U^3 = -\mathbf{1}_{\{V=1\}}U^3 + \mathbf{1}_{\{V=2\}}U^3$$

Alors, par indépendance de U^3 avec $\mathbf{1}_{\{V=1\}}$ et $\mathbf{1}_{\{V=2\}}$, il vient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= -\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{V=1\}}U^3] + \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{V=2\}}U^3] \\
&= -\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{V=1\}}]\mathbb{E}[U^3] + \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{V=2\}}]\mathbb{E}[U^3] \\
&= -\mathbb{P}(V=1)\mathbb{E}[U^3] + \mathbb{P}(V=2)\mathbb{E}[U^3] \\
&= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\mathbb{E}[U^3] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\mathbb{E}[U^3] = (-2)^3 \times \frac{1}{3} + 1^3 \times \frac{2}{3} = -\frac{8}{3} + \frac{2}{3} = -2.$$

2.b) Regardons les valeurs prises par la v.a. $Z \coloneqq \mathbf{1}_{\{V=1\}}X^3 = \mathbf{1}_{\{V=1\}}(-1)^V U$. Tout d'abord, si $V = 2$ alors $Z = 0$ (peu importe la valeur de U). Ensuite si $V = 1$, alors $Z = (-1) \times U^3 \in \{-1, 8\}$ car $U \in \{-2, 1\}$. On trouve par le même calcul que la question précédente :

$$\mathbb{P}(Z=8) = \frac{1}{6}, \qquad \mathbb{P}(Z=-1) = \frac{1}{3}$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}[Z] = 8 \times \frac{1}{6} + (-1) \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$$

Vous noterez que j'ai volontairement omis le calcul de $\mathbb{P}(Z=0)$, car la contribution correspondante dans $\mathbb{E}[Z]$ est $0 \times \mathbb{P}(Z=0) = 0$.

2.c) La réponse est non (c'est le but de cet exercice). En effet, si X et $Y = V$ étaient indépendantes, on aurait de même que $\mathbf{1}_{\{V=1\}}$ et X^3 le sont, (cf question 1.d, à vous de trouver les fonctions f et g qui conviennent). Ainsi,

$$\begin{aligned}
1 &= \mathbb{E}[Z] \\
&= \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{V=1\}}X^3) \\
&= \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{V=1\}})\mathbb{E}(X^3) \\
&= \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{V=1\}}) \times 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Mais cela contredit le résultat de la question 2.b) !!

Ainsi, nous avons prouvé (par un contre-exemple) que $cov(X, Y) = 0$ n'entraine pas nécéssairement que X, Y soient indépendantes.

Exercice 5

Par définition, $\mathbb{P}(X = k) = q^{k-1}p$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $q = 1 - p$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > n) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \\
&= p \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^{k-1} \\
&= pq^n \sum_{k=0}^{+\infty} q^k \\
&= pq^n \frac{1}{1-q} \\
&= pq^n \frac{1}{p} \\
&= q^n
\end{aligned}$$

Or, par définition d'une proba conditionnelle :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > n + k \mid X > k) &= \frac{\mathbb{P}(X > n + k, X > k)}{\mathbb{P}(X > k)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X > n + k)}{\mathbb{P}(X > k)} \\
&= \frac{q^{n+k}}{q^k} = q^n \\
&= \mathbb{P}(X > n)
\end{aligned}$$

Finalement, la loi géométrique est bien sans mémoire.

Exercice 6

1. Par définition, comme X prend uniquement les valeurs $0, \ldots, n$, on a

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{n} p_k s^k, \qquad p_k := \mathbb{P}(X = k)$$

avec la convention (probabiliste) $0^0 = 1$ si $s = k = 0$.

Si $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(1, p)$, alors ici $n = 1$ et

$$G_X(s) = p_0 + p_1 s = (1 - p) + ps$$

Si $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n, p)$, alors ici $n \geq 1$ est quelconque. Par ailleurs, on peut démontrer le théorème suivant

Soient X, Y des v.a. réelles, discrètes (à valeurs dans $\mathbb{N}$), et *indépendantes*. Alors

$$G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)$$

Preuve

$$\begin{aligned}
G_{X+Y}(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X+Y=k)s^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(X=j, Y=k-j)s^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}(X=j)\mathbb{P}(Y=k-j)s^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} \left[\mathbb{P}(X=j)s^j\right]\left[\mathbb{P}(Y=k-j)s^{k-j}\right]
\end{aligned}$$

On reconnait le produit de Cauchy des séries $G_X(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=j)s^j$ et $G_Y(s) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y=\ell)s^\ell$. Par conséquent, $G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)$.

Ainsi, en notant $Y_1, \ldots, Y_n \rightsquigarrow \mathcal{B}(1,p)$ des v.a. indépendantes, on sait que $X = Y_1 + \cdots + Y_n$, si bien que

$$G_X(s) = G_{Y_1+\cdots+Y_n}(s) = G_{Y_1}(s)^n = [(1-p)+ps]^n$$

2. Pour rappel, X, Y ont même loi si $\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(Y=k)$ pour tout k. Supposons que X, Y ont même loi. Alors

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k)s^k = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(Y=k)s^k = G_Y(s)$$

Réciproquement, supposons que $G_X = G_Y$. Pour tout $j \in \{0, \ldots, n\}$, on a

$$G_X^{(j)}(s) = \sum_{k=j}^{n} \mathbb{P}(X=k)\left[k(k-1)\ldots(k-j+1)\right]s^{k-j}$$

En particulier, comme $0^0 = 1$, on a $G_X^{(j)}(0) = \mathbb{P}(X=j) \times j!$. Ainsi

$$\mathbb{P}(X=j) = \frac{G_X^{(j)}(0)}{j!} = \frac{G_Y^{(j)}(0)}{j!} = \mathbb{P}(Y=j)$$

3. Par ce qui précède, on a

$$G_X'(s) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k)ks^{k-1}$$

et donc

$$G_X'(1) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{E}[X]$$

(pas besoin du terme en $k=0$ car $k\mathbb{P}(X=k) = 0$!)

De même, (on va supposer $n \geq 2$)

$$G_X''(s) = \sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}(X=k)k(k-1)s^{k-2}$$

et donc

$$\begin{aligned}
G_X''(1) &= \sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}(X=k)k(k-1) \\
&= \sum_{k=2}^{n} k^2\mathbb{P}(X=k) - \sum_{k=2}^{n} k\mathbb{P}(X=k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2\mathbb{P}(X=k) - \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X=k) - 1^2 \times \mathbb{P}(X=1) + 1 \times \mathbb{P}(X=1) \\
&= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]
\end{aligned}$$

Alors, comme $G_X'(1) = \mathbb{E}[X]$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \\
&= G_X''(1) + \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]^2 \\
&= G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2
\end{aligned}$$

Ainsi, si $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$, on a par ce qui précède

$$G_X(s) = [(1-p)+ps]^n$$

et donc (on va supposer $n \geq 2$)

$$G_X'(s) = np\,[(1-p)+ps]^{n-1}, \qquad G_X''(s) = n(n-1)p^2\,[(1-p)+ps]^{n-2}$$

si bien qu'on retrouve effectivement

$$\mathbb{E}[X] = G_X'(1) = np \times 1^{n-1} = np$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}[X] &= G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2 \\
&= n(n-1)p^2 + np - (np)^2 \\
&= -np^2 + np \\
&= np(1-p)
\end{aligned}$$

Exercice 7

On sait que pour toutes v.a. X, Y et tout réel a, on a $\mathbb{E}[aX] = a\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$. Ainsi,

$$\mathbb{E}\left[\frac{S_n}{n}\right] = \frac{1}{n}\mathbb{E}[S_n] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[X_k] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_1] = \frac{1}{p}$$

Pour la variance, on a $\mathbb{V}(aX) = a^2\mathbb{V}(X)$ et, si X, Y sont indépendantes, $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$. Ici c'est bien le cas, donc

$$\mathbb{V}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\mathbb{V}(S_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}(X_k) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}(X_1) = \frac{1}{n}\mathbb{V}(X_1) = \frac{1}{n} \times \frac{1-p}{p^2}$$

Remarque: on voit en particulier que, quelle que soit la loi des X_k, on a $\mathbb{E}\left[\frac{S_n}{n}\right] = \mathbb{E}[X_1]$ et

$$\mathbb{V}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\mathbb{V}(X_1) \to 0$$

Autrement dit, la suite $\left(\frac{S_n}{n}\right)_n$ converge vers $\mathbb{E}[X_1]$, au sens où

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\left[\frac{S_n}{n}\right]\right)^2\right] = \mathbb{V}\left(\frac{S_n}{n}\right) \to 0$$

. C'est une version faible du “théorème central limite”.