Année 2020-2021
L3 — Mathématiques
HLMA502 Topologie

Courbe de Peano

L'objectif est de prouver l'existence d'une application continue surjective $f : [0,1] \to [0,1]^2$, aussi appelée « courbe de Peano ». L'existence d'une telle application défie l'intuition : si la continuité est « tracer sans lever le crayon », comment pourrait-on remplir ainsi tout un carré ?

Nous allons construire la courbe de Peano comme limite d'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de courbes de plus en plus complexes (bien que toutes affines par morceaux). Commençons par décrire une « opération élémentaire » qui va nous servir à définir cette suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Petit rappel de vocabulaire : un **chemin** de $\mathbb{R}^2$ est une application continue $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$.

Transformation élémentaire Considérons le chemin $\gamma : [0,1] \to [0,1]^2$ affine par morceaux de la figure 1. A droite, on a représenté l'image de γ en rouge à l'intérieur du carré $[0,1]^2$.

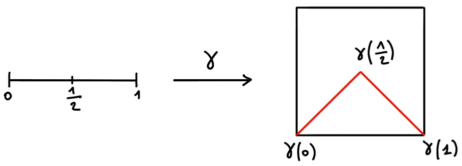

FIGURE 1 – le chemin γ

Il y a 2 morceaux : γ est affine sur $[0,1/2]$ et sur $[1/2,1]$. Le point $\gamma(1/2)$ est au centre du carré $[0,1]^2$. On peut donner des « formules » pour définir γ, même si ce n'est pas nécessaire pour la suite.

On transforme γ en un autre chemin $\overline{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}$ comme dans la figure 2.

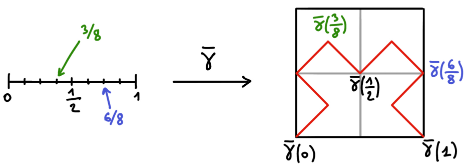

FIGURE 2 – le chemin $\overline{\gamma}$

Ce nouveau chemin $\overline{\gamma}$ est également affine par morceaux : sur $[0,1/8]$, sur $[1/8,2/8]$, etc. jusqu'à $[7/8,8/8]$. Il y a 8 morceaux affines en tout. Là encore, on peut expliciter des formules $\overline{\gamma}$, mais cela ne sera pas vraiment utile dans la suite.

Observez que le carré initial de la figure 1 a été divisé en 4 sous-carrés dans la figure 2, et que dans chaque sous-carré on retrouve (à rotation près) un chemin du même type que γ, défini sur un segment de longueur 1/4... La figure 3 fait la synthèse de cette opération élémentaire en oubliant le paramétrage.

FIGURE 3 – unité de base (à gauche) et sa transformée (à droite)

Suite de chemins Si l'on effectue la même opération élémentaire sur chacun des quatre sous-motifs de base du carré de droite de la figure 3 en remplaçant à chaque fois l'intervalle de définition initial $[0,1]$ par des segments de longueur $1/4$, on obtient la figure de gauche ci-dessous, composée de 16 sous-motifs de base. En continuant pour chacun de ces 16 motifs, on obtient la figure de droite :

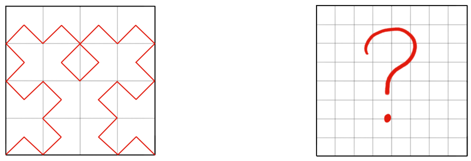

FIGURE 4 – les deux étapes suivantes

On définit de cette manière une suite de chemins $f_n : [0,1] \to [0,1]^2$ en partant de $f_0 := \gamma$. Encore une fois : il n'est pas nécessaire d'avoir des expressions explicites des fonctions f_n, tout ce que l'on a besoin de savoir c'est qu'elles sont affines par morceaux !