$(E, \|\cdot\|)$ evn $\quad x_n \in E \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\sum_{n\geq 0} x_n$ CV (ds E) si la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)_{n\geq 0}$ cv ds E

$\sum_{n\geq 0} x_n$ est <u>NCV</u> si la série <u>numérique</u> $\sum_{n\geq 0} \|x_n\|$ CV (ds $\mathbb{R}$)

<u>Prop</u> Si $(E, \|\cdot\|)$ complet (espace de Banach)

alors NCV $\Rightarrow$ CV

<u>Prop (réciproque)</u> : $(E, \|\cdot\|)$ evn dans lequel toute série NCV est CV.

Alors E est complet (pour $\|\cdot\|$)

<u>dém</u> on suppose que CVN $\Rightarrow$ CV

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de pts de E.

On va mq'elle admet une val. d'adhérence (d'où sa convergence)

$\rightarrow$ il existe N_1 tel que $\forall n,p \geq N_1 \quad \|x_n - x_p\| \leq \frac{1}{2} = \frac{1}{2^1}$

$\rightarrow$ il existe $N_2 > N_1$ tel que $\forall n,p \geq N_2 \quad \|x_n - x_p\| \leq \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

il existe $N_3 > N_2$ tq $\forall n,p \geq N_3 \quad \|x_n - x_p\| \leq \frac{1}{2^3}$

etc...

TG d'une série réelle ≥ 0 <u>CV</u>

$\sum \frac{1}{2^n}$ CV

d'où (par récurrence) une suite d'entiers $N_1 < N_2 < N_3 < \dots < N_k < N_{k+1} < \dots$

tq $\forall k \geq 1, \ \forall n,p \geq N_k, \ \|x_n - x_p\| \leq \frac{1}{2^k}$

en particulier : $\forall k \geq 1, \ \underbrace{\|x_{N_{k+1}} - x_{N_k}\|}_{\geq 0} \leq \underbrace{\frac{1}{2^k}}_{\text{TGSCV}}$ $\quad (p = N_k, \ n = N_{k+1})$

thm de comparaison (série à termes ≥ 0) $\Rightarrow \sum_{k\geq 1} \|x_{N_{k+1}} - x_{N_k}\|$ converge (dans $\mathbb{R}$)

donc $\sum_{k\geq 1} (x_{N_{k+1}} - x_{N_k})$ est <u>NCV</u>

or NCV $\Rightarrow$ CV (hyp)

donc $\sum_{k\geq 1} (x_{N_{k+1}} - x_{N_k})$ CV <u>dans E</u>

somme partielle de cette série vectorielle :

$\sum_{k=1}^{K} (-) = (x_{N_2} - x_{N_1}) + (x_{N_3} - x_{N_2}) + \dots + (x_{N_{K+1}} - x_{N_K})$

$= x_{N_{K+1}} - \underbrace{x_{N_1}}_{\text{cte}}$

CV ds E: $\xrightarrow{K\to\infty} S \in E$

donc $x_{N_{K+1}} \xrightarrow[K\to\infty]{}$ un certain élt de E

<u>ccl</u> : $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente

$\hookrightarrow$ CQFD

<u>Exemple</u> $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach (= evn complet) $\quad$ p.ex. $E = \mathbb{R}^n$ + norme qq

on regarde $\mathcal{L}_c(E) = \mathcal{L}_c(E, E)$

$=$ ev des AL <u>continues</u> $E \longrightarrow E$

$\mathcal{L}_c(E,F) \quad |||\cdot|||$

on met $|||\cdot|||$ sur $\mathcal{L}_c(E)$

$E \xrightarrow{u} E$ ALC^0 $\qquad |||u||| = \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$

(!) $(\mathcal{L}_c(E), |||\cdot|||)$ est complet

donc dans $\mathcal{L}_c(E)$ toute série NCV est CV...

$u^0 = id_E \quad u^1 = u$

$u^2 = u \circ u \quad u^3 = u\circ u \circ u$ etc...

→ exponentielle d'un endo continu $u \in \mathcal{L}_c(E)$

$E \xrightarrow{u} E$ AL continue

$$\boxed{e^u = \exp(u) = \sum_{n \geq 0} \frac{u^n}{n!}}$$

(!) $u^n = \underbrace{u \circ \dots \circ u}_{n \text{ fois}}$

justification de la cv de cette série ?

cette série est NCV (donc CV)

$0 \leq \left|\left|\left| \frac{u^n}{n!} \right|\right|\right| = \frac{1}{n!} |||u^n||| \leq \frac{1}{n!} |||u|||^n$ ← TGSCV (de $\mathbb{R}$) ... de somme ? $e^{|||u|||}$

(!) $\underbrace{|||v \circ u||| \leq |||v||| \cdot |||u|||}_{\text{dém}}$ d'où (par réc.) $|||u^n||| \leq \underbrace{|||u|||\cdot|||u|||\cdots|||u|||}_{n \text{ fois}} = |||u|||^n$

$\underbrace{E \xrightarrow{u} E \xrightarrow{u} E \xrightarrow{u} \cdots E \xrightarrow{u} E}_{n \text{ fois } u}$ c'est $u^n = u\circ u \circ \dots \circ u$

$$\boxed{|||u^n||| \leq |||u|||^n}$$

$E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G$

evn $\|\cdot\|_E$ evn $\|\cdot\|_F$ evn $\|\cdot\|_G$

hyp : u linéaire continue

v linéaire continue

ccl : $v \circ u : E \to G$

est linéaire, continue

et $|||v\circ u||| \leq |||v|||\cdot|||u|||$

(!)

en effet :

$\|v\circ u(x)\|_G = \|v(u(x))\|_G$) continuité de v

$\leq |||v||| \; \|u(x)\|_F$

$\leq |||v|||\cdot|||u|||\cdot\|x\|_E$

donc $|||v\circ u||| \leq |||v|||\cdot|||u|||$

$a \in \mathbb{R} \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{n!} = e^a$ (!)

exp. réelle

ccl : la série $\sum \left|\left|\left| \frac{u^n}{n!} \right|\right|\right|$ converge (dans $\mathbb{R}$)

(comparaison des TG de séries à termes ≥ 0)

donc $\sum_{n\geq 0} \frac{u^n}{n!}$ est normalement convergente

donc convergente $\qquad e^u := \sum_{n\geq 0} \frac{u^n}{n!}$

cas particulier : $E = \mathbb{R}^n$ + norme qq $\|\cdot\|$

$\mathcal{L}_c(E,E) = \mathcal{L}_c(E) = \mathcal{L}(E) \simeq M_n(\mathbb{R})$

↑ dim finie

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 3x+4y \end{pmatrix}$

$\left|\left|\left| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right|\right|\right|$

$(n=2)$ $$e^{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}} = \sum_{k\geq 0} \frac{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}^k}{k!} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}^2}{2!} + \frac{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}^3}{3!} + \dots$$

(!) si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est nilpotente

alors $e^A = \underbrace{I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^k}{k!}}_{\text{somme finie !}} + 0 + 0 + \dots$

(!) si A est diagonalisable :

$\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$

tq $P^{-1}AP = \Delta$ diagonale

$\Leftrightarrow$ $A = P\Delta P^{-1}$

$A^2 = AA = P\Delta \underbrace{P^{-1}P}_{I_n} \Delta P^{-1} = P\Delta\Delta P^{-1} = P\Delta^2 P^{-1}$

$A^3 = AAA = P\Delta P^{-1}P\Delta P^{-1}P\Delta P^{-1} = P\Delta\Delta\Delta P^{-1} = P\Delta^3 P^{-1}$

$A^k = P\Delta^k P^{-1}$

$$e^A = I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^k}{k!} + \dots$$

$$= \underset{PP^{-1}}{I_n} + P\Delta P^{-1} + \frac{1}{2!}P\Delta^2 P^{-1} + \frac{1}{3!}P\Delta^3 P^{-1} + \dots + \frac{1}{k!}P\Delta^k P^{-1} + \dots$$

$$= P\underbrace{\left(I_n + \Delta + \frac{\Delta^2}{2!} + \dots + \frac{\Delta^k}{k!} + \dots\right)}_{e^\Delta}P^{-1}$$

$e^A = P e^\Delta P^{-1}$

(!) $\Delta = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$ $\Delta^k = \begin{pmatrix}\lambda_1^k & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k\end{pmatrix}$

$e^\Delta = \begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n}\end{pmatrix}$ (!)

Propriétés (!) de e^u / e^A

$$\begin{cases} e^0 = id_E \\ e^{u+v} = e^u \circ e^v \text{ si } u\circ v = v\circ u \\ e^u \text{ est bij inversible et } (e^u)^{-1} = e^{-u} \end{cases}$$

0 = l'appl. lin. nulle / la matrice nulle 0_n

$e^0 = I_n + \underbrace{0_n + \frac{0_n^2}{2!} + \frac{0_n^3}{3!} + \dots}_{0_n} = I_n$

$\underline{e^{A+B} = e^A e^B} = e^B e^A$

(!)

vrai si... $AB = BA$ (!)

$$\begin{cases} e^A e^B = \left(I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \dots\right)\left(I_n + B + \frac{B^2}{2!} + \dots\right) \\ \quad = \dots + \frac{A^2B^2}{2!2!} + \dots \\ e^B e^A = \dots + \frac{B^2A^2}{2!2!} + \dots \end{cases}$$

e^A est une matrice inversible, d'inverse e^{-A} qq soit A !

$$e^A e^{-A} \underset{\substack{\uparrow \\ A(-A) = (-A)A = -A^2}}{=} e^{A-A} = e^0 = I_n$$

exemple

$GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans $M_n(\mathbb{R})$

$M_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\det} \mathbb{R}$ (C^0) $\qquad GL_n(\mathbb{R}) = (\det)^{-1}(\underbrace{\mathbb{R}-\{0\}}_{\text{ouvert de } \mathbb{R}})$

cas g^{al} : E Banach

$GL_c(E)$ est ouvert dans $\mathcal{L}_c(E)$

→ notes de cours